МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1976

УДК 539.3

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

К. З. ГАЛИМОВ

(Казань)

Теория типа Тимошенко применяется к расчету оболочек, изготовленных из материалов с резко выраженной анизотропией, определению динамических характеристик при быстроизменяющихся во времени нагрузках и т. д. Общим вопросам нелинейной теории оболочек типа Тимошенко посвящены статьи [1-3]. Систематическое изложение вопросов устойчивости оболочек из композитных материалов дано в монографии [4]. Обзор работ по неклассическим теориям колебаний стержней, пластин и оболочек содержится в книге [5].

В данной работе при линейном распределении перемещений по толщине оболочки получены выражения компонентов тензора искривлений при конечных перемещениях с учетом поперечных сдвигов и удлинения нормального элемента. Установлена связь между этими компонентами и компонентами тензора искривлений поверхности классической теории оболочек. На основе результатов [6] выведены уравнения неразрывности деформации по сдвиговой модели типа Тимошенко. Получены уравнения равновесия (движения) по этой модели, и введен вектор обобщенного контурного усилия для формулировки краевых условий нелинейных задач.

1. Деформация тонкой оболочки по теории Кирхгофа — Лява. Отнесем недеформированную срединную поверхность σ оболочки к гауссовым координатам x^1, x^2 и введем обозначения: $\mathbf{r}(x^i)$ — радиус-вектор точки $M(x^i)$ поверхности; $\mathbf{r}_i=\partial\mathbf{r}/\partial x^i$ — координатные векторы в этой точке; $\mathbf{m}$ — единичный вектор нормали к σ; $\mathbf{m}_i=\partial\mathbf{m}/\partial x^i$ — производная этого вектора; $a_{ik}=\mathbf{r}_i\mathbf{r}_k$, $b_{ik}=-\mathbf{m}_i\mathbf{r}_k$ — коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности (латинские индексы принимают значения 1 и 2); c_{ik} — компоненты поверхностного дискриминантного тензора

$$c_{ik}=\mathbf{m}[\mathbf{r}_i\mathbf{r}_k],\quad c_{ii}=0,\quad c_{12}=-c_{21}=\sqrt{a},\quad a=\det(a_{ik})$$

Аналогичные обозначения примем для величин, относящихся к деформированной срединной поверхности σ_*, отмечая их звездочкой.

Радиус-вектор точки M_* равен $\mathbf{r}_*=\mathbf{r}+\mathbf{v}=\mathbf{r}+\mathbf{r}^iu_i+\mathbf{m}w$, где $\mathbf{v}$ — вектор перемещения точки M, а u_i — его ковариантные компоненты, w — прогиб. Векторы $\mathbf{r}_i^*$ и $\mathbf{m}_*$ выражаются через $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{m}$ по формулам

$$\mathbf{r}_i^*=\mathbf{r}_k(\delta_i^k+e_i^k)+\mathbf{m}\omega_i,\qquad \mathbf{m}_*=\sqrt{\frac{a}{a_*}}(\mathbf{m}E_3+\mathbf{r}^iE_i)\tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}e_i^k=\nabla_iu^k-b_i^kw,\qquad \omega_i=\nabla_iw+b_i^ku_k=\mathbf{m}\partial_i\mathbf{v}\\ e_{ik}=\nabla_iu_k-b_{ik}w=a_{nk}e_i^n=\mathbf{r}_k\partial_i\mathbf{v}\\ E_i=\omega_ke_i^k-\omega_i(1+e_k^k),\qquad E_3=(1-\omega_i\omega^i)^{1/2}\end{gathered}\tag{1.2}$$

∇_i — знак ковариантного дифференцирования в метрике a_{ik}.

Векторы взаимного базиса $\mathbf{r}^i$ поверхности σ и нормали $\mathbf{m}$ представим в форме разложений по векторам $\mathbf{r}_i^*$ и $\mathbf{m}_*$ поверхности σ_*

$$\mathbf{r}^i=\mathbf{r}_*^kA_k^i+\mathbf{m}_*A^i,\qquad \mathbf{m}=\mathbf{m}E_3^*+\mathbf{r}_k^*E_*^k$$

Умножив обе части этих равенств на $\mathbf{r}_j^*$ и $\mathbf{m}_*$ и воспользовавшись формулами (1.1), найдем выражения коэффициентов разложений

$$A_k^i=\delta_k^i+e_k^i,\quad A^i=\sqrt{\frac{a}{a_*}}E_i,\quad E_3^*=\sqrt{\frac{a}{a_*}}E_3,\quad E_i^*=\omega_i$$

Подставляя коэффициенты в правые части искомых равенств и полагая $a_*\approx a$, получим формулы разложений базисных векторов и вектора нормали

$$\mathbf{r}^i=\mathbf{r}_*^k(\delta_k^i+e_k^i)+m_*E^i,\quad \mathbf{m}=\mathbf{m}_*E_3+\mathbf{r}_*^i\omega_i \tag{1.3}$$

Пренебрегая удлинениями и сдвигом по сравнению с единицей, вектор $\mathbf{m}$ можно представить в виде

$$\mathbf{m}=\mathbf{m}_*E_3+\mathbf{r}_i^*\omega^i=\mathbf{m}_*E_3+\mathbf{r}_*^i\omega_i \tag{1.4}$$

Ковариантные компоненты тензора тангенциальных деформаций определяются по формулам

$$2\varepsilon_{ik}=e_{ik}+e_{ki}+e_{nk}e_i^n+\omega_i\omega_k \tag{1.5}$$

а компоненты тензора искривлений классической теории оболочек — по формулам

$$\varkappa_{ik}^\circ=b_{ik}-b_{ik}^*=-E_3\nabla_i\omega_k-E_n\nabla_ie_k^n-b_{ik}e_n^n+b_i^ne_{nk} \tag{1.6}$$

Уравнения неразрывности деформаций тонких оболочек имеют вид [6]

$$c^{in}c^{jk}(2\nabla_n\nabla_k\varepsilon_{ij}+\varkappa_{nk}^\circ\varkappa_{ij}^\circ-2b_{nk}\varkappa_{ij}^\circ-A_{ik}^sP_{s,\,jn})=2K\varepsilon_1 \tag{1.7}$$

$$c^{in}c^{jk}[\nabla_n\varkappa_{ik}^\circ-(b_{ns}-\varkappa_{ns}^\circ)A_{ik}^s]=0 \tag{1.8}$$

$$A_{ik}^s=a^{js}P_{j,\,ik},\quad P_{j,\,ik}=\nabla_i\varepsilon_{jk}+\nabla_k\varepsilon_{ij}-\nabla_j\varepsilon_{ik} \tag{1.9}$$

где A_{ik}^s — приращения символов Кристоффеля при деформации, K — гауссова кривизна недеформированной поверхности, $\varepsilon_1=a^{ik}\varepsilon_{ik}$.

