УДК 539.376 : 534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСОЛЬНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ, ЗАГРУЖЕННОГО СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ

И. И. ВОЛОШИН, В. Г. ГРОМОВ

(Ростов-на-Дону)

Изучаются критические и псевдокритические состояния консольного вязкоупругого стержня, подверженного действию следящей силы на свободном конце. В отличие от предыдущих исследований [1-3] материал стержня наделен произвольными по времени наследственными свойствами. Дан расчет критических параметров. Приближенный аналитический метод сравнивается с численным решением частотного уравнения. Приведены механические интерпретации результатов расчета.

1. Уравнения критических параметров. Рассматривается консольный стержень свободный конец которого загружен следящей тангенциальной силой P. В рамках принципа линеаризации определение критических параметров сводится к изучению спектральных свойств линейной задачи для возмущений. Последняя получается линеаризацией нелинейной системы и имеет вид

$$E_1 v^{\mathrm{IV}} + pv'' + \varkappa^2 \partial^2 v/\partial t^2 = 0 \tag{1.1}$$

$$v(0,\ t) = v'(0,\ t) = v''(1,\ t) = v'''(1,\ t) = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $v(s,\ t)$ – поперечные смещения точек стержня, $s = x/l$, $\varkappa^2 = ml^4/EI$, $p = Pl^2/EI$, l – длина, m – погонная масса, I – момент инерции площади поперечного сечения стержня, E – модуль Юнга, $E_1 = 1 - \eta E^*$ – безразмерный оператор вязкоупругости, η – параметр наследственности. Относительно оператора E^* предполагаем, что он удовлетворяет условиям замкнутого цикла Вольтерра [4]. В остальном он произволен, но наибольший интерес представляет тот случай, когда E^* – интегральный оператор, т. е. порожден непрерывным спектром релаксации.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$v(s,\ t) = e^{\sigma t} w(s) \tag{1.3}$$

Из предположений относительно E^* вытекает

$$E^* e^{\sigma t} = E^\circ(\sigma) e^{\sigma t}, \qquad E_1 e^{\sigma t} [1 - \eta E^\circ(\sigma)] e^{\sigma t} = \Theta^2(\eta,\ \sigma) e^{\sigma t} \tag{1.4}$$

где $E^\circ(\sigma)$ – некоторая функция комплексного параметра, связанная с конкретным видом оператора E^*, а функция $\Theta(\eta,\ \sigma)$ введена для удобства. Подставляя (1.3) в (1.1), (1.2) и учитывая (1.4), приходим к однородной несамосопряженной краевой задаче относительно w

$$\Theta^2(\eta,\ \sigma) w^{\mathrm{IV}} + pw'' + \varkappa^2 \sigma^2 w = 0 \tag{1.5}$$

$$w(0) = w'(0) = w''(1) = w'''(1) = 0 \tag{1.6}$$

Дальнейшее сводится к исследованию расположения спектра задачи (1.5), (1.6) в комплексной плоскости $\sigma = \gamma + i\omega$. Собственные значения σ будут зависеть от параметра нагрузки p. Те значения p, при которых $\operatorname{Re}\sigma < 0$, принадлежат к области устойчивости. Если $\operatorname{Re}\sigma > 0$, то поведение стержня неустойчиво. Критическими будут значения параметра p, при которых $\operatorname{Re}\sigma = 0$. Поскольку при этом $\sigma = i\omega$ – чисто мнимая величина, то потеря устойчивости может быть либо типа дивергенции $(\omega = 0)$, либо типа флаттера $(\omega \neq 0)$.

Общее решение (1.5) имеет вид

$$w(s) = \sum_{k=1}^{4} C_k e^{r_k s}$$

где r_k – корни соответствующего характеристического уравнения.

Удовлетворяя граничным условиям (1.2), после некоторых преобразований получим следующее условие существования нетривиального решения:

$$\begin{aligned} F(\eta,\ \sigma,\ p) = p^2 - 2\Theta^2\varkappa^2\sigma^2 - 0{,}5\Theta\varkappa\sigma(p - 2\Theta\varkappa\sigma)\operatorname{ch}[\Theta^{-1}(p + 2\Theta\varkappa\sigma)] - \\ -0{,}5\Theta\varkappa\sigma(p + 2\Theta\varkappa\sigma)\operatorname{ch}[\Theta^{-1}(p - 2\Theta\varkappa\sigma)] = 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Это уравнение будем называть частотным.

