

## О ЛОКАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОДОБИИ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ю. К. ГРЕШНОВ

(Николаев)

Для некоторых задач прикладной теории упругости не требуется определять напряженное состояние во всем теле — достаточно знать его в окрестностях некоторых точек. К ним можно отнести, например, задачи о концентрации напряжений, где интерес представляют зоны опасных точек.

Предлагаемый подход позволяет, используя принцип Сен-Венана, установить подобие напряженных состояний в локальных зонах двух упругих тел и по известному решению краевой задачи для одного тела судить о напряженном состоянии в зоне подобия другого тела.

**1. Постановка задачи.** Введем обозначения:  $V$  — объем упругой среды,  $S$  — граница объема,  $D$  — локальная зона внутри объема,  $v \in V$  — аффикс внутренней точки упругой среды,  $s \in S$  — аффикс граничной точки,  $d \in D$  — аффикс точки локальной зоны,  $\mathbf{n}(s)$  — вектор внешней нормали к границе,  $\mathbf{p}(s)$  — векторное поле внешней нагрузки,  $T(v)$  — тензорное поле напряжений упругой среды,  $T(s)$  — значение тензора напряжений на границе.

Пусть требуется определить напряженное состояние некоторой локальной зоны  $D$  (фиг. 1), находящейся внутри упругого тела  $V$  с границей  $S$ , на которой задано внешнее векторное поле нагрузки  $\mathbf{p}(s)$ . Предположим также, что для упругого тела  $V_2$  с границей  $S_2$  и внешней нагрузкой  $\mathbf{p}_2(s_2)$  известно решение задачи о его напряженном состоянии, и последнее описывается тензорным полем  $T_2(v_2)$ . Физико-механические константы тел одинаковы.

Выделим внутри  $V_2$  тело  $V_1$  с границей  $S_1$ , конгруэнтное телу  $V$ , и определим по граничному значению тензора  $T_2(s_1)$  векторное поле  $\mathbf{p}_1(s_1)$ , обладающее свойством, что вектор в каждой точке границы  $S_1$  определен на площадке, у которой общая нормаль  $\mathbf{n}(s_1)$  с границей  $\mathbf{p}_1(s_1) = \mathbf{n}(s_1) \cdot T_2(s_1)$ .

Введем теперь на границах  $S$  и  $S_1$  системы отсчета, такие, чтобы тела  $V$  и  $V_1$  были конгруэнтны одно другому вместе с системами отсчета. Точки, имеющие одинаковые координаты, назовем соответствующими. Далее, при рассмотрении точек и точечных подмножеств тел  $V$  и  $V_1$  всегда подразумевается свойство соответствия.

Отклонение векторных полей нагрузок на границах  $S$  и  $S_1$  характеризуется функцией  $\Delta p = |\mathbf{p}(s) - \mathbf{p}_1(s_1)|$ .

Если  $\Delta p = 0$ , то в силу теоремы о единственности решения первой краевой задачи теории упругости следует равенство тензоров  $T(v) = T_1(v_1)$ .

Однако условие нулевого отклонения нагрузок жесткое, и хотя всегда существует нагрузка  $\mathbf{p}_2(s_2)$ , реализующая это условие, ее практическое определение неэффективно.

Разобьем поверхности  $S$  и  $S_1$  на  $m$  частей и вычислим на каждой части главные векторы и главные моменты нагрузок

$$\mathbf{F} = \iint_{\Delta S} \mathbf{p}(s) dS, \quad \mathbf{M} = \iint_{\Delta S} [\mathbf{r}(s) \times \mathbf{p}(s)] dS$$

$$\mathbf{F}_1 = \iint_{\Delta S_1} \mathbf{p}_1(s_1) dS_1, \quad \mathbf{M}_1 = \iint_{\Delta S_1} [\mathbf{r}_1(s_1) \times \mathbf{p}_1(s_1)] dS_1$$

