Введем метрические тензор (первую меру деформации) $G=AA^*=G^*$, ковариантные координаты которого в сопутствующей системе имеют вид

$$G_{ij}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}=G_{ji}$$

Контравариантные координаты G^{ij} образуют матрицу, обратную матрице ковариантных координат, т. е.

$$(G^{ij})=(G_{ij})^{-1} \qquad (11)$$

Пользуясь символами Кристоффеля второго рода, можно все координаты связности выразить через ко- и контравариантные компоненты метрического тензора G

$$\Gamma_{ij}{}^{n}=\frac{1}{2}G^{nl}\left(\frac{\partial G_{li}}{\partial q^j}+\frac{\partial G_{lj}}{\partial q^i}-\frac{\partial G_{ij}}{\partial q^l}\right). \qquad (12)$$

Таким образом, исходя из первой меры деформации, можно по (12) с учетом (11) построить коэффициенты связности $\Gamma_{ij}{}^{n}$, а, следовательно, в силу (10) воспроизвести тензоры Γ_i. По последним с помощью формулы (9) строится функция $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$, а, следовательно, и поле вектора перемещения.

Все построение производится с точностью до постоянного вектора $\mathbf{r}_0$ и постоянного аффинора A_0.

Заметим, что в силу (5), (7) и (12) величины G_{ij} должны удовлетворять дополнительным дифференциальным условиям (соотношениям совместности деформаций), которые гарантируют соблюдение интегрируемости при получении формулы (9).

Если тензоры Γ_i коммутируют со своими интегралами, то формула (9) приобретает хорошо обозримый вид

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\int\limits_0^{q_3}\left(\exp\int\limits_0^{q_3}\Gamma_{3(21)}\,dq_3\right)A_0\mathbf{e}_3\,dq_3+\int\limits_0^{q_2}\left[\exp\left(\int\limits_0^{q_2}\Gamma_{2(1)}\,dq_2+\int\limits_0^{q_3}\Gamma_{3(12)}\,dq_3\right)\right]A_0\mathbf{e}_2\,dy_2+$$

$$+\int\limits_0^{q_1}\left[\exp\left(\int\limits_0^{q_1}\Gamma_{q_1}\,dq_1+\int\limits_0^{q_2}\Gamma_{2(1)}\,dq_2+\int\limits_0^{q_3}\Gamma_{3(2)}\,dq_3\right)\right]A_0\mathbf{e}_1\,dq_1$$

В заключение отметим, что для случая малых деформаций из полученных результатов приходим к формуле Е. Чезаро.

Поступила 22 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.

УДК 539.214;539.374

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АССОЦИИРОВАННОГО ЗАКОНА ТЕКУЧЕСТИ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Р. РЖАНИЦЫН

(Москва)

Возьмем систему, составленную из m жесткопластических элементов. Число параметров, определяющих деформированное состояние системы, т. е. число ее степеней свободы, обозначим через n, а сами параметры (перемещения) – через u_i $(i=1, 2,\ldots, n)$. Для возможности деформирования системы требуется, чтобы усилия в $m-n+1$ элементах достигли предельного значения. Обозначим усилия в элементах через $N_j (j=1, 2,\ldots, m)$, а предельные значения этих усилий через N_j^T. Деформацию элементов обозначим через λ_j $(j=1, 2,\ldots, m)$.

Рассмотрим схему разрушения системы, при которой предельного значения достигли усилия в элементах с индексами n, $n+1$, $n+2,\ldots, m$. Составим условия предельного равновесия для этого состояния системы

$$\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{ji}N_j+\sum_{j=n}^{m}\alpha_{ji}N_j^T+P_i=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

Здесь α_{ji} – коэффициенты, определяемые конфигурацией и структурой системы, P_i – внешние силы, действующие по направлениям перемещения u_i.

Запишем уравнения (1) в виде

$$\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{ji}N_j+\alpha_{ni}N_n^T=Q_i;\qquad Q_i=-P_i-\sum_{j=n+1}^{m}\alpha_{ji}N_j^T \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

Решив систему уравнений (2), получим

$$N_n^T=\sum_{i=1}^{n}\beta_{in}Q_i \tag{3}$$

где β_{in} – элементы n-й строки матрицы, обратной матрице, составленной из коэффициентов α_{ji} (j, $i=1, 2,\ldots, n$).

Условие (3) можно также написать в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_{in}P_i+C_n=0,\qquad C_n=N_n^T+\sum_{i=1}^{n}\beta_{in}\sum_{j=n+1}^{m}\alpha_{ji}N_j^T \tag{4}$$

Если вместо усилия N_n^T систему уравнений (1) решить относительно усилия в другом элементе, достигшем текучести, например относительно усилия N_{n+k}^T, где $k=1, 2,\ldots, m-n$, то получим то же условие (4). На доказательстве этого положения здесь останавливаться не будем.

Неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_{in}P_i+C_n>0 \tag{5}$$

отсекает в координатах P_i ($i=1, 2,\ldots, n$) область недопустимых напряженных состояний и вместе с аналогичными неравенствами, получаемыми из рассмотрения иных систем разрушения, ограничивается область возможных напряженных состояний.

Рассмотрим теперь деформации λ_j элементов, достигших состояния текучести.

Заметим, что внешние силы P_i можно представить как частные производные от энергии W, затраченной при переходе системы из начального состояния в заданное деформированное состояние

$$P_i=\partial W/\partial u_i \qquad (i=1, 2,\ldots, n) \tag{6}$$

Внутрение усилия N_j в элементах системы соответственно будут равны

$$N_j=\partial W/\partial\lambda_j \qquad (i=1, 2,\ldots, m)$$

Пусть теперь деформации λ_j в предположении малости перемещений u_i выражаются линейными формулами

$$\lambda_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}u_i \qquad (j=1,2,\ldots,m) \tag{7}$$

Тогда вместо (6) можно будет написать

$$P_i=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial\lambda_j}\frac{\partial\lambda_j}{\partial u_i}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}N_j \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{8}$$

Зависимости (7) и (8) выражают принцип двойственности между статистическими и геометрическими уравнениями деформируемых систем, заключающийся в том, что матрицы коэффициентов этих уравнений (уравнений (7) и (8)) взаимнотранспонированные.

Из уравнений (7) возьмем первые n, отбросив $j=n+1$, $n+2,\ldots, m$, и решим их относительно перемещений u_i

$$u_i = \sum_{j=1}^{n-1} b_{ji}\lambda_j + b_{ni}\lambda_n \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{9}$$

где b_{ji} – коэффициенты матрицы, обратной матрице коэффициентов a_{ij} $(i, j=1, 2,\ldots$ $\ldots, n)$. Последний столбец с множителем λ_n выделен из-под знака суммы.

Покажем, что коэффициенты b_{ij} $(j, i=1, 2,\ldots, n)$ и коэффициенты β_{ij} матрицы, обратной матрице коэффициентов α_{ji} $(j, i=1, 2,\ldots, n)$, взаимнотраспонированные, т. е. что

$$b_{ji}=\beta_{ji} \tag{10}$$

Действительно, матрица коэффициентов уравнений (1) α_{ji} $(j=1, 2,\ldots, m;\ i=$ $=1, 2,\ldots, n)$ совпадает с матрицей коэффициентов уравнений (8) a_{ji} $(i=1, 2,\ldots, n;$ $j=1, 2,\ldots, m)$. Урезанные же квадратные матрицы коэффициентов α_{ij} и a_{ji} $(i, j=$ $=1, 2,\ldots, n)$ уравнений (1) и (7) взаимнотраспонированы. Транспонированными будут также и обратные матрицы коэффициентов β_{ij} и b_{ji}, что и доказывает равенство (10).

Возьмем теперь вектор перемещений $u_i^{(n)}$ $(i=1, 2,\ldots, n)$, возникающих вследствие деформаций n-го элемента λ_n, при равенстве нулю деформаций $\lambda_j(j=1, 2,\ldots$ $\ldots, n-1)$ элементов, не достигших предела текучести. На основании (9) имеем $u_i^{(n)}=b_{ni}\lambda_n$ $(i=1, 2,\ldots, n)$.

Сопоставив это выражение с уравнением (5), найдем с учетом (10), что вектор перемещений $u_i^{(n)}$ $(i=1, 2,\ldots, n)$ нормален гиперплоскости

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ni}\lambda_i + C_n = 0$$

соответствующей гиперплоскости (5) в координатах P_i $(i=1, 2,\ldots, n)$.

Таким образом, постулат ассоциированности деформаций с условиями текучести для дискретных жесткопластических систем можно считать доказанным.

УДК 539. 3: 534. I

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

А. П. МАЛЫШЕВ, В. И. ПАНИЧКИН

(Москва)

Рассматриваются одномерные волновые процессы в оболочках вращения, возникающие при действии быстроизменяющихся нагрузок. Когда время изменения нагрузки соизмеримо со временем, за которое фронт возмущения пробегает характерный размер оболочки, переходные процессы носят существенно нестационарный характер. Исследование подобных задач аналитическими методами весьма сложно и возможно только в отдельных простейших случаях, например [1–3]. В настоящее время при численном исследовании переходных процессов в оболочках используются различные модификации сеточных методов [4], метод характеристик [5] и так называемый «прямой анализ» [6]. Решения, получаемые сеточными методами, плохо сходятся либо неустойчивы в областях резкого изменения напряжений и деформаций. Метод характеристик для нелинейных задач трудоёмок при численной реализации и требует больших затрат машинного времени. Использование прямого анализа для нелинейных задач представляется также затруднительным.

В данной работе для исследования переходных процессов в оболочках используется метод С. К. Годунова решения систем гиперболических уравнений, который