2. Псевдокритическое состояние. Полагая параметр наследственности равным нулю ($\eta=0$), получаем идеально упругий стержень ($\Theta=1$). При этом частотное уравнение (1.7) будет вещественным. Оно представляет собой неявную функцию $p=p(\sigma)$. Следуя работе [1], будем называть случай псевдокритическим, если все характеристические показатели степени находятся на мнимой оси, а псевдокритической силой – такую величину p_n^*, что если $p>p_n^*$, то хотя бы один показатель степени переходит в правую полуплоскость. Для упругого стержня псевдокритические параметры определяются из системы

$$F(0,\ i\omega,\ p)=0,\quad dp/d\omega=0 \tag{2.1}$$

Из системы (2.1) следует, что при $p=p_n^*$ частотное уравнение имеет двукратный корень по σ

$$F(0,\ \sigma_n^*,\ p_n^*)=0,\quad F_\sigma'(0,\ \sigma_n^* p_n^*)=0\quad (F_\sigma^{2\prime\prime}(0,\ \sigma_n^*,\ p_n^*)\neq 0) \tag{2.2}$$

Фиксируя параметр $p=p_n^*$, получаем, что в окрестности точки $(0,\ \sigma_n^*)$ уравнение (1.7) определяет неявную функцию $\sigma=\sigma(\eta)$, которая имеет не более двух ветвей, причем каждая из них разлагается в сходящийся ряд по дробным степеням η [5]

$$\sigma_k=\sigma_n^*+\sum_{j=0}^{\infty} c_{kj}\eta^{\alpha_{kj}}\qquad (\alpha_{kj}<\alpha_{ki},\ j<i,\ k=1,2) \tag{2.3}$$

Так же, как в [3] для критической силы p^* можно доказать неравенство $p^*<p_n^*$, рассматривая поведение этих ветвей.

Нахождение ветвей (2.3) неявной функции сводится к определению α_{kj}, c_{kj}. Нетрудно заметить, что $F_\eta'(0,\ \sigma_n^*,\ p_n^*)=-ME^\circ(i\omega)$, $F_{\eta}^{2\prime\prime}(0,\ \sigma_n^*,\ p_n^*)=-N$, где M, N – вещественные выражения.

Из структуры частотного уравнения следует, что при вычислении производных комплексность сохраняется исключительно за счет функции $E^\circ(i\omega)$, связанной с оператором вязкоупругости. В силу (2.2) для первых членов разложения имеем $F(\eta,\ \sigma,\ p_n^*)=-ME^\circ(i\omega_n^*)\eta-N(\sigma-\sigma_n^*)^2$. Отсюда получаем

$$\sigma_{1,2}=\sigma_n^*\pm[-E^\circ(i\omega_n^*)M/N]^{1/2}\eta^{1/2}+\ldots,\quad N\neq 0. \tag{2.4}$$

Поскольку $E^\circ(i\omega_n^*)$ не вещественно, одна из ветвей (2.4) необходимо имеет положительную вещественную часть. Последнее означает, что для физически осмысленных операторов вязкоупругости всегда справедливо неравенство $p^*<p_n^*$ при малых значениях параметра наследственности.

3. Расчет критических параметров. Расчет критических параметров сводится к численному решению трансцендентного уравнения (1.7), который осуществляется градиентным методом по схеме

$$(p_k,\ \omega_k)=(p_{k-1},\ \omega_{k-1})+\mu_k(p_{k-1},\ \omega_{k-1})\operatorname{grad}|F(p_{k-1},\ \omega_{k-1})|^2$$

причем операция grad реализуется численно.

Однако для практических целей оказывается удобным упрощенный аналитический расчет критических и псевдокритических параметров, основанный на процедуре Галеркина. Решение задачи (1.1), (1.2) ищем в виде

$$v(s,t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\,w_k(s) \tag{3.1}$$

где $f_k(t)$ – коэффициенты разложения прогиба $v(s,\ t)$ в ряд по формам $w_k(s)$ собственных колебаний незагруженного упругого стержня.

Для определения функций $f_k(t)$ в (3.1) к уравнению (1.1) применяем процедуру Галеркина. В результате имеем систему операторных уравнений

$$a_k^2(\lambda_k^4 E_1 f_k(\tau) + \varkappa^2 f_k^{\bullet\bullet}(t)) + p\sum_{l=1}^{\infty} b_{kl} f_k(t) = 0 \tag{3.2}$$

$$a_k^2 = \int_0^1 w_k^2(s)\,ds, \qquad b_{kl} = \int_0^1 w_k(s)\,w_l''(s)\,ds, \qquad \lambda_k^2 = \varkappa\Omega_k$$

