

Зависимости (7) и (8) выражают принцип двойственности между статистическими и геометрическими уравнениями деформируемых систем, заключающийся в том, что матрицы коэффициентов этих уравнений (уравнений (7) и (8)) взаимно транспонированные.

Из уравнений (7) возьмем первые n , отбросив $j=n+1, n+2, \dots, m$, и решим их относительно перемещений u_i :

$$u_i = \sum_{j=1}^{n-1} b_{ji} \lambda_j + b_{ni} \lambda_n \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

где b_{ji} — коэффициенты матрицы, обратной матрице коэффициентов a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$). Последний столбец с множителем λ_n выделен из-под знака суммы.

Покажем, что коэффициенты b_{ij} ($j, i=1, 2, \dots, n$) и коэффициенты β_{ij} матрицы, обратной матрице коэффициентов α_{ji} ($j, i=1, 2, \dots, n$), взаимно транспонированные, т. е. что

$$b_{ji} = \beta_{ji} \quad (10)$$

Действительно, матрица коэффициентов уравнений (1) α_{ji} ($j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, n$) совпадает с матрицей коэффициентов уравнений (8) a_{ji} ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$). Урезанные же квадратные матрицы коэффициентов α_{ij} и a_{ji} ($i, j=1, 2, \dots, n$) уравнений (1) и (7) взаимно транспонированы. Транспонированными будут также и обратные матрицы коэффициентов β_{ij} и b_{ji} , что и доказывает равенство (10).

Возьмем теперь вектор перемещений $u_i^{(n)}$ ($i=1, 2, \dots, n$), возникающих вследствие деформаций n -го элемента λ_n , при равенстве нулю деформаций λ_j ($j=1, 2, \dots, n-1$) элементов, не достигших предела текучести. На основании (9) имеем $u_i^{(n)} = b_{ni} \lambda_n$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Сопоставив это выражение с уравнением (5), найдем с учетом (10), что вектор перемещений $u_i^{(n)}$ ($i=1, 2, \dots, n$) нормален гиперплоскости

$$\sum_{i=1}^n b_{ni} \lambda_i + C_n = 0$$

соответствующей гиперплоскости (5) в координатах P_i ($i=1, 2, \dots, n$).

Таким образом, постулат ассоциированности деформаций с условиями текучести для дискретных жесткопластических систем можно считать доказанным.

УДК 539.3:534.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

А. П. МАЛЫШЕВ, В. И. ПАНИЧКИН

(Москва)

Рассматриваются одномерные волновые процессы в оболочках вращения, возникающие при действии быстроизменяющихся нагрузок. Когда время изменения нагрузки соизмеримо со временем, за которое фронт возмущения пробегает характерный размер оболочки, переходные процессы носят существенно нестационарный характер. Исследование подобных задач аналитическими методами весьма сложно и возможно только в отдельных простейших случаях, например [1-3]. В настоящее время при численном исследовании переходных процессов в оболочках используются различные модификации сеточных методов [4], метод характеристик [5] и так называемый «прямой анализ» [6]. Решения, получаемые сеточными методами, плохо сходятся либо неустойчивы в областях резкого изменения напряжений и деформаций. Метод характеристик для нелинейных задач трудоёмок при численной реализации и требует больших затрат машинного времени. Использование прямого анализа для нелинейных задач представляется также затруднительным.

В данной работе для исследования переходных процессов в оболочках используется метод С. К. Годунова решения систем гиперболических уравнений, который

получил широкое развитие при расчете нестационарных процессов гидрогазодинамики [7, 8]. Движение оболочки описывается уравнениями типа Тимошенко с учетом геометрической нелинейности [9].

Пусть t — время, s — координата вдоль образующей оболочки, z_i — смещение, U_i — скорость, q_i — величина нагрузки ($i=1, 2$ соответствуют меридианальному и тангенциальному направлениям); T_{11} , M_{11} — усилие и изгибающий момент в направлении образующей; T_{22} , M_{22} — те же величины в окружном направлении; T_{12} — перерезывающее усилие; y_3 — угол поворота нормали; U_3 — угловая скорость; ρ , E , μ — плотность, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала; $k_s^2=0.86$ — коэффициент сдвига; l , h — длина вдоль образующей и толщина оболочки; r — радиус вращения, R_1 и R_2 — радиусы кривизны срединной поверхности; $(\dots)_0$ — величины, соответствующие какому-либо характерному сечению $s=s_0$

$$c_1 = E^{1/2}[(1-\mu^2)\rho]^{-1/2}, \quad c_2 = k_s E^{1/2}[2(1+\mu)\rho]^{-1/2}, \quad \alpha = c_2 c_1^{-1}$$

