УДК 539.3

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ НЕПОЛОГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ НЕОДНОРОДНОГО СТРОЕНИЯ

А. В. КАРМИШИН

(Москва)

Общий метод решения задач прочности неоднородных (слоистых) тонкостенных оболочечных конструкций разработан в [1]. В основу метода положена гипотеза о том, что несущая способность таких конструкций определяется ее минимальными жесткостями. В данной работе составлена потенциальная энергия ортотропной непологой оболочки неоднородного строения в минимальных жесткостях и дан ее анализ с точки зрения оценки членов, учитывающих неоднородность строения оболочки. Установлено, что главную часть потенциальной энергии неоднородной оболочки составляют члены от деформации поверхностей с суммарными жесткостями на растяжение – сжатие, содержащие центры жесткости, и члены с минимальными жесткостями на изгиб. Анализ работ такого плана можно найти в [2–4].

1. Центры жесткостей. Будем рассматривать непологую ортотропную оболочку неоднородного строения с механическими характеристиками E_1, E_2, G, μ_1 и μ_2, являющимися функциями координаты толщины оболочки. За опорную поверхность примем внутреннюю поверхность оболочки и поместим оси координат ox_1 и ox_2 в касательной плоскости этой поверхности, а ось z направим по внешней нормали. Определим жесткости B_i и центры жесткости z_i по формулам

$$B_i = \int_0^h \bar{E}_i\,dz, \qquad z_iB_i = \int_0^h \bar{E}_i z\,dz \qquad (i=1,2,3,4)$$

$$\bar{E}_1(z)=E_1(z)\left[1-\mu_1(z)\,\mu_2(z)\right]^{-1}, \qquad \bar{E}_3(z)=G$$

$$\bar{E}_2(z)=E_2(z)\left[1-\mu_1(z)\,\mu_2(z)\right]^{-1}, \qquad \bar{E}_4(z)=\mu_1(z)\bar{E}_2(z)$$

где B_i – суммарные жесткости оболочки, z_i – центры жесткости.

Обобщенный коэффициент Пуассона определим из условий $\mu_1B_2=\mu_2B_1=B_4$.

2. Минимальные жесткости. Изгибные жесткости ортотропной оболочки неоднородного строения определим относительно координатных осей в опорной поверхности по формулам

$$D_i = \int_0^h \bar{E}_i(z)z^2\,dz \qquad (i=1,2,3,4)$$

Эти величины могут быть выражены через минимальные жесткости по известным соотношениям: $D_i=D_{ii}+B_iz_i^2$ (D_{ii} – минимальные изгибные жесткости, z_i – центры жесткости).

Ту же самую зависимость между жесткостями можно записать относительно сдвинутых на координату z_0 параллельных осей: $D_i(z_0)=D_{ii}+B_i(z_i-z_0)^2$.

Здесь z_0 – произвольный параметр, который может принимать значения от нуля до h, в частности, за z_0 может быть принята любая из координат центров жесткости z_k. В последнем случае разности $d_{ik}=z_i-z_k$ будут определять расстояния между центрами жесткостей, которые являются физическими параметрами оболочки неоднородного строения. В случае оболочки однородного строения все эти параметры равны нулю, а изгибные жесткости будут минимальными, если опорную поверхность поместить в срединной поверхности оболочки ($z_0=h/2$). Заметим, что при определении центров z_i и жесткостей B_i, D_i не учитывалось изменение кривизн k_i по слоям оболочки. Через эти параметры определим потенциальную энергию деформирования непологой оболочки неоднородного строения.

3. Потенциальная энергия. Выражение потенциальной энергии деформирования ортотропной непологой оболочки неоднородного строения на единицу опорной поверхности запишется в виде

$$2W = \int_0^h \sigma_i(z)\,e_i(z)\,(1+zk_1)\,(1+zk_2)\,dz \qquad (i=1,2,3)$$

Будем предполагать, что для оболочки (пакета) неоднородного строения справедлива гипотеза Кирхгофа – Лява о недеформируемой нормали. Тогда деформации и закон Гука по слоям могут быть представлены в виде

$$e_i(z)=(\varepsilon_i+z\varkappa_i)(1+zk_i)^{-1}, \qquad e_3(z)=\sum_i(\beta_i+z\tau_i)(1+zk_i)^{-1} \quad (i=1,2)$$

$$\sigma_1(z)=\bar{E}_1(z)[e_1(z)+\mu_2(z)e_2(z)], \quad \sigma_2(z)=\bar{E}_2(z)[e_2(z)+\mu_1(z)e_1(z)], \quad \sigma_3(z)=\bar{E}_3(z)e_3(z)$$

Здесь k_1 и k_2 – главные кривизны координатных линий, ε_i, β_i, $\varkappa_i$, τ_i – деформации опорной поверхности, которые определяются через перемещения по известным формулам.