Ω_k – собственные частоты упругого стержня. Поскольку оператор вязкоупругости удовлетворяет условию (1.4), спектральные свойства системы (3.2) могут быть изучены чисто алгебраически. Задавая решение (3.2) в виде $f_k(t) = \Phi_k l^{\sigma t}$, где Φ_k – постоянные, приходим к алгебраической системе

$$a_k^2[\lambda_k^4\Theta^2(\eta,\sigma) + \varkappa^2\sigma^2]\Phi_k + p\sum_{l=1}^{\infty} b_{kl}\Phi_l = 0$$

Условие нетривиальной разрешимости последней дает уравнение

$$\det\{a_k^2[\lambda_k^4\Theta(\eta,\ \sigma) + \varkappa\sigma]\delta_{kl} + b_{kl}p\} = 0, \qquad \delta_{kl} = 1\ {\scriptstyle (k=l)}, \qquad \delta_{kl} = 0\ {\scriptstyle (k\neq l)} \tag{3.3}$$

которое является аналогом частотного уравнения.

Таким образом, анализ устойчивости стержня сводится к изучению распределения корней уравнения (3.3) в комплексной плоскости.

Расчет критических параметров по методу Галеркина не только упрощает численный анализ, но и позволяет строить эффективные аналитические зависимости для них. Покажем это, ограничиваясь двумя первыми приближениями.

Частотное уравнение принимает вид

$$\begin{gathered}\alpha_0 p^2 + (\alpha_1\Theta^2 + \alpha_2\varkappa^2\sigma^2)p + \alpha_3\Theta^4 + \alpha_4\Theta^2\varkappa^2\sigma^2 + \varkappa^4\sigma^4 = 0\\ \alpha_0 = 7.845,\quad \alpha_1 = 53.045,\quad \alpha_2 = -13.421,\quad \alpha_3 = 600.362,\quad \alpha_4 = 497.841\end{gathered} \tag{3.4}$$

Полагая $\sigma = i\omega$, $\Theta^2(\eta,\ \omega) = R(\eta,\ \omega) + iI(\eta,\ \omega)$, в уравнении (3.4) отделяем действительную и мнимую части. Получаем систему уравнений для критических параметров

$$\begin{gathered}\alpha_0 p^2 + \alpha_1 pR - \alpha_2\varkappa^2\omega^2 + \alpha_3(R^2 - I^2) - \alpha_4 R\varkappa^2\omega^2 + \varkappa^4\omega^4 = 0\\ I(\alpha_1 p + 2\alpha_3 R - \alpha_4\varkappa^2\omega^2) = 0\end{gathered} \tag{3.5}$$

Критические значения силы и частоты определяются решениями этой системы. При $\eta = 0$, $R = 1$, $I = 0$ имеем упругий стержень. Система уравнений для определения псевдокритических параметров получается в виде

$$\begin{gathered}F(p,\ \omega) = \alpha_0 p^2 + \alpha_1 p - \alpha_2\varkappa^2\omega^2 + \alpha_3 - \alpha_4\varkappa^2\omega^2 + \varkappa^4\omega^4 = 0\\ F_\omega'(p,\ \omega) = \varkappa\omega(2\varkappa^2\omega^2 - \alpha_2 p - \alpha_4) = 0\end{gathered} \tag{3.6}$$

Корнем второго уравнения является $\omega = 0$, но при этом первое уравнение не имеет вещественных корней. Приравнивая нулю второй сомножитель, нетрудно разрешить систему относительно p, ω. Если $\eta \neq 0$, то имеем дело с вязкоупругим стержнем. При $\eta \to 0$ второе уравнение системы (3.5) не совпадает со вторым уравнением (3.6), хотя первые уравнения совпадают. Именно это обстоятельство обусловливает различие между критическими и псевдокритическими параметрами. Выразив $\varkappa^2\omega^2$ из второго уравнения (3.5) и подставляя в первое, получаем $d_0 p^2 + d_1 Rp - \alpha_3(R^2 + I^2) = 0$, где d_0, d_1 выражаются через α_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Отсюда находим

$$q = [\sqrt{d_1^2 + 4\alpha_3 d_0(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)} - d_1]/2d_0 \tag{3.7}$$

Здесь $\operatorname{tg}\varphi = I/R$ – тангенс угла φ механических потерь, $q = p/R$ – безразмерный параметр, характеризующий отношение критической силы к динамическому [4] модулю (а не модулю упругости E). Из (3.7) следует, что динамический параметр однозначно определяется тангенсом угла φ механических потерь. При возрастании механических потерь критическое значение параметра q также растет.