Если ввести безразмерные величины

$$\begin{aligned} x &= sr_0^{-1}, & \tau &= c_1 t r_0^{-1}, & H &= h h_0^{-1}, & b &= r r_0^{-1}, & k_1 &= r_0 R_1^{-1}, & k_2 &= r_0 R_2^{-1} \\ \gamma^2 &= 12 r_0^2 h_0^{-2}, & \lambda &= l r_0^{-1}, & y_i &= z_i r_0^{-1}, & V_i &= U_i c_1^{-1} \\ F_i &= q_i (1-\mu^2) r_0 (E h_0)^{-1}, & N_{ii} &= T_{ii} (E h_0)^{-1} (1-\mu^2) \\ G_{ii} &= 12 M_{ii} (1-\mu^2) r_0 E^{-1} h_0^{-3}, & N_{12} &= T_{12} (E h_0)^{-1} (1-\mu^2), & V_3 &= U_3 c_1^{-1} r_0 \end{aligned}$$

то волновой процесс в оболочке будет описываться следующими уравнениями и соотношениями:

законами сохранения количества движения

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} H V_1 dx + N_{11} d\tau &= \iint_{\Sigma} [-F_1 + B(N_{22} - N_{11})] dx d\tau \\ \oint_{\Gamma} H V_2 dx + (N_{12} + N_{11} y_2') d\tau &= \iint_{\Sigma} [-F_2 + k_1 N_{11} + k_2 N_{22} - B(N_{12} + N_{11} y_2')] dx d\tau \\ \oint_{\Gamma} H^3 V_3 dx + G_{11} d\tau &= \iint_{\Sigma} [-\gamma^2 N_{12} + B(G_{22} - G_{11})] dx d\tau \end{aligned} \quad (1)$$

где Γ — произвольная замкнутая кривая, ограничивающая в плоскости переменных x , τ площадь Σ , $B=b^{-1}b'$;

уравнениями неразрывности перемещений

$$\oint_{\Gamma} dy_i = \oint_{\Gamma} y_i' dx + V_i d\tau = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (2)$$

соотношениями между усилиями и перемещениями

$$\begin{aligned} N_{11} &= H(\varepsilon_{11} + \mu \varepsilon_{22}), & N_{22} &= H(\varepsilon_{22} + \mu \varepsilon_{11}), & N_{12} &= \alpha^2 H \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{11} &= y_1' + y_2 k_1 + 2^{-1} (y_2')^2, & \varepsilon_{22} &= y_2 k_2 + y_1 B, & \varepsilon_{12} &= y_2' - y_3 \\ G_{11} &= H^3 (\kappa_1 + \mu \kappa_2), & G_{22} &= H^3 (\kappa_2 + \mu \kappa_1), & \kappa_1 &= y_3', & \kappa_2 &= B y_3, \\ (\dots)' &= \partial(\dots)/\partial x, & (\dots)^* &= \partial(\dots)/\partial \tau \end{aligned} \quad (3)$$

В момент времени $\tau=0$ перемещения и скорости оболочки считаются известными

$$y_i = y_i^*, \quad V_i = V_i^* \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

На краях оболочки $x=0$, $x=\lambda$ при $\tau \geq 0$ могут быть заданы следующие условия:

$$N_{11} = N_1^\circ(\tau), \quad N_{12} + N_{11} y_2' = N_2^\circ(\tau), \quad G_{11} = N_3^\circ(\tau) \quad \text{либо} \quad V_i = V_i^\circ(\tau) \quad (i=1, 2, 3) \quad (5)$$

Здесь N_i° , V_i° — заданные краевые воздействия.