Проводя элементарные преобразования подынтегрального выражения и удерживая при интегрировании слагаемые с z не выше второй степени, получим выражение потенциальной энергии ортотропной непологой оболочки неоднородного строения в симметричной форме

$$\begin{aligned}2W=&B_1[\varepsilon_1^2+2\varepsilon_1\varkappa_1z_1-\varepsilon_1^2(k_1-k_2)z_1]+D_1[\varkappa_1^2-2\varepsilon_1\varkappa_1(k_1-k_2)+\varepsilon_1^2k_1(k_1-k_2)]+\\&+B_2[\varepsilon_2^2+2\varepsilon_2\varkappa_2z_2-\varepsilon_2^2(k_2-k_1)z_2]+D_2[\varkappa_2^2-2\varepsilon_2\varkappa_2(k_2-k_1)+\varepsilon_2^2k_2(k_2-k_1)]+\\&+2B_4[\varepsilon_1\varepsilon_2+(\varepsilon_1\varkappa_2+\varepsilon_2\varkappa_1)z_4]+2D_4\varkappa_1\varkappa_2+B_3[\beta_1^2+2\beta_1\tau_1z_3-\beta_1^2(k_1-k_2)z_3]+\\&+D_3[\tau_1^2-2\beta_1\tau_1(k_1-k_2)+\beta_1^2k_1(k_1-k_2)]+B_3[\beta_2^2+2\beta_2\tau_2z_3-\beta_2^2(k_2-k_1)z_3]+\\&+D_3[\tau_2^2-2\beta_2\tau_2(k_2-k_1)+\beta_2^2k_2(k_2-k_1)]+2B_3[\beta_1\beta_2+(\beta_1\tau_2+\beta_2\tau_1)z_3]+2D_3\tau_1\tau_2\end{aligned}$$

На основании известных соотношений $\beta_1+\beta_2=\varepsilon_3$, $\tau_1+\tau_2+(\beta_1k_2+\beta_2k_1)=\varkappa_3$ последние три строки можно преобразовать к другой форме

$$B_3[\varepsilon_3^2+2\varepsilon_3\varkappa_3z_3-\varepsilon_3^2(k_1+k_2)z_3]+D_3[\varkappa_3^2-\varepsilon_3\varkappa_3(k_1+k_2)+\varepsilon_3(k_1^2+k_2^2-k_1k_2)]$$

Дифференцируя полученное выражение потенциальной энергии по параметрам деформаций ε_i, β_i, $\varkappa_i$, τ_i, получим усилия и моменты на единицу поверхности

$$\begin{aligned}&T_1=B_1[1-(z_1-D_1B_1^{-1}k_1)(k_1-k_2)]\varepsilon_1+B_1[z_1-D_1B_1^{-1}(k_1-k_2)]k_1+B_4(\varepsilon_2+z_4\varkappa_2)\\&T_{12}=B_3[1-(z_3-D_3B_3^{-1}(k_1-k_2)]\varepsilon_3+B_3[z_3-{}^1/_2D_3B_3^{-1}(k_1-k_2)]\varkappa_3\\&M_1=D_1\varkappa_1+D_4\varkappa_2+B_2[z_1-D_1B_1^{-1}(k_1-k_2)]\varepsilon_1+B_4z_4\varepsilon_2\\&M_{12}=D_3\varkappa_3+B_3(z_3-D_3B_3^{-1}k_1)\varepsilon_3\end{aligned}$$

Аналогично запишется вторая группа усилий и моментов.

Из анализа последних формул следует, что соотношения упругости для неоднородных ортотропных непологих оболочек имеют тот же вид, что и для оболочек однородного строения с дополнительными слагаемыми, содержащими z_i; величина их будет оценена в п.4. Подставляя эти соотношения упругости в известные уравнения равновесия, получим пять дифференциальных уравнений обычного типа и одно недифференциальное уравнение

$$T_{12}-T_{21}+M_{12}/R_1-M_{21}/R_2=0$$

которое удовлетворяется тождественно при любом z_4.

4. Анализ выражения потенциальной энергии. Проведем оценку дополнительных слагаемых в выражении потенциальной энергии, положив в соответствии с п.2

$$D_i=D_{ii}+B_iz_i^2, \quad D_{ii}=B_ih_i^2, \quad z_i/h_i=t_i$$

причем h_i – фиктивная толщина оболочки, а параметр t_i не больше единицы. Кроме того, следуя [3], деформации от изгиба представим в виде деформаций опорной поверхности, положив $h_i\varkappa_i=\varepsilon_i'$. Тогда первая строка выражения потенциальной энергии запишется так:

$$2W=B_1[(\varepsilon_1+z\varkappa_1)^2+\varepsilon_1'^2]-B_1h_1(k_1-k_2)[t_1-h_1(1+t_1^2)k_1]\varepsilon_1^2-2B_1h_1(1+t_1^2)(k_1-k_2)\varepsilon_1\varepsilon_1'+\ldots$$