По гипотезе Кирхгофа — Лява вектор конечных перемещений точки (x^i, z) оболочки равен $\mathbf{U}^z=\mathbf{v}+(\mathbf{m}_*-\mathbf{m})z$, а его компоненты в системе координат недеформированной оболочки равны $U_i^z=u_i+zE_i$, $W^z=w+(E_3-1)z$.

Нормальное перемещение W^z не изменяется по толщине оболочки при $E_3\approx1$. Это имеет место при слабом ($\omega_i\ll1$) и среднем ($\omega_i^{1/2}\ll1$) изгибах. При сильном изгибе ($\omega_i\approx1$) угол поворота $E_3\neq1$ и W^z зависит линейно от z.

2. Деформация тонкой оболочки с учетом поперечных сдвигов. Вектор полного перемещения $\mathbf{U}^z$ в точке (x^i, z) оболочки по сдвиговой модели типа Тимошенко изменяется линейно по толщине оболочки $\mathbf{U}^z=\mathbf{v}+z\boldsymbol{\gamma}$, где $\mathbf{v}$ — вектор перемещения точки срединной поверхности, $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор угла поворота нормального элемента.

По гипотезе Кирхгофа — Лява $\boldsymbol{\gamma}=m_*-m$. В недеформированной системе координат вектор $\boldsymbol{\gamma}$ будем задавать своими компонентами

$$\boldsymbol{\gamma}=\gamma^i\mathbf{r}_i+\gamma\mathbf{m}=\gamma_i\mathbf{r}^i+\gamma\mathbf{m}$$

а в деформированной системе координат — компонентами

$$\boldsymbol{\gamma}=\gamma_*^i\mathbf{r}_i^*+\gamma_*\mathbf{m}_*=\gamma_i^*\mathbf{r}_*^i+\gamma_*\mathbf{m}_*$$

Производную вектора $\boldsymbol{\gamma}$ можно представить в двух формах

$$\partial\boldsymbol{\gamma}/\partial x^i=\nabla_i\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{r}^k\Omega_{ik}+\mathbf{m}\Omega_i=\mathbf{r}_*^k\Omega_{ik}^*+\mathbf{m}_*\Omega_i^* \tag{2.1}$$

$$\Omega_{ik}=\mathbf{r}_k\nabla_i\boldsymbol{\gamma}=\nabla_i\gamma_k-b_{ik}\gamma,\quad \Omega_i=\nabla_i\gamma+b_i^k\gamma_k \tag{2.2}$$

$$\Omega_{ik}^*=\mathbf{r}_k^*\nabla_i\boldsymbol{\gamma}=\nabla_i^*\gamma_k-b_{ik}^*\gamma_*,\quad \Omega_i^*=\mathbf{m}_*\nabla_i\boldsymbol{\gamma}=\nabla_i\gamma_*+b_i^{*k}\gamma_k^*$$

Здесь ∇_i^* — знак ковариантного дифференцирования в метрике a_{ik}^*.

Компоненты деформации тонкой оболочки при больших перемещениях выражаются формулами

$$2\varepsilon_{ik}^z = \mathbf{r}_j Z_i^j \partial_k \mathbf{U}^z + \mathbf{r}_j Z_k^j \partial_i \mathbf{U}^z + \partial_i \mathbf{U}^z \partial_k \mathbf{U}^z = 2\varepsilon_{ik} + 2z\varkappa_{ik}, \qquad Z_i^j = \delta_i^j - zb_i^j \tag{2.3}$$

$$2\varepsilon_{i3} = \mathbf{r}_i^* (\mathbf{m} + \boldsymbol{\gamma}) = \omega_i + \gamma_i^* \tag{2.4}$$

$$2\varepsilon_3 = 2\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma} = 2\gamma + \gamma_i^* \gamma_*^i + \gamma_*^2 \tag{2.5}$$

ε_{ik} — компоненты тангенциальных деформаций (1.5); ε_{i3} — компоненты поперечных сдвигов; ε_3 — удлинение нормального элемента; $\varkappa_{ik}$ — симметричные компоненты тензора искривлений срединной поверхности

$$2\varkappa_{ik} = \Omega_{ik}^* + \Omega_{ki}^* - b_k^j e_{ij} - b_i^j e_{kj} \tag{2.6}$$

Члены, содержащие e_{ij} и e_{kj}, появляются в (2.6) благодаря учету изменения базисного вектора по толщине оболочки $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_j(\delta_i^j - zb_i^j)$. За несимметричные компоненты этого тензора примем выражения

$$\varkappa_{ik}' = \Omega_{ik}^* - b_i^j e_{kj} = \nabla_i^* \gamma_k^* - b_{ik}^* \gamma_* - b_i^j e_{kj} \tag{2.7}$$

Умножив (1.4) скалярно на вектор $\boldsymbol{\gamma}$, получим следующую зависимость между γ и γ_*:

$$\gamma = E_3 \gamma_* + \omega^i \gamma_i^* \tag{2.8}$$

Подставляя γ в правую часть соотношения (2.5) и исключая γ_i^*, согласно (2.4) найдем квадратное уравнение для определения γ_*

$$\gamma_*^2 + 2E_3\gamma_* - (2\varepsilon_3 - 4\varepsilon_{i3}\varepsilon^{i3} + \omega_i\omega^i) = 0$$

из которого с учетом формулы $E_3 = (1 - \omega_i\omega^i)^{1/2}$ получим

$$\gamma_* = -E_3 + (1 + 2\varepsilon)^{1/2} = 1 - E_3 + \varepsilon, \qquad \varepsilon = \varepsilon_3 - 2\varepsilon_{i3}\varepsilon^{i3} \tag{2.9}$$

В результате из равенства (2.8) следует

$$\gamma = E_3(1 + \varepsilon) - 1 + 2\varepsilon_{i3}\omega^i \tag{2.10}$$

Так как по гипотезе Кирхгофа — Лява $\varepsilon_{i3} = \varepsilon_3 = 0$, то из приведенных формул находим $\gamma = -\gamma_* = E_3 - 1$, следовательно, по этой гипотезе $\gamma = \gamma_* = 0$ лишь при $E_3 = 1$ (при слабом и среднем изгибах).

