ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
3. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Наукова думка», 1968.
4. *Howland R. C. J.* On the stresses in the neighbourhood of a circular hole in a strip under tension. Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 1930, vol. 229, p. 49–86.
5. *Jeffery G. B.* Plane stress and plane strain in bipolar coordinates. Philos. Trans. Roy. Soc. Lonlon. Ser. A, 1921, vol. 221, p. 265–293.

УДК 539.3

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ЧЕЗАРО

М. А. ЗАК

(*Ленинград*)

В случае малых деформаций вектор перемещения точек сплошной среды может быть построен по линейному тензору деформации посредством формулы Е. Чезаро [1]. Обобщим эту формулу на случай конечных деформаций.

Введем в тензор-аффинор $A=d\mathbf{r}/d\mathbf{r}_0$, осуществляющий локально-аффинное преобразование пространства из начального состояния $\{\mathbf{r}_0\}$ в текущее $\{\mathbf{r}\}$, и исследуем дифференциальные свойства этого тензора. Положим, что $A(\eta)$ – некоторая дифференцируемая функция переменной η. Производная $dA/d\eta$, как известно, образует тензор той же валентности. Считая тензор A неособым, представим его в виде

$$dA/d\eta=\Gamma_\eta A \tag{1}$$

где тензор Γ_η определяется единственным образом из соотношения

$$\Gamma_\eta=dA/d\eta A^{-1}$$

Покажем, что тензор A может быть построен по тензору Γ_η с точностью до постоянного тензора A_0.

Для этого запишем (1) в декартовых координатах

$$d(A)/d\eta=(\Gamma_\eta)(A) \tag{2}$$

где (A), (Γ_η) – матрицы декартовых координат соответствующих тензоров.

Матричное дифференциальное уравнение (2) относительно (A) имеет своим решением матрицант

$$(A)=M_\eta[(\Gamma_\eta)](A_0)=\left[(I)+\int\limits_0^\eta(\Gamma_\eta)\,d\eta+\int\limits_0^\eta(\Gamma_\eta)\,d\eta\int\limits_0^\eta(\Gamma_\eta)\,d\eta+\ldots\right](A_0)$$

равномерно сходящийся по η в любом конечном интервале изменения η, причем (I) – единичная матрица. Следовательно

$$A=M_\eta(\Gamma_\eta)A_0=\left(I+\int\limits_0^\eta\Gamma_\eta\,d\eta+\int\limits_0^\eta\Gamma_\eta\,d\eta\int\limits_0^\eta\Gamma_\eta\,d\eta+\ldots\right)A_0 \tag{3}$$

где I – единичный тензор.

Заметим, что если имеет место равенство

$$\Gamma_\eta\int\limits_0^\eta\Gamma_\eta\,d\eta=\left(\int\limits_0^\eta\Gamma_\eta\,d\eta\right)\Gamma_\eta$$

т. е. тензор коммутирует со своим интегралом, то матрицант может быть записан в виде экспоненты

$$M_\eta(\Gamma_\eta)=\exp\left[\int\limits_0^\eta\Gamma_\eta\,d\eta\right]$$

Исследуем теперь поле аффинора A в деформированном пространстве, считая, что он зависит от сопутствующих координат q_1, q_2, q_3, введенных в некотором начальном состоянии и преобразующихся в соответствии с преобразованием пространства. Аффинор A связывает базисы декартовых и сопутствующих координат формулой

$$\partial\mathbf{r}/\partial q_i=\boldsymbol{\tau}_i=A\mathbf{e}_i \quad (i=1,2,3) \tag{4}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки деформированного пространства; $\mathbf{e}_i$, $\boldsymbol{\tau}_i$ — орты декартового и сопутствующего базисов. Для возможности воспроизведения функции $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ по аффинору $A(q_1, q_2, q_3)$ необходимо, чтобы соотношения (4) были интегрируемы, т. е. чтобы смешанные производные от $\mathbf{r}$ по q_i и q_j не зависели от порядка дифференцирования.

Следовательно, обращаясь к (2), можно записать

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_i\,\partial q_j}A^{-1}=\Gamma_j\boldsymbol{\tau}_i=\Gamma_i\boldsymbol{\tau}_j=\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_j\,\partial q_i}A^{-1} \tag{5}$$

Соотношения (5), эквивалентные шести скалярным равенствам, фактически выражают условие геометрической совместности перемещений и обеспечивают возможность воспроизвести функцию $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ по аффинору $A(q_1, q_2, q_3)$ с точностью до постоянного вектора $\mathbf{r}(0, 0, 0)=\mathbf{r}_0$, а именно

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\int\limits_0^{q_3}A(0,0,q_3)\,dq_3\,\mathbf{e}_3+\int\limits_0^{q_2}A(0,q_2,q_3)\,dq_2\,\mathbf{e}_2+\int\limits_0^{q_1}A(q_1,q_2,q_3)\,dq_1\,\mathbf{e}_1 \tag{6}$$

Однако нетрудно видеть, что соотношениями (5) не исчерпываются ограничения, накладываемые на Γ_i. Действительно, нужно еще обеспечить независимость от порядка дифференцирования третьих смешанных производных от r по q_1, q_2, q_3, причем при выполнении (5) это сводится к независимости от порядка дифференцирования вторых смешанных производных от A по q_i, q_j. Таким образом, необходимо, чтобы выполнялись условия интегрируемости соотношений $\partial A/\partial q_i=\Gamma_i A$, которые принимают вид

$$\frac{\partial^2 A}{\partial q_i\,\partial q_j}A^{-1}=\frac{\partial\Gamma_i}{\partial q_j}+\Gamma_i\Gamma_j=\frac{\partial\Gamma_j}{\partial q_i}+\Gamma_j\Gamma_i=\frac{\partial^2 A}{\partial q_j\,\partial q_i}A^{-1} \tag{7}$$