Критическое значение частоты находим путем совместного решения (3.7) со вторым уравнением системы (3.5). Получаем уравнение, которое вполне доступно для исследования

$$\varkappa^2\omega_1^2=\alpha_1[\sqrt{d_1^2+4\alpha_3 d_0(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}-d_1]/2\alpha_4 d_0, \qquad \omega_1=\omega^2/R$$

4. Примеры численных расчетов. Из системы (3.6) при $\eta=0$ находим псевдокритические параметры $p_n^*=21.6$, $\varkappa\omega_n^*=10.3$. Сравнивая это с вычислениями из [2], отмечаем вполне удовлетворительное согласование результатов.

Проиллюстрируем методику расчета критических параметров для типичных операторов вязкоупругости с дискретными и непрерывными спектрами.

Для материала Кельвина – Фойгта имеем

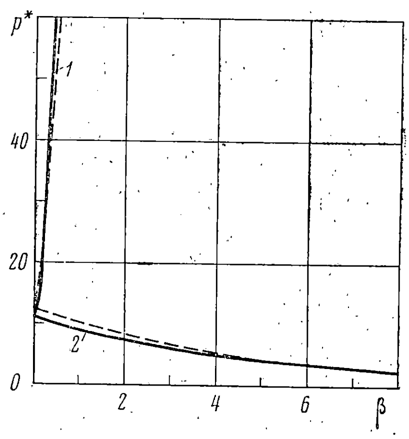
$$\Theta^2(\eta,\sigma)=1+\eta\sigma=1+i\eta\omega=1+i\beta\Omega, \qquad \beta=\eta/\varkappa, \qquad \Omega=\varkappa\omega$$

Решая систему относительно p, Ω, находим критические параметры в зависимости от β

$$p^*=-(c_1+c_2\beta^2)\pm\sqrt{(c_1+c_2\beta^2)^2-(c_3+c_4\beta^2)}, \qquad \Omega^*=\sqrt{(\alpha_1 p^*+2\alpha_3)/\alpha_4} \tag{4.1}$$

где $c_1=17.695$, $c_2=34.422$, $c_3=-583.542$, $c_4=-15574.86$.

На фигуре (кривая *1*) приведены графики $p^*(\beta)$, рассчитанные по уравнению (1.7) (сплошная линия) и по формуле (4.1) (пунктирная линия). Из сопоставления графиков видно, что расчет по методу Галеркина даёт завышенный результат (не более 12%) при $\beta\in(0,\ 0.25)$ и заниженный при $\beta>0.26$, с увеличением β погрешность возрастает (так, например, если $\beta=0.40$, то погрешность составляет 15.2%).



Пример расчета с непрерывными вязкоупругими спектрами получим, приняв в качестве ядра интегрального оператора ползучести ядро Абеля [4]

$$K(t-\tau)=\eta(t-\tau)^{\nu-1} \qquad (0<\nu<1) \tag{4.2}$$

При этом находим $\theta^2(\eta,\Omega)=R(\eta,\Omega)+iI(\eta,\Omega)$, где соответственно $R(\eta,\Omega)=R_1/(R_1^2+I_1^2)$, $I(\eta,\Omega)=-I_1/(R_1^2+I_1^2)$, $R_1=1+\beta\Omega^{-\nu}\cos\bar{\pi}\nu/2$, $I_1=\beta\Omega^{-\nu}\sin\bar{\pi}\nu/2$, $\beta=\eta\varkappa^{-\nu}$, $\Omega=\varkappa\omega$; R_1, I_1 определяются ядром ползучести (4.2).

На фигуре (кривая *2*) изображены графики $p^*(\beta)$, рассчитанные по приближенным уравнениям (3.5) (пунктирная линия) и по уравнению (1.7) (сплошная линия) в зависимости от параметра β. Для этой модели расчет по методу Галеркина дает завышенный результат при любых β. Максимальная погрешность (около 12%) имеет место при $\beta\to0$. При возрастании β погрешность уменьшается. Например, при $\beta=10$ она составляет 1.5%. Отметим, что при $\beta\to\infty$ критические параметры p^*, $\omega^*\to0$.

Рассмотренные примеры показывают, что пределы $\lim\limits_{\beta\to0}p^*(\beta)=10.94$, $\lim\limits_{\beta\to0}\omega^*(\beta)=5.4$ не зависят от вида оператора вязкоупругости.

Ростовский Государственный университет

Поступила 24 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bolotin V. V., Zhinzher N. I.* Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forcs. Internat. J. Solids and Struct., 1969, vol. 5, No. 9.
2. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
3. *Жинжер Н. И.* Об устойчивости неконсервативных упругих систем при наличии трения. Изв. вузов. Машиностроение, 1968, № 4.
4. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
5. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М.– Л., Гостехиздат, 1950.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.