Контравариантные компоненты вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в системе координат поверхности σ получим, подставив $\mathbf{r}^i$ из формул (1.3) в скалярные произведения

$$\gamma^i = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{r}^i = \boldsymbol{\gamma}\{\mathbf{r}_*^k(\delta_k^i + e_k^i) + \mathbf{m}_* E^i\} = \gamma_*^k(\delta_k^i + e_k^i) + \gamma_* E^i$$

Пренебрегая удлинениями и сдвигом по сравнению с единицей, можно получить соотношения

$$\gamma_*^k = 2\varepsilon^{k3} - \omega^k, \qquad \gamma_* = 1 + \varepsilon - E_3, \qquad E_3 E^i = -(\delta_k^i + e_k^i)\omega^k$$

с учетом которых будем иметь

$$\gamma^i = 2\varepsilon^{k3}(\delta_k^i + e_k^i) + E^i(1 + \varepsilon) \tag{2.11}$$

Выразим компоненты тензора искривлений $\varkappa_{ik}$ через величины $\varkappa_{ik}^\circ$, вычисленных согласно формулам (1.6) по перемещениям сдвиговой модели.

Подставляя γ_* из (2.9) в выражение для несимметричных компонентов изгиба (2.7), получим

$$\varkappa_{ik}' = \nabla_i^* \gamma_k^* - b_{ik}^* (1 - E_3 + \varepsilon) - b_i^j e_{kj} \tag{2.12}$$

Чтобы выразить произведения $b_{ik}^*E_3$ через перемещения, продифференцируем ковариантно по x^i в метрике a_{ik}^* скалярные произведения $\mathbf{r}_k^*\mathbf{m}$. В результате будем иметь

$$\nabla_i^*(\mathbf{r}_k^*\mathbf{m})=\nabla_i^*\omega_k=\mathbf{m}\nabla_i^*\mathbf{r}_k^*+\mathbf{r}_k^*\nabla_i^*\mathbf{m}$$

Учитывая деривационные формулы Гаусса — Вейнгартена $\nabla_i^*\mathbf{r}_k^*=b_{ik}^*\mathbf{m}_*$, $\nabla_i^*\mathbf{m}=-b_i^j\mathbf{r}_j$ найдем $b_{ik}^*E_3=\nabla_i^*\omega_k+b_{ik}+b_i^je_{kj}$.

Подставляя правую часть этого равенства в (2.12) и воспользовавшись выражением для поперечных сдвигов (2.4), получим формулы для $\varkappa_{ik}'$

$$\varkappa_{ik}'=2\nabla_i^*\varepsilon_{k3}+b_{ik}-b_{ik}^*(1+\varepsilon),\quad b_{ik}^*=b_{ik}-\varkappa_{ik}^\circ \tag{2.13}$$

Здесь ковариантные производные сдвигов ε_{k3} в метриках a_{ik}^* и a_{ik} связаны соотношениями

$$\nabla_i^*\varepsilon_{k3}=\nabla_i\varepsilon_{k3}-A_{ik}^j\varepsilon_{j3} \tag{2.14}$$

где A_{ik}^j выражаются через тангенциальные деформации по формулам (1.9).

Пренебрегая удлинением нормального элемента и квадратом длины вектора поперечных сдвигов по сравнению с единицей, получим приближенные равенства $\varkappa_{ik}^\circ(1+\varepsilon)\approx\varkappa_{ik}^\circ$. С учетом этих равенств выражения изгибных деформаций (2.13) можно записать в виде

$$\varkappa_{ik}'=\varkappa_{ik}^\circ+2\nabla_i^*\varepsilon_{k3}-b_{ik}\varepsilon \tag{2.15}$$

Симметричные компоненты тензора искривлений равны полусумме

$$\varkappa_{ik}=(\varkappa_{ik}'+\varkappa_{ki}')/2=\varkappa_{ik}^\circ+\nabla_i^*\varepsilon_{k3}+\nabla_k^*\varepsilon_{i3}-b_{ik}\varepsilon \tag{2.16}$$

Эти формулы выражают связь между компонентами тензоров искривлений $\varkappa_{ik}$ и $\varkappa_{ik}^\circ$ нелинейной теории оболочек с учетом и без учета поперечных деформаций. Они позволяют получить из уравнений неразрывности деформаций для $\varkappa_{ik}^\circ$ соответствующие уравнения для $\varkappa_{ik}$.

Отбрасывая нелинейные члены, из (2.7) найдем компоненты изгибных деформаций линейной теории оболочек с учетом поперечных сдвигов $\varkappa_{ik}'=\nabla_i\gamma_k-b_{ik}\gamma-b_i^je_{kj}$. Полагая здесь $\gamma_i=-\omega_i$, $\gamma=0$, определим компоненты тензора искривлений для линейной теории оболочек Кирхгофа — Лява $\varkappa_{ik}^\circ=-\nabla_i\omega_k-b_i^je_{kj}$.

Компоненты деформации (2.3) определены при сохранении малых величин zb_k^i в выражениях базисных векторов оболочки $\rho_i=\mathbf{r}_jZ_i^j$. Благодаря этому в выражениях компонентов тензора искривлений (2.6) появляются слагаемые

$$b_k^je_{ij}+b_i^je_{kj} \tag{2.17}$$

которые необходимо сохранить при сильном изгибе ($e_{ik}\sim1$) и отбрасывать их в общем случае нельзя. Учет слагаемых, содержащих zb_k^i, позволяет исключить из выражений компонентов тензора искривлений (2.15) и (2.16) величины e_{ik}, зависящие явно от перемещений.

При выводе формул изгибных деформаций (2.15) и (2.16) проекция вектора поворота на нормаль $\mathbf{m}$ к недеформированной срединной поверхности γ принимается отличной от нуля. Однако в ряде работ величина γ принимается равной нулю. Тогда правая часть равенства (2.10). должна обращаться в нуль. В случае геометрически линейной теории это условие выполняется, так как, отбросив нелинейные члены в формуле (2.10), имеем $\gamma=\varepsilon_3$. Таким образом, если обжатие равно нулю, то по линейной теории $\gamma=0$. В случае среднего изгиба имеют место оценки

$$e_{ik}\sim\varepsilon_p,\quad \omega_i\sim\varepsilon_{i3}\sim\sqrt{\varepsilon_p},\quad \gamma=\varepsilon+2\varepsilon_{i3}\omega^i\sim\varepsilon_p\ll1 \tag{2.18}$$

где ε_p — наибольшее из тангенциальных деформаций. Соотношения (2.4) и (2.6) можно линеаризовать

$$2\varepsilon_{i3}=\omega_i+\gamma_i,\quad 2\varkappa_{ik}=\nabla_i\gamma_k+\nabla_k\gamma_i-b_k^ie_{ij}-b_i^je_{k} \tag{2.19}$$

а в формулах (1.5) можно пренебречь членами $e_{nk}e_i^n$.