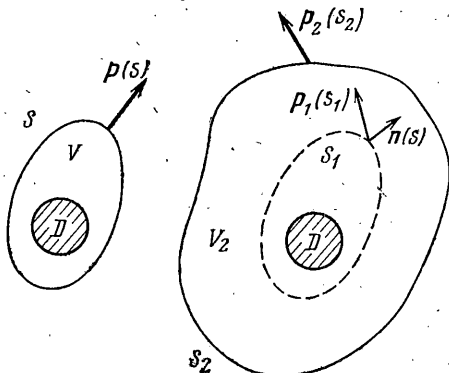
Здесь  $r = os$ ,  $r_1 = o_1s_1$ ,  $o$  и  $o_1$  — центры приведения. Если теперь будут выполнены условия  $0 \leq |\mathbf{F} - \mathbf{F}_1| \leq \varepsilon$ ,  $0 \leq |\mathbf{M} - \mathbf{M}_1| \leq \delta$ , где  $\varepsilon$  и  $\delta$  — некоторые положительные константы, то в силу принципа Сен-Венана [1] в локальных зонах  $D$  и  $D_1$ , достаточно удаленных от своих границ  $S$  и  $S_1$ , будет наблюдаться приближенное подобие тензорных силовых полей  $T(d) \approx T_1(d_1)$ . Точность этого равенства зависит от  $\varepsilon$ ,  $\delta$  и  $\Delta S$  и растет с их уменьшением.

Участок  $\Delta S$ , на котором выполнено условие  $\varepsilon = 0$ , в дальнейшем будем называть участком с нулевым отклонением по вектору, а с условием  $\delta = 0$  — участком с нулевым отклонением по моменту.

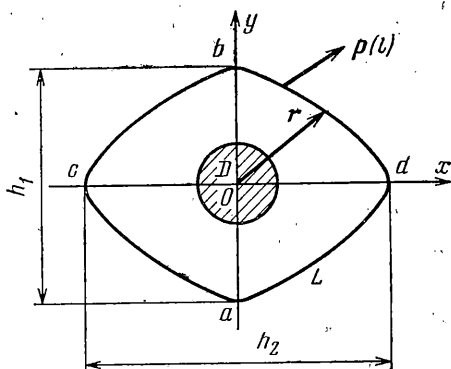
2. Реализация подхода в некоторых плоских задачах. Пусть на всюду выпуклой границе  $L$  плоской осесимметричной (вообще многосвязной) области задана нагрузка  $\mathbf{p}(l)$  (Фиг. 2). Пусть также нагрузка  $\mathbf{p}(l)$  обладает свойствами

$$\oint_L \mathbf{p}(l) dL = 0, \quad \oint_L [\mathbf{r} \times \mathbf{p}(l)] dL = 0, \quad \text{sign } \mathbf{p}(l) \cdot \mathbf{i} = \text{sign } x, \quad \text{sign } \mathbf{p}(l) \cdot \mathbf{j} = \text{sign } y$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки контура  $L$ ;  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  — координатные орты,  $l \in L$  — аффикс граничной точки.



Фиг. 1



Фиг. 2

Продолжим плоскую упругую среду до бесконечности и вычислим по компонентам нагрузки  $p_x$  и  $p_y$  следующие силовые факторы:

$$q_x = \frac{1}{h_1} \int_a^b p_x dL, \quad q_y = \frac{1}{h_2} \int_c^d p_y dL, \quad M(q_x) = y_0 \int_a^b p_x dL, \quad M(q_y) = x_0 \int_c^d p_y dL$$

Здесь  $h_1$  и  $h_2$  — диаметры контура  $L$ ,  $y_0$  — ордината равнодействующей нагрузки  $p_x$ ,  $x_0$  — абсцисса равнодействующей нагрузки  $p_y$ . Если наложить решение об изгибе полосы шириной  $h_1$  моментом  $M(p_x)$ , полосы шириной  $h_2$  моментом  $M(p_y)$  и двухосное растяжение бесконечной области нагрузками  $q_x$  и  $q_y$ , то в окрестности  $D$  начала координат напряженное состояние будет такое же, как у конечной области с границей  $L$  и нагрузкой  $\mathbf{p}(l)$ . Заметим, что дуги  $ab$  и  $cd$  являются дугами нулевого отклонения как по своим векторам, так и по моментам. В случае же силовой симметрии соответствующий момент равен нулю.