Сравнивая вторые слагаемые с первыми, убеждаемся, что они имеют порядок малости hR^{-1} и выше по сравнению с единицей. Поэтому в практических расчетах всеми этими слагаемыми можно пренебречь. Тогда выражение потенциальной энергии можно записать в виде

$$2W=\sum_i[B_i(\varepsilon_i+z_i\varkappa_i)^2+D_{ii}\varkappa_{ii}^2]+2B_4(\varepsilon_1+z_4\varkappa_1)(\varepsilon_2+z_4\varkappa_2)+2D_{44}\varkappa_1\varkappa_2 \quad (i=1,2,3)$$

Анализ выражения потенциальной энергии деформирования неоднородной оболочки показывает, что это выражение имеет аналогичную запись с однородной. Однако в этой записи есть и принципиальное отличие. Потенциальная энергия однородной оболочки выражается через параметры деформации срединной поверхности, тогда как выражение потенциальной энергии неоднородной оболочки определяется теми же параметрами, но через деформации четырех поверхностей, определяемых центрами жесткости z_i, $i=1, 2, 3, 4$. В самом деле, деформации $\varepsilon_i+z_i\varkappa_i$ и $\varepsilon_i+z_4\varkappa_i$, $i=1, 2$ не зависят от опорной поверхности и определяют деформации поверхностей, отстоящих от опорной на расстоянии z_i. Отсюда следует, что каждому типу деформации соответствует свой центр и своя поверхность. Влияние коэффициента Пуассона представлено центром z_4 и жесткостями B_4, D_{44}. Поэтому при определении осевых деформаций имеем дело с двумя поверхностями, а при сдвигах и кручении – с одной.

Запишем приближенные значения усилий и моментов

$$T_1=B_1(\varepsilon_1+z_1\varkappa_1)+B_4(\varepsilon_2+z_4\varkappa_2)$$
$$M_1=D_{11}\varkappa_1+D_{44}\varkappa_2+B_1(\varepsilon_1+z_1\varkappa_1)z_1+B_4(\varepsilon_2+z_4\varkappa_2)z_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Отсюда следует, что усилие T_1 является равнодействующей двух сил – силы $B_1(\varepsilon_1+z_1\varkappa_1)$ с центром приложения в точке z_1 и силы $B_4(\varepsilon_2+z_4\varkappa_2)$ с центром приложения в z_4. Отсюда следует, что равнодействующая их будет иметь центр приложения

$$z_{11}=[B_1(\varepsilon_1+z_1\varkappa_1)z_1+B_4(\varepsilon_2+z_4\varkappa_2)]T_1^{-1}$$

Момент можно записать в виде: $M_1=D_{11}\varkappa_1+D_{44}\varkappa_2+T_1z_{11}$.

Аналогичную запись будем иметь для второго направления

$$T_1=B_1(\varepsilon_1+z_1\varkappa_1)+B_4(\varepsilon_2+z_4\varkappa_2),\quad T_2=B_2(\varepsilon_2+z_2\varkappa_2)+B_4(\varepsilon_1+z_4\varkappa_1),\quad T_3=B_3(\varepsilon_3+z_3\varkappa_3)$$
$$M_1=D_{11}\varkappa_1+D_{44}\varkappa_2+T_1z_{11},\quad M_2=D_{22}\varkappa_2+D_{44}\varkappa_1+T_2z_{22},\quad M_3=D_{33}\varkappa_3+T_3z_{33}$$

Отметим, что при составлении разрешающих уравнений в усилиях и моментах вместо центров сил целесообразно использовать центры жесткостей, так как центры сил до решения упругой задачи неизвестны. В практических расчетах целесообразно за опорную поверхность принимать поверхность с одним из центров жесткостей. Тогда в уравнения будут входить разности между центрами жесткости, причем эти разности составляют десятые – сотые доли толщины оболочки и, как показали многочисленные числовые расчеты неоднородных пакетов пластин и оболочек, имеют малое влияние на величины усилий и моментов. Поэтому в первом приближении этими величинами можно пренебречь и решать задачу типа однородной с минимальными жесткостными характеристиками.

Поступила 19 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кармишин А. В.* Уравнения неоднородных тонкостенных элементов на основе минимальных жесткостей. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 6.
2. *Григолюк Э. И., Коган Ф. А.* Современное состояние теории многослойных оболочек. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 6.
3. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
4. *Королев В. И.* Упругопластические деформации оболочек. М., Машиностроение, 1971.

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ КОЛЬЦЕВЫХ РЕБЕР РАЗЛИЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

И. С. МАЛЮТИН

(Москва)

Рассматривается устойчивость цилиндрической оболочки с дискретным подкреплением произвольным количеством кольцевых ребер следующей регулярной структуры. Ребра одного вида (параметры которых отмечаем индексом *2*) расположены равномерно вдоль оболочки и посредине каждого из образующихся при этом участков расположены ребра другого вида (за ними закрепляется индекс *1*). Для оболочки, находящейся под действием внешнего давления и осевых сил, получено характеристическое уравнение для определения критических параметров.