Отметим, что предположение о равенстве нулю величины γ при конечных перемещениях не позволяет учесть сжатия волокна, нормального к срединной поверхности, и накладывает ограничение на величины поперечных сдвигов и углов поворота. Действительно, полагая $\gamma=0$ в формуле $2\varepsilon_3=2\gamma+\gamma_i\gamma^i+\gamma^2$, имеем

$$2\varepsilon_3=\gamma_i\gamma^i>0 \tag{2.20}$$

а из (2.10) с учетом (2.20) получим

$$\varepsilon_3=2\varepsilon_{i3}\varepsilon^{i3}-1+(1-2\varepsilon_{i3}\omega^i)E_3^{-1}>0 \tag{2.21}$$

Таким образом, предположение $\gamma=0$ в теории конечных перемещений не является корректным. В то же время предположение $\gamma\ll 1$ не является противоречивым и оно может быть использовано для упрощения основных зависимостей, при этом ограничения (2.20) и (2.21) будут отсутствовать.

3. Уравнение неразрывности деформации нелинейной теории тонких оболочек с учетом поперечных сдвигов. Для вывода этих уравнений подставим $\varkappa_{ik}{}^{\circ}$ из (2.16) в уравнения неразрывности классической теории оболочек (1.7) и (1.8); причем, ввиду малости деформации, положим в них $A_{ik}{}^{j}=a^{jn}P_{n,\,ik}$ и отбросим слагаемые $A_{ik}{}^{s}P_{s,\,jn}$.

Применяя формулы $c^{in}c^{jk}=a^{ij}a^{nk}-a^{nj}a^{ik}$, слагаемые, содержащиеся в (1.7), можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered}
c^{in}c^{jk}\nabla_n\nabla_k\varepsilon_{ij}=\Delta\varepsilon_1-\nabla^j\nabla^i\varepsilon_{ij}, \qquad c^{in}c^{jk}\varkappa_{nk}{}^{\circ}\varkappa_{ij}{}^{\circ}=2(\varkappa_1{}^1\varkappa_2{}^2-\varkappa_2{}^1\varkappa_1{}^2)+\\
+4(\varkappa_k{}^i\nabla_i\varepsilon^{k3}-\varkappa_1\nabla_i\varepsilon^{i3}+\nabla_i\varepsilon^{i3}\nabla_k\varepsilon^{k3})-(\nabla_i\varepsilon^{k3}+\nabla^k\varepsilon_{i3})(\nabla_k\varepsilon^{i3}+\nabla^i\varepsilon_{k3})+\\
+2B^{ik}(\varkappa_{ik}-\nabla_i{}^*\varepsilon_{k3}-\nabla_k{}^*\varepsilon_{i3})\\
c^{in}c^{jk}b_{nk}\varkappa_{ij}{}^{\circ}=B^{ik}(\varkappa_{ik}-\nabla_i{}^*\varepsilon_{k3}-\nabla_k{}^*\varepsilon_{i3})+2K\varepsilon \qquad (3.1)\\
\nabla^i=a^{ik}\nabla_k, \qquad \nabla_*{}^i=a^{ik}\nabla_k{}^*, \qquad \varepsilon_1=a^{ik}\varepsilon_{ik}, \qquad \varkappa_1=a^{ik}\varkappa_{ik}
\end{gathered}$$

где $\Delta=\nabla^k\nabla_k$ — оператор Лапласа в общих координатах; при выводе соотношений (3.1) использовались следующие формулы теории поверхностей:

$$\begin{gathered}
c^{in}c^{jk}b_{nk}=2Ha^{ij}-b^{ij}=B^{ij}, \qquad B^{ij}b_{ij}=2K\\
2H=b_i^i, \qquad K=b_1{}^1b_2{}^2-b_2{}^1b_1{}^2
\end{gathered}$$

Здесь H, K — средняя и гауссова кривизны недеформированной срединной поверхности.

Подставляя правые части равенств (3.1) в уравнение (1.7) и отбрасывая величины третьего порядка относительно компонентов деформаций, получим первое уравнение неразрывности деформации

$$\begin{gathered}
\Delta\varepsilon_1-\nabla_i\nabla_k\varepsilon^{ik}+\varkappa_1{}^1\varkappa_2{}^2-\varkappa_2{}^1\varkappa_1{}^2+2\nabla_i\varepsilon^{i3}\nabla_k\varepsilon^{k3}+2(\varkappa_k{}^i\nabla_i\varepsilon^{k3}-\varkappa_1\nabla_i\varepsilon^{i3})-\\
-B^{ik}(\varkappa_{ik}-\nabla_i{}^*\varepsilon_{k3}-\nabla_k{}^*\varepsilon_{i3})-{}^1/_2(\nabla_i\varepsilon^{k3}+\nabla^k\varepsilon_{i3})(\nabla_k\varepsilon^{i3}+\nabla^i\varepsilon_{k3})-\\
-2K(\varepsilon+{}^1/_2\varepsilon_1)=0 \qquad (3.2)
\end{gathered}$$

Подставляя $\varkappa_{ik}{}^{\circ}$ из (2.16) в (1.8) и учитывая уравнение Кодацци для недеформированной поверхности $c^{in}c^{jk}\nabla_n b_{ik}=0$, будем иметь

$$\begin{gathered}
c^{in}c^{jk}[\nabla_n\varkappa_{ik}-\nabla_n(\nabla_i\varepsilon_{k3}+\nabla_k\varepsilon_{i3})-2\nabla_n(A_{ik}{}^s\varepsilon_{s3})-\\
-(b_{ns}+\nabla_n\varepsilon_{s3}+\nabla_s\varepsilon_{n3}-\varkappa_{ns})A_{ik}{}^s+b_{ik}\nabla_n\varepsilon]=0
\end{gathered}$$