Соотношения (7), эквивалентные восемнадцати скалярным равенствам, позволяют воспроизвести функцию $A(q_1, q_2, q_3)$ по функциям $\Gamma_i(q_1, q_2, q_3)$ с точностью до постоянного тензора $A_0=A(0, 0, 0)$. Учитывая (3), можно записать

$$A=M_{q_1}(\Gamma_{q_1})M_{q_2}(\Gamma_{2(1)})M_{q_3}(\Gamma_{3(21)})A_0 \tag{8}$$

$$\Gamma_{3(21)}=\Gamma_3(0,0,q_3),\quad \Gamma_{2(1)}=\Gamma_2(0,q_2,q_3),\quad \Gamma_{q_1}=\Gamma_{q_1}(q_1,q_2,q_3)$$

Объединяя (6) и (8), получим формулу для построения функции $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ по тензорам Γ_1, Γ_2, Γ_3

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\int\limits_0^{q_3}M_{q_3}(\Gamma_{3(21)})A_0\mathbf{e}_3\,dq_3+\int\limits_0^{q_2}M_{q_2}(\Gamma_{2(1)})M_{q_3}(\Gamma_{3(21)})A_0\mathbf{e}_2\,dq_2+$$

$$+\int\limits_0^{q_3}M_{q_1}(\Gamma_{q_1})M_{q_2}(\Gamma_{2(1)})M_{q_3}(\Gamma_{3(21)})A_0\mathbf{e}_1\,dq_1 \tag{9}$$

Выясним смысл тензоров Γ_i. С этой целью введем коэффициенты связаности [1] $\Gamma_{ij}{}^n$ в разложение

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_i\,\partial q_j}=\sum_{n=1}^{3}\Gamma_{ij}{}^n\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_n}=\sum_{n=1}^{3}\Gamma_{ij}{}^n\boldsymbol{\tau}_n$$

Учитывая (2) и (4), придем к формулам

$$\Gamma_{ij}{}^n=\boldsymbol{\tau}_n\cdot(\Gamma_i\boldsymbol{\tau}_j) \tag{10}$$

Таким образом, смешанные (один раз ковариантные и один раз контравариантные) сопутствующие координаты тензоров Γ_i являются коэффициентами связаности сопутствующей системы координат.

Введем метрические тензор (первую меру деформации) $G=AA^*=G^*$, ковариантные координаты которого в сопутствующей системе имеют вид

$$G_{ij}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}=G_{ji}$$

Контравариантные координаты G^{ij} образуют матрицу, обратную матрице ковариантных координат, т. е.

$$(G^{ij})=(G_{ij})^{-1} \tag{11}$$

Пользуясь символами Кристоффеля второго рода, можно все координаты связности выразить через ко- и контравариантные компоненты метрического тензора G

$$\Gamma_{ij}{}^{n}=\frac{1}{2}G^{nl}\left(\frac{\partial G_{li}}{\partial q^j}+\frac{\partial G_{lj}}{\partial q^i}-\frac{\partial G_{ij}}{\partial q^l}\right). \tag{12}$$

Таким образом, исходя из первой меры деформации, можно по (12) с учетом (11) построить коэффициенты связности $\Gamma_{ij}{}^{n}$, а, следовательно, в силу (10) воспроизвести тензоры Γ_i. По последним с помощью формулы (9) строится функция $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$, а, следовательно, и поле вектора перемещения.

Все построение производится с точностью до постоянного вектора $\mathbf{r}_0$ и постоянного аффинора A_0.

Заметим, что в силу (5), (7) и (12) величины G_{ij} должны удовлетворять дополнительным дифференциальным условиям (соотношениям совместности деформаций), которые гарантируют соблюдение интегрируемости при получении формулы (9).

Если тензоры Γ_i коммутируют со своими интегралами, то формула (9) приобретает хорошо обозримый вид

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\int_0^{q_3}\left(\exp\int_0^{q_3}\Gamma_{3(21)}\,dq_3\right)A_0\mathbf{e}_3\,dq_3+\int_0^{q_2}\left[\exp\left(\int_0^{q_2}\Gamma_{2(1)}\,dq_2+\int_0^{q_3}\Gamma_{3(12)}\,dq_3\right)\right]A_0\mathbf{e}_2\,dy_2+$$

$$+\int_0^{q_1}\left[\exp\left(\int_0^{q_1}\Gamma_{q_1}\,dq_1+\int_0^{q_2}\Gamma_{2(1)}\,dq_2+\int_0^{q_3}\Gamma_{3(2)}\,dq_3\right)\right]A_0\mathbf{e}_1\,dq_1$$

В заключение отметим, что для случая малых деформаций из полученных результатов приходим к формуле Е. Чезаро.

Поступила 22 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.

УДК 539.214;539.374

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АССОЦИИРОВАННОГО ЗАКОНА ТЕКУЧЕСТИ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Р. РЖАНИЦЫН

(Москва)

Возьмем систему, составленную из m жесткопластических элементов. Число параметров, определяющих деформированное состояние системы, т. е. число ее степеней свободы, обозначим через n, а сами параметры (перемещения) – через u_i ($i=1, 2,\dots, n$). Для возможности деформирования системы требуется, чтобы усилия в $m-n+1$ элементах достигли предельного значения. Обозначим усилия в элементах через $N_j (j=1, 2,\dots, m)$, а предельные значения этих усилий через N_j^T. Деформацию элементов обозначим через λ_j ($j=1, 2,\dots, m$).