Интервал изменения координаты x разбивается на m отрезков длиной Δx . Отрезку, ограниченному точками $x_n = n\Delta x$ и $x_{n+1} = (n+1)\Delta x$, присваивается номер $n+1/2$. Средние в пределах отрезка $n+1/2$ значения усилий, скоростей и т. д. обозначаются при $\tau = \tau_1$: $(\dots)_{n+1/2}$, при $\tau = \tau_1 + \Delta\tau$: $(\dots)_{n+1/2}$. Средние в пределах промежутка времени $\Delta\tau$ значения усилий, скоростей и т. д. в точке $x = x_n$ обозначаются: $(\dots)_n$. В качестве контура Γ выбирается прямоугольник со сторонами Δx и $\Delta\tau$. Из уравнений (1),

(2) после интегрирования по контуру получаются расчетные формулы, позволяющие найти значения V_i и y_i' ($i=1, 2, 3$) на временном слое $\tau_1 + \Delta\tau$, например:

$$\begin{aligned} (V_1)^{n+1/2} &= (V_1)_{n+1/2} + \{[(N_{11})_{n+1} - (N_{11})_n] (\Delta x)^{-1} + (F_1)_{n+1/2} - \\ &\quad - B_{n+1/2} (N_{22} - N_{11})_{n+1/2}\} \Delta\tau (H_{n+1/2})^{-1} \\ (y_1')^{n+1/2} &= (y_1')_{n+1/2} + [(V_1)_{n+1} - (V_1)_n] \Delta\tau (\Delta x)^{-1} \end{aligned}$$

Перемещения находятся интегрированием скоростей, а силовые факторы определяются по формулам (3). Для нахождения величин с целочисленными индексами, в том числе и на краях оболочки, применяются соотношения на характеристиках системы уравнений (1), (3). В данной разностной схеме эти соотношения используются в линейном приближении и в конечно-разностной форме имеют следующий вид:

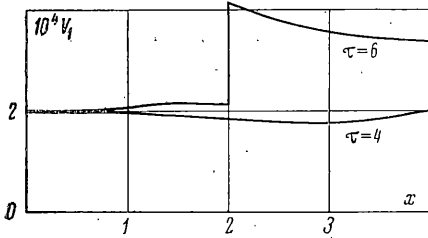
$$\begin{aligned} (N_{11} \pm H V_1)_n &= (N_{11} \pm H V_1)_{n \pm 1/2} + \Phi_{n \pm 1/2} \Delta\tau^2 - 1 \\ \Phi_{n \pm 1/2} &= [\pm F_1 \mp B (N_{22} - N_{11}) + H (k_1 + \mu k_2) V_2 + \mu H B V_1]_{n \pm 1/2}, \dots \end{aligned}$$

Волновые процессы в цилиндрической оболочке постоянной толщины ($r_0 = \text{const}$) при заданном законе движения левого торца.

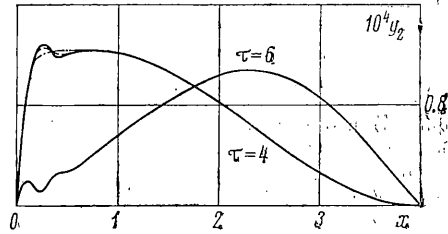
Граничные условия

$$x=0, \quad V_1^\circ = 2 \cdot 10^{-4} \eta(\tau), \quad V_2^\circ = N_3^\circ = 0; \quad x=4, \quad V_2^\circ = N_1^\circ = N_3^\circ = 0$$

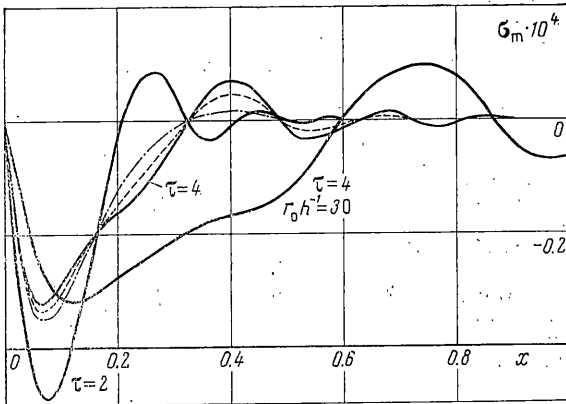
Здесь $\eta(\tau)$ — функция Хевисайда. До приложения возмущения оболочка находилась в состоянии покоя. Результаты расчетов для $r_0 h^{-1} = 100$ приведены на фиг. 1—3.