Причем имеют место равенства

$$\begin{gathered}
c^{in}c^{jk}\nabla_n\varkappa_{ik}=(a^{ij}a^{nk}-a^{nj}a^{ik})\nabla_n\varkappa_{ik}=\nabla^k\varkappa_k{}^j-\nabla^j\varkappa_1\\
c^{in}c^{jk}\nabla_n\nabla_k\varepsilon_{i3}=\nabla_k\nabla^k\varepsilon^{j3}-\nabla^j\nabla_k\varepsilon^{k3}
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Если воспользоваться тождествами Риччи

$$\begin{gathered}
2c^{in}\nabla_n\nabla_i\varepsilon_{k3}=c^{in}\overset{s}{R}_{nik}\varepsilon_{s3}=2c^{in}b_{nk}b_i{}^s\varepsilon_{s3}\\
c^{in}c^{jk}\nabla_n\nabla_i\varepsilon_{k3}=c^{in}c^{jk}b_{nk}b_i{}^s\varepsilon_{s3}=K\varepsilon^{j3}
\end{gathered}$$

то найдем соотношения

$$\nabla^j\nabla_h\varepsilon^{h3}=\nabla_h\nabla^j\varepsilon^{h3}-K\varepsilon^{j3},\quad c^{in}c^{jk}\nabla_n(\nabla_k\varepsilon_{i3}+\nabla_i\varepsilon_{k3})=$$
$$=\nabla_kR^{kj}+2K\varepsilon^{j3},\quad R^{kj}=\nabla^k\varepsilon^{j3}-\nabla^j\varepsilon^{k3} \tag{3.4}$$

Учитывая (3.3) и (3.4), получим еще два уравнения совместности деформаций

$$\nabla_k(\varkappa^{jk}-R^{kj})-\nabla^j\varkappa_1-B^{jk}\nabla_k\varepsilon-2K\varepsilon^{j3}+$$
$$+c^{in}c^{jk}[2\nabla_n(A_{ik}{}^s\varepsilon_{s3})-(b_{ns}+\nabla_n\varepsilon_{s3}+\nabla_s\varepsilon_{n3}-\varkappa_{ns})A_{ik}{}^s]=0 \tag{3.5}$$

При $\varepsilon_3=\varepsilon_{i3}=0$ (3.2) и (3.5) переходят в уравнения неразрывности классической теории оболочек (1.7) и (1.8).

4. Уравнения равновесия (движения) в нормальной системе координат деформированной оболочки. Уравнения равновесия вытекают из принципа возможных перемещений нелинейной теории упругости

$$\delta A=\iiint\limits_{(V)}\delta W\,d\sigma=\iiint\limits_{(V)}\sigma^{\alpha\beta}\rho_\alpha{}^*\partial_\beta\delta\mathbf{U}^z\,dV$$
$$dV=\sqrt{g}dx^1dx^2dz,\qquad \delta\mathbf{U}^z=\delta\mathbf{v}+z\delta\boldsymbol{\gamma} \tag{4.1}$$
$$\delta A=\iiint\limits_{(V)}\mathbf{F}\delta\mathbf{U}^z\,dV+\iint\limits_{(\Pi)}\mathbf{P}_n\delta\mathbf{U}^z\,d\Pi \tag{4.2}$$

где δA — элементарная работа внешних сил; $\mathbf{F}$ — вектор объемной силы, отнесенной к единице объема (V) недеформированного тела; $\mathbf{P}_n$ — вектор внешних поверхностных сил, отнесенных к единице первоначальной площади; Π — недеформированная поверхность тела, состоящая из ограничивающих поверхностей $S_{(+)}$ и $S_{(-)}$, на которые действуют внешние нагрузки $\mathbf{P}_{(+)}$ и $\mathbf{P}_{(-)}$; $\alpha,\beta=1,2,3$.

Поверхность Π включает также поверхность граничного среза S, проведенного по контуру с недеформированной оболочки, на которую действует нагрузка $\mathbf{P}_n$.

Координатные векторы нормальной системы координат деформированной оболочки $\rho_\alpha{}^*$ в точке (x^i, z) равны

$$\rho_i{}^*=\mathbf{r}_k{}^*Z_i{}^{*k},\qquad \rho_3{}^*=\mathbf{m}_*,\qquad Z_i{}^{*k}=\delta_i{}^k-zb_i{}^{*k} \tag{4.3}$$

где $\mathbf{m}_*$ — единичный вектор нормали к деформированной срединной поверхности σ_*; $\sigma^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты тензора напряжений в системе деформированных координат, отнесенных к единице первоначальной площади $x^\alpha=\text{const}$, $\alpha=1, 2, 3$.

После приведения объемных и внешних поверхностных сил $\mathbf{P}_{(+)}$ и $\mathbf{P}_{(-)}$ к деформированной срединной поверхности σ_* выражение (4.2) примет вид

$$\delta A=\iint\limits_{\sigma}(\mathbf{X}\delta\mathbf{v}+\mathbf{M}\delta\boldsymbol{\gamma})\,d\sigma+\iint\limits_{(S)}\mathbf{P}_n\delta\mathbf{U}^z\,dS$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{M}$ — векторы внешнего усилия и внешнего момента, приложенные к точке деформированной срединной поверхности и отнесенные к единице площади недеформированной срединной поверхности

$$\mathbf{X}=\mathbf{P}_{(+)}\sqrt{\frac{g_{(+)}}{a}}+\mathbf{P}_{(-)}\sqrt{\frac{g_{(-)}}{a}}+\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sqrt{\frac{g}{a}}\mathbf{F}\,dz,\qquad g=g_{11}g_{22}-g_{12}{}^2$$

$$\mathbf{M}=\frac{h}{2}\mathbf{P}_{(+)}\sqrt{\frac{g_{(+)}}{a}}-\frac{h}{2}\sqrt{\frac{g_{(-)}}{a}}\mathbf{P}_{(-)}+\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sqrt{\frac{g}{a}}\mathbf{F}z\,dz,\qquad a=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$$

Величины $g_{(+)}$ и $g_{(-)}$ равны значениям g при $z=\pm0.5h$ соответственно. Обозначим через $\mathbf{M}_*$ тангенциальную составляющую вектора $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}_*=\frac{h}{2}[\mathbf{m}_*,\mathbf{P}_{(+)}]\sqrt{\frac{g_{(+)}}{a}}-\frac{h}{2}[\mathbf{m}_*,\mathbf{P}_{(-)}]\sqrt{\frac{g_{(-)}}{a}}+\int\limits_{-h/2}^{h/2}[\mathbf{m}_*z,\mathbf{F}]\sqrt{\frac{g}{a}}dz \tag{4.4}$$

Умножив обе части этого равенства векторно на $\mathbf{m}_*$, найдем

$$\mathbf{M}=[\mathbf{M}_*,\mathbf{m}_*]+\mathbf{m}_*M_*^3,\qquad M_*^3=\frac{h}{2}\left(\sigma_{(+)}^{33}\sqrt{\frac{g_{(+)}}{a}}-\sigma_{(-)}^{33}\sqrt{\frac{g_{(-)}}{a}}\right)+\int\limits_{-h/2}^{h/2}zF_3\,dz$$

Здесь $F_3=\mathbf{F}\mathbf{m}_*$; $\sigma_{(+)}^{33}$, $\sigma_{(-)}^{33}$ — внешние нормальные напряжения, действующие на поверхности $z=\pm0.5h$.