Рассмотрим несколько конкретных задач о концентрации напряжений в опасных точках пластин с отверстиями. Для расчета напряженного состояния бесконечных пластин с отверстиями существуют эффективные методы с применением комплексных потенциалов [2, 3]. Для пластин конечных размеров при точном решении возникают серьезные математические трудности.

1. Расчет узких полос с центральным отверстием.

Пусть требуется определить концентрацию напряжений в опасной точке  $I$  (Фиг. 3) круглого отверстия в узкой полосе.

Используя решение для бесконечной пластины с круглым отверстием, вычислим на контурах  $x = \pm a$  модули главных векторов от напряжений  $\tau(a, y)$  и  $\sigma_x(a, y)$

$$F_1 = \int_0^{\infty} \tau(a, y) dy, \quad F_2 = \int_{-R}^R \sigma_x(a, y) dy$$

В силу осесимметричности отверстия и нагрузки главные моменты от напряжений  $\tau(a, y)$  и  $\sigma_x(a, y)$  относительно начала координат равны нулю. Если теперь бесконечную пластину с круглым отверстием подвергнуть растяжению вдоль оси  $oy$  равномерно распределенной нагрузкой  $q_1 = q + F_1/a$  и сжатию вдоль оси  $ox$  нагрузкой  $q_2 = F_2/2R$ , то в зоне точки  $I$  возникает напряженное состояние, подобное напряженному состоянию соответствующей точки в полосе шириной  $2a$  и растягиваемой нагрузкой  $q$ . Приведем результат решения для опасной точки  $I$ . Здесь значение

коэффициента концентрации

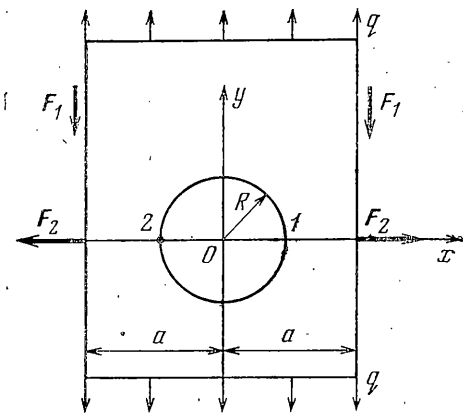
$$k_1 = \frac{\sigma_1}{q} = 3 \left( 1 + \frac{\lambda^2 + \lambda^4}{2} \right) + \lambda^2 \frac{17 + 6\lambda^2 + 5\lambda^4}{8 - \lambda^2 - 11\lambda^6}$$

где  $\lambda = R/a$ ,  $\sigma_1$  — контурное напряжение в точке 1.

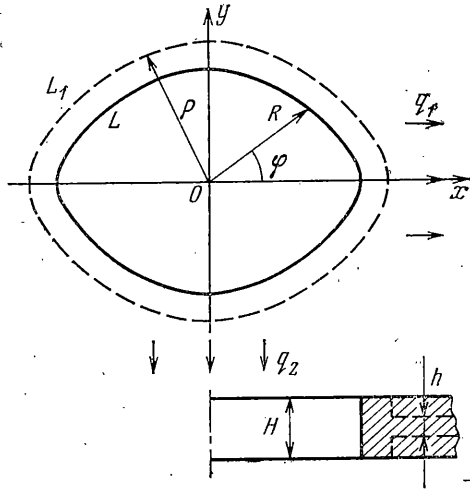
В табл. 1 полученные результаты (левая колонка) сравниваются с данными работы [4].

Аналогично решается задача для узких полос с другими одиночными или периодически расположенными осесимметричными отверстиями при растяжении, сдвиге или изгибе полосы в своей плоскости.