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

где $\sigma_m = G_{11} h (2R)^{-1}$ — безразмерное максимальное изгибающее напряжение в меридианальном направлении. Сплошной линией показаны решения при $\Delta\tau = 0.005$, штриховой — $\Delta\tau = 0.01$, штрихпунктирной — $\Delta\tau = 0.02$.

Величина разрыва на фронте волны продольной скорости V_1 (фиг. 1) остается постоянной. За фронтом волны продольной скорости наблюдается дисперсия, которая обусловлена взаимным влиянием V_1 и V_2 . При увеличении $r_0 h^{-1}$ максимальные значения σ_m (фиг. 2) остаются практически постоянными, а область краевого эффекта сужается, приближаясь к возмущаемому торцу. Кроме того, с увеличением $r_0 h^{-1}$ колебания σ_m затухают значительно быстрее. Полученные результаты демонстрируют разделение напряженного состояния оболочки при переходном процессе на безмоментное состояние и краевой эффект. Волновой профиль поперечных перемещений (фиг. 3)

не имеет разрыва на фронте волны. Колебания y_2 , которые наблюдаются в окрестности возмущаемого торца, вызваны влиянием перерезывающей силы и уменьшаются с увеличением $r_0 h^{-1}$.

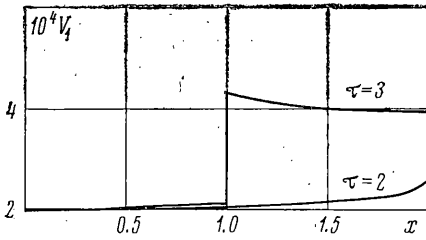
Волновые процессы в конической оболочке постоянной толщины.

Граничные условия

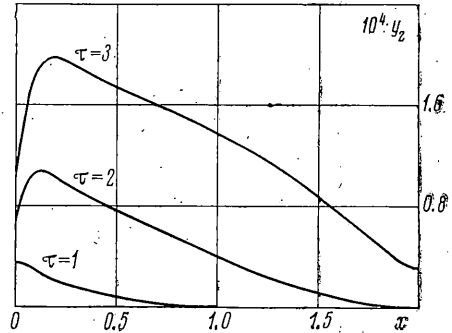
$$x=0, \quad r=r_0, \quad V_1^\circ=2 \cdot 10^{-4} \eta(\tau) \cos \varphi, \quad V_2^\circ=2 \cdot 10^{-4} \eta(\tau) \sin \varphi, \quad N_3^\circ=0$$

$$x=2, \quad r=r_0(1-2 \sin \varphi), \quad N_1^\circ=N_2^\circ=N_3^\circ=0$$

Здесь r_0 — радиус большого торца конуса, $\varphi=10^\circ$ — половина угла конусности. Результаты расчетов приведены на фиг. 4, 5 для различных τ при $r_0 h^{-1}=100$. С увеличением времени наблюдается формирование всплеска поперечных перемещений y_2



Фиг. 4



Фиг. 5

(фиг. 4) в окрестности возмущаемого торца. Этот всплеск объясняется, как и в предыдущей задаче, крайним эффектом. По мере распространения волны продольной скорости в направлении меньшего торца (фиг. 5) разрыв на ее фронте возрастает, что указывает на динамическую концентрацию напряжений в конической оболочке.

Поступила 6 11 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bercowitz H. M.* Longitudinal impact of a semi-infinity elastic cylindrical shell. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 3.
2. *Мальшев А. П.* Волновые процессы в упругой тонкостенной цилиндрической оболочке при внезапном приложении силы к ее торцу. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 2.
3. *Forrestal M. J., Sliter G. E., Sagartz M. J.* Stresses emanating from the supports of a cylindrical shell produced by a lateral pressure pulse. J. Appl. Mech. Ser. E, 1972, vol. 39, No. 1.
4. *Низул У. К., Энгельбрект Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел. Таллин, Ин-т кибернетики АН ЭССР, 1972.
5. *Лакс А. Я., Низул У. К.* Алгоритм метода характеристик для анализа нелинейных одномерных волновых процессов деформации конических и цилиндрических оболочек. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
6. *Counts J., Bennett J. G.* Axial wave propagation in membrane shells of revolution. Internat. J. Numer. Meth. Engng, 1971, vol. 3, No. 2.
7. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47 (89), вып. 3.
8. *Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П.* Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, № 6.
9. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., «Наука», 1972.