Элементарная работа внешних сил, действующих на поверхность бокового среза, равна

$$\iint\limits_{(S)}\mathbf{P}_n\delta\mathbf{U}^z\,dS=\int\limits_{c}(\Phi^s\delta\mathbf{v}+[\mathbf{M}_{n_*}^s,\mathbf{m}_*]\delta\gamma)\,ds$$

$$\mathbf{M}_{n_*}^s=H_*^s\mathbf{n}_*+G_*^s\boldsymbol{\tau}_*,\qquad [\mathbf{M}_{n_*}^s,\mathbf{m}_*]=G_*^s\mathbf{n}_*-H_*^s\boldsymbol{\tau}_*$$

где Φ^s, $\mathbf{M}_{n_*}^s$ — векторы внешнего контурного усилия и внешнего контурного момента; $\mathbf{n}_*$, $\boldsymbol{\tau}_*$ — единичные векторы тангенциальной нормали и касательной к деформированному контуру c_* оболочки; G_*^s, H_*^s — внешние изгибающий и крутящий моменты на контуре c_*.

Момент объемных сил и внешних поверхностных сил, действующих на ограничивающие поверхности (4.4), равен $\mathbf{M}_*=[\mathbf{m}_*r_k^*]M_*^k$, где M_*^k — контравариантные компоненты вектора-момента в системе координат деформированной срединной поверхности. Так как

$$[\mathbf{M}_*,\mathbf{m}_*]=[[\mathbf{m}_*,\mathbf{r}_k^*]M_*^k,\mathbf{m}_*]=M_*^k\mathbf{r}_k^*$$

то будем иметь $[\mathbf{M}_*,\mathbf{m}_*]\delta\gamma=M_*^k\mathbf{r}_k^*\delta\gamma$.

Учитывая полученные зависимости для вариаций работы внешних поверхностных и контурных сил, найдем

$$\delta A=\iint\limits_{\sigma}(\mathbf{X}\delta\mathbf{v}+M_*^k\mathbf{r}_k^*\delta\gamma+M_*^3\mathbf{m}_*\delta\gamma)\,d\sigma+\int\limits_{c}(\Phi^s\delta\mathbf{v}+G_*^s\mathbf{n}_*\delta\gamma-H_*^s\boldsymbol{\tau}_*\delta\gamma)\,ds$$

где $d\sigma$ — элемент площади недеформированной срединной поверхности.

Подставляя координатные векторы (4.3) в правую часть уравнения Лагранжа (4.1), получим

$$\delta A=\iint\limits_{\sigma}\left(\mathbf{R}_*^i\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial x^i}+M_*^{ik}\mathbf{r}_k^*\frac{\partial\delta\gamma}{\partial x^i}+N_*^i\mathbf{r}_k^*\delta\gamma+N_*^3\mathbf{m}_*\delta\gamma\right)d\sigma$$

$$\mathbf{R}_*^i=T_*^{ik}\mathbf{r}_k^*+N_*^i\mathbf{m}_*,\qquad T_*^{ik}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sqrt{\frac{g}{a}}\sigma^{ij}Z_j^{*k}\,dz$$

$$M_*^{ik}=\int_{-h/2}^{h/2}\sqrt{\frac{g}{a}}\,\sigma^{ij}Z_j^{*k}z\,dz;\qquad N_*^{i}=\int_{-h/2}^{h/2}\sqrt{\frac{g}{a}}\,\sigma^{i3}\,dz,\qquad N_*^{3}=\int_{-h/2}^{h/2}\sqrt{\frac{g}{a}}\,\sigma^{33}\,dz$$

Полученное вариационное уравнение распадается на два

$$\delta A=\iint_\sigma (\mathbf{X}\delta\mathbf{v}+M_*^{k}\mathbf{r}_k^*\delta\gamma)\,d\sigma+\int_c (\mathbf{\Phi}^s\delta\mathbf{v}+G_*^{s}\mathbf{n}_*\delta\gamma-H_*^{s}\boldsymbol{\tau}_*\delta\gamma)\,ds=$$

$$=\iint_\sigma (\mathbf{R}_*^{i}\nabla_i\delta\mathbf{v}+M_*^{ik}\mathbf{r}_k^*\delta\nabla_i\gamma+N_*^{i}\mathbf{r}_i^*\delta\gamma)\,d\sigma \tag{4.5}$$

$$\iint_\sigma M_*^{3}\mathbf{m}_*\delta\gamma\,d\sigma=\iint_\sigma N_*^{3}\mathbf{m}_*\delta\gamma\,d\sigma \tag{4.6}$$

Используя формулы преобразования поверхностного интеграла в контурный, приведем (4.5) к виду

$$\int_c \{(\mathbf{\Phi}^s-\mathbf{\Phi})\,\delta\mathbf{v}+(G_*^{s}-G_*)\,\mathbf{n}_*\delta\gamma-(H_*^{s}-H_*)\,\boldsymbol{\tau}_*\delta\gamma\}\,ds+$$

$$+\iint_\sigma \{(\nabla_i\mathbf{R}_*^{i}+\mathbf{X})\,\delta\mathbf{v}+\nabla_i(M_*^{ik}\mathbf{r}_k^*)\,\delta\gamma+(M_*^{k}-N_*^{k})\,\mathbf{r}_k^*\delta\gamma\}\,d\sigma \tag{4.7}$$

$$\mathbf{X}=X_*^{k}\mathbf{r}_k^*+X_*^{3}\mathbf{m}_*,\qquad \mathbf{\Phi}=T_n^*\mathbf{n}_*+T_{n\tau}^*\boldsymbol{\tau}_*+N_*\mathbf{m}_*$$

$$X_*^{k}=X^k+a^{ik}e_{ij}X^j+\omega^kX^3,\qquad X_*^{3}=E_3X_3+X^iE_i$$

$$T_n^*=T_*^{ik}n_in_k,\qquad T_{n\tau}^*=T_*^{ik}n_i\tau_k,\qquad N_*=N_*^{i}n_i$$

Здесь X_*^{k} — контравариантные компоненты вектора внешнего поверхностного усилия в системе осей деформированных координат; X_*^{3} — проекция на m_*; X^k, X^3 — компоненты в системе координат недеформированной оболочки; T_n^*, $T_{n\tau}^*$, N^* — проекции вектора контурного усилия на оси триэдра $\{\mathbf{n}_*,\boldsymbol{\tau}_*,\mathbf{m}_*\}$; n_i, τ_i — компоненты единичных векторов тангенциальной нормали $\mathbf{n}$ и касательной $\boldsymbol{\tau}$ недеформированного контура c оболочки.