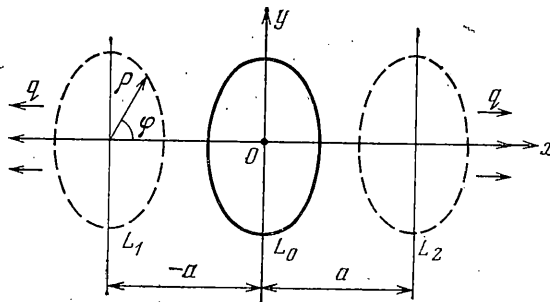
2. Напряженное состояние полуплоскости с отверстием.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Будем считать  $x=a$  границей полуплоскости (фиг. 3). Если теперь бесконечную пластину с круглым отверстием растянуть нагрузкой  $q_1 = q + F_1/2a$  вдоль оси  $oy$ , сжать нагрузкой  $q_2 = F_2/2R$  вдоль оси  $ox$  и полосу  $-a \leq x \leq a$  изогнуть моментом  $M = F_1 a$ , то в зоне отверстия напряженное состояние будет подобным напряженному состоянию полуплоскости с круглым отверстием, растягиваемой нагрузкой  $q$ .

Как следует из решения, коэффициенты концентрации в опасных точках 1 и 2 будут

$$k_{1,2} = 3 \left[ 1 + \frac{\lambda^2(17 + 6\lambda^2 + 5\lambda^4)}{6(8 - \lambda^2 - 11\lambda^6)} + \frac{\lambda^2 + \lambda^4}{4} (1 \pm 2\lambda) \right]$$

Сравнение результатов с данными работы [5] приведено в табл. 2.

3. Задача о подкреплении отверстий накладками из материала пластины.

Предположим, что известно решение задачи о напряженном состоянии пластины с осесимметричным отверстием, контур  $L$  которого описывается уравнением

$R=f(\varphi)$  в полярных координатах. Нагрузка — двухосное растяжение на бесконечности интенсивностями  $q_1$  и  $q_2$  (фиг. 4).

Опишем вокруг  $L$  контур  $L_1$  с уравнением  $\rho=f(\varphi)+f_0$ , где  $f_0=\text{const}$ . По известному тензору напряжений вычислим на  $L_1$

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau \cos(n, y), \quad p_{ny} = \tau \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y)$$

и главные векторы этих напряжений на толщине  $H-h$

$$F_x = \frac{H-h}{H} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_{nx} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi, \quad F_y = \frac{H-h}{H} \int_0^{\pi} p_{ny} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

Если теперь пластину с неподкрепленным отверстием нагрузить по оси  $ox$  нагрузкой  $q_1 - F_x/2\rho(\pi/2)$  и по оси  $oy$  нагрузкой  $q_2 - F_y/2\rho(0)$ , то в зоне отверстия напряженное состояние будет такое же, как у пластины толщиной  $h$  с отверстием, подкрепленным накладками высотой  $(H-h)/2$  и шириной  $f_0$ .

Таблица 1

$\lambda$	$h_1$		%	$\lambda$	$h_1$		%
0	3.00	3.00	0	0.3	3.36	3.36	0
0.1	3.03	3.03	0	0.4	3.67	3.74	-2.0
0.2	3.14	3.14	0	0.5	4.12	4.32	-5.0

Аналогично можно решать задачи о концентрации напряжений у отверстий с фасками или фигурной кромкой.

#### 4. Задача о взаимном влиянии отверстий.

Пусть известно решение задачи о напряженном состоянии бесконечной пластины с осесимметричным отверстием  $L_0$  при растяжении нагрузкой  $q$  (фиг. 5).