Из вариационного уравнения (4.7) вытекают уравнения равновесия

$$\begin{aligned}&L^k=\nabla_iT_*^{ik}+A_{ij}^{k}T_*^{ij}-b_i^{*k}N_*^{i}+X_*^{k}=0,\qquad L^3=\nabla_iN_*^{i}+b_{ik}^*T_*^{ik}+X_*^{3}=0\\&m^k=\nabla_iM_*^{ik}+A_{ij}^{k}M_*^{ij}-N_*^{k}+M_*^{k}=0,\qquad c_{ik}(T_*^{ik}-b_j^{*i}M_*^{jk})=0\end{aligned}\tag{4.8}$$

где T_*^{ik}, N_*^{i} и M_*^{ik} — усилия и моменты, отнесенные к единице длины координатных линий x^i на недеформированной срединной поверхности; X_*^{k}, X_*^{3} и M_*^{k} — внешние усилия и моменты, отнесенные к единице площади этой поверхности.

Из контурного интеграла (4.7) вытекают статические граничные условия

$$\mathbf{\Phi}^s=\mathbf{\Phi},\qquad G_*^{s}=G_*=M_*^{ik}n_in_k,\qquad H_*^{s}=H_*=-M_*^{ik}n_i\tau_k$$

где G_* и H_* — изгибающий и крутящий моменты, отнесенные к единице длины недеформированного контура.

Шестое уравнение равновесия является тождеством. Из вариационного уравнения (4.6) найдем нормальное усилие $N_*^{3}=M_*^{3}$. Это соотношение позволяет определить обжатие ε_3. Чтобы получить уравнения движения элемента оболочки из уравнений равновесия, присоединим к внешним поверхностным усилиям силы инерции $-\rho h\partial^2\mathbf{v}/\partial t^2$, а к внешним поверхностным моментам — инерции вращения $-\rho h^3\partial^2\boldsymbol{\gamma}/12\partial t^2$ (ρ — плотность материала оболочки, $\mathbf{v}$ — вектор перемещения точки срединной поверхности, $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор угла поворота нормального элемента).

Контравариантные компоненты векторов ускорений в системе координат деформированной оболочки выражаются через компоненты в недеформированной системе координат по формулам

$$\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}\right)^k=\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}\mathbf{r}_*^{\;k}=\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}+a^{ik}e_{ij}\frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2}+\omega^k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}\right)^3=\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}\mathbf{m}_*=E_3\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+E_i\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2},\quad u^k=\mathbf{r}^k\mathbf{v},\quad w=\mathbf{m}\mathbf{v}$$

$$\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}}{\partial t^2}\right)^k=\frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}}{\partial t^2}\mathbf{r}_*^{\;k}=\frac{\partial^2\gamma^k}{\partial t^2}+a^{ik}e_{ij}\frac{\partial^2\gamma^j}{\partial t^2}+\omega^k\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}}{\partial t^2}\right)^3=\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}}{\partial t^2}\right)\mathbf{m}_*=E_3\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}+E_i\frac{\partial^2\gamma^i}{\partial t^2},\qquad \gamma^k=\mathbf{r}^k\boldsymbol{\gamma},\qquad \gamma=\mathbf{m}\boldsymbol{\gamma}$$

Исходя из уравнений равновесия (4.18) и принципа Даламбера, получим уравнения движения

$$L^k=\rho h\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}\right)^k,\qquad L^3=\rho h\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}\right)^3$$

$$m^k=\frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}}{\partial t^2}\right)^k,\qquad N_*^{\;3}-M_*^{\;3}=\frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}}{\partial t^2}\right)^3$$

Начальные условия для интегрирования уравнений движения при $t=0$ зададим в виде [1]

$$u^i=u_0^{\;i},\quad w=w_0,\quad \gamma^i=\gamma_0^{\;i}\quad (i=1,2)$$

$$\rho h\partial u^i/\partial t=\theta_0^{\;i},\quad \rho h\partial w/\partial t=\lambda_0,\quad \rho h^3\partial\gamma^i/12\partial t=\psi_0^{\;i}$$

где $u_0^{\;i}$, w_0, $\gamma_0^{\;i}$ — перемещения и углы поворота в начале движения; $\theta_0^{\;i}$, λ_0, $\psi_0^{\;i}$ — начальные импульсы.

5. Граничные условия. Чтобы сформулировать граничные условия, введем вектор обобщенного контурного усилия. С этой целью рассмотрим выражение элементарной работы внутренних контурных усилий и моментов, имеющей форму

$$A_c=\int\limits_c(\Phi\delta\mathbf{v}+G_*\mathbf{n}_*\delta\boldsymbol{\gamma}-H_*\boldsymbol{\tau}_*\delta\boldsymbol{\gamma})\,ds$$

$$\mathbf{n}_*=\mathbf{n}+d\mathbf{v}/dn,\qquad \boldsymbol{\tau}_*=\boldsymbol{\tau}+d\mathbf{v}/ds$$

Разложив вектор $\boldsymbol{\gamma}$ по осям триэдра деформированного контура $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{n}_*\gamma_{n_*}+\boldsymbol{\tau}\gamma_{\tau_*}+\mathbf{m}_*\gamma_*$, будем иметь

$$\mathbf{n}_*\delta\boldsymbol{\gamma}=\delta\gamma_{n_*}+\gamma_{\tau_*}\mathbf{n}_*\delta\boldsymbol{\tau}_*+\gamma_*\mathbf{n}_*\delta\mathbf{m}_*$$

$$\boldsymbol{\tau}_*\delta\boldsymbol{\gamma}=\delta(\boldsymbol{\tau}_*\boldsymbol{\gamma})-\boldsymbol{\gamma}\delta\boldsymbol{\tau}_*=\delta\gamma_{\tau_*}-\boldsymbol{\gamma}d\delta\mathbf{v}/ds$$