Таблица 2

$\lambda$	$h_1$		%	$h_2$		%
0	3.00	3.00	0	3.00	3.00	0
0.1	3.02	3.05	-1.0	3.01	3.01	0
0.2	3.09	3.11	-0.7	3.07	3.04	1.0
0.3	3.22	3.22	0	3.13	3.09	1.3
0.4	3.44	3.44	0	3.21	3.15	2.3
0.5	3.78	3.75	0.8	3.31	3.21	3.1
0.6	4.31	4.20	2.6	3.43	3.28	4.5
0.7	5.15	4.88	5.5	3.60	3.36	7.1

Проведем контур  $L_1$  и симметрично оси  $oy$  конгруэнтный ему контур  $L_2$ . По тензору напряжений на  $L_1$  определим модуль главного вектора

$$F_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\sigma_x \cos(n, x) + \tau \cos(n, y)] \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

Растяжение пластины с одним отверстием  $L_0$  нагрузкой  $q_1 = F_x/2\rho(\pi/2)$  дает в зоне отверстия напряженное состояние, такое же, как и в пластине с тремя отверстиями  $L_0, L_1, L_2$ , растягиваемой нагрузкой  $q$ .

Отметим, что, применяя описанные решения совместно, можно учитывать одновременно взаимное влияние отверстий, подкрепление и конечные размеры пластин.

Автор благодарит А. С. Христенко за обсуждение работы.

Поступила 21 I 1974

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Теория упругости. М., «Наука», 1970.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
3. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Наукова думка», 1968.
4. Howland R. C. J. On the stresses in the neighbourhood of a circular hole in a strip under tension. Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 1930, vol. 229, p. 49–86.
5. Jeffery G. B. Plane stress and plane strain in bipolar coordinates. Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 1921, vol. 221, p. 265–293.

УДК 539.3

## ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ЧЕЗАРО

М. А. ЗАХ

(Ленинград)

В случае малых деформаций вектор перемещения точек сплошной среды может быть построен по линейному тензору деформации посредством формулы Е. Чезаро [1]. Обобщим эту формулу на случай конечных деформаций.

Введем в тензор-аффинор  $A = dr/dr_0$ , осуществляющий локально-аффинное преобразование пространства из начального состояния  $\{r_0\}$  в текущее  $\{r\}$ , и исследуем дифференциальные свойства этого тензора. Положим, что  $A(\eta)$  — некоторая дифференцируемая функция переменной  $\eta$ . Производная  $dA/d\eta$ , как известно, образует тензор той же валентности. Считая тензор  $A$  неособым, представим его в виде

$$dA/d\eta = \Gamma_\eta A \quad (1)$$

где тензор  $\Gamma_\eta$  определяется единственным образом из соотношения

$$\Gamma_\eta = dA/d\eta A^{-1}$$

Покажем, что тензор  $A$  может быть построен по тензору  $\Gamma_\eta$  с точностью до постоянного тензора  $A_0$ .

Для этого запишем (1) в декартовых координатах

$$d(A)/d\eta = (\Gamma_\eta) (A) \quad (2)$$

где  $(A)$ ,  $(\Gamma_\eta)$  — матрицы декартовых координат соответствующих тензоров.

Матричное дифференциальное уравнение (2) относительно  $(A)$  имеет своим решением матрицант

$$(A) = M_\eta[(\Gamma_\eta)](A_0) = \left[ (I) + \int_0^\eta (\Gamma_\eta) d\eta + \int_0^\eta (\Gamma_\eta) d\eta \int_0^\eta (\Gamma_\eta) d\eta + \dots \right] (A_0)$$

равномерно сходящийся по  $\eta$  в любом конечном интервале изменения  $\eta$ , причем  $(I)$  — единичная матрица. Следовательно

$$A = M_\eta(\Gamma_\eta)A_0 = \left( I + \int_0^\eta \Gamma_\eta d\eta + \int_0^\eta \Gamma_\eta d\eta \int_0^\eta \Gamma_\eta d\eta + \dots \right) A_0 \quad (3)$$

где  $I$  — единичный тензор.

Заметим, что если имеет место равенство

$$\Gamma_\eta \int_0^\eta \Gamma_\eta d\eta = \left( \int_0^\eta \Gamma_\eta d\eta \right) \Gamma_\eta$$

т. е. тензор коммутирует со своим интегралом, то матрицант может быть записан в виде экспоненты

$$M_\eta(\Gamma_\eta) = \exp \left[ \int_0^\eta \Gamma_\eta d\eta \right]$$