Внося правые части этих равенств в контурный интеграл и интегрируя по частям члены, содержащие $\gamma_{\tau_*}\mathbf{n}_*d\delta\mathbf{v}/ds$ и $\boldsymbol{\gamma}d\delta\mathbf{v}/ds$, получим

$$A_c=\int\limits_c(\mathbf{R}\delta\mathbf{v}+G_*\delta\gamma_{n_*}-H_*\delta\gamma_{\tau_*}+G_*\gamma_*\mathbf{n}_*\delta\mathbf{m}_*)\,ds+$$

$$+(H_*\boldsymbol{\gamma}+G_*\gamma_{\tau_*}\mathbf{n}_*)\delta\mathbf{v}|_c,\qquad \mathbf{R}=\Phi-d(H_*\boldsymbol{\gamma}+G_*\gamma_{\tau_*}\mathbf{n}_*)/ds \tag{5.1}$$

где $\mathbf{R}$ — вектор обобщенного контурного усилия.

По линейной теории $\mathbf{R}=\Phi$ и последнее слагаемое $G_*\gamma_*\mathbf{n}_*\delta\mathbf{m}_*$, стоящее под знаком контурного интеграла в (5.1), можно отбросить. Это слагаемое можно отбросить также при среднем изгибе, когда $\omega_i^{1/2}\ll 1$, $e_{ik}\ll 1$; при этом максимальный прогиб w одного порядка с толщиной оболочки или даже значительно превышает ее, но мал по сравнению с другими размерами. В этом случае $E_3=1$ и, следовательно

$$G_*\gamma_*=G_*\varepsilon\approx 0, \quad H_*\gamma=H_*(\mathbf{n}_*\gamma_{n_*}+\boldsymbol{\tau}_*\gamma_{\tau_*}), \quad \gamma_*\sim\varepsilon_p \tag{5.2}$$

Учитывая эти приближенные равенства, контурный интеграл и выражение для вектора $\mathbf{R}$ можно записать в виде

$$A_c=\int\limits_c (\mathbf{R}\delta\mathbf{v}+G_*\delta\gamma_{n_*}-H_*\delta\gamma_{\tau_*})\,ds+\mathbf{g}_*\delta\mathbf{v}|_c \tag{5.3}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{R}=\mathbf{n}_*T_n{}^*+\boldsymbol{\tau}_*T_{n\tau}{}^*+\mathbf{m}_*N_*-\partial\mathbf{g}_*/\partial s\\ \mathbf{g}_*=H_*\mathbf{n}_*\gamma_{n_*}+\gamma_{\tau_*}(H_*\boldsymbol{\tau}_*+G_*\mathbf{n}_*)\end{gathered} \tag{5.4}$$

Проекции обобщенного вектора на оси триэдра деформированного контура представим в форме $R_n=\mathbf{R}\mathbf{n}_*$, $R_{n\tau}=\mathbf{R}\boldsymbol{\tau}_*$, $R_m=\mathbf{R}\mathbf{m}_*$.

Исходя из (5.3), сформулируем граничные условия. На контуре оболочки задается один из сомножителей скалярного произведения; например, в произведении $R_m\delta w$ задается R_m или w. Приведем примеры записи граничных условий. На свободном контуре должны выполняться условия

$$R_n=R_{n\tau}=R_m=G_*=H_*=0$$

шарнирный, неподвижно опертый край

$$u_n=u_\tau=w=G_*=\gamma_\tau=0, \quad (u_n=\mathbf{n}\mathbf{v},\ u_\tau=\boldsymbol{\tau}\mathbf{v},\ w=\mathbf{m}\mathbf{v},\ \gamma_{\tau_*}=\gamma_\tau)$$

шарнирный, свободный в нормальном направлении край

$$u_n=u_\tau=G_*=R_m=\gamma_{\tau_*}=0$$

шарнирный, свободный в тангенциальном направлении край

$$u_n=R_{n\tau}=G_*=w=\gamma_{\tau_*}=0$$

Жесткое замещение краев оболочки: а) закреплен элемент срединной поверхности $u_n=u_\tau=w=\partial w/\partial n=\gamma_\tau=0$; в) закреплен вертикальный элемент края $u_n=u_\tau=w=\gamma_{n_*}=\gamma_\tau=0$.

6. Уравнения равновесия в косоугольной системе координат. Внесем в правую часть уравнения Лагранжа (4.1) координатные векторы деформированной оболочки, выраженные через углы поворота нормального элемента

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\rho}_i{}^*=\boldsymbol{\rho}_i+\partial_i\mathbf{U}^z=\mathbf{r}_i{}^*+z(\partial_i\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{r}_jb_i{}^j)\\ \boldsymbol{\rho}_3{}^*=\boldsymbol{\rho}_3+\partial\mathbf{U}^z/\partial z=\mathbf{m}+\boldsymbol{\gamma}\end{gathered}$$

Пренебрегая моментами второго порядка от напряжений σ^{ik} и полагая $g\approx a$, получим уравнение Лагранжа

$$\iint\limits_\sigma (\mathbf{X}\delta\mathbf{v}+M_*{}^k\mathbf{r}_k{}^*\delta\boldsymbol{\gamma}+M_*{}^3\delta\varepsilon_3)\,d\sigma+\int\limits_c \{\boldsymbol{\Phi}^s\delta\mathbf{v}+(G_*{}^s\mathbf{n}_*-H_*{}^s\boldsymbol{\tau}_*)\delta\boldsymbol{\gamma}+M_{n_*}{}^3\delta\varepsilon_3\}\,ds=$$

$$=\iint\limits_\sigma (\mathbf{R}^k\nabla_k\delta\mathbf{v}+M^{ik}\mathbf{r}_k{}^*\nabla_i\delta\boldsymbol{\gamma}+N^i\mathbf{r}_i{}^*\delta\boldsymbol{\gamma}+N^3\delta\varepsilon_3+N_1{}^i\nabla_i\delta\varepsilon_3)\,d\sigma \tag{6.1}$$

где $\mathbf{R}^k$ — векторы внутренних усилий, приложенных к срезам $x^k=\text{const}$ деформированной оболочки

$$\mathbf{R}^k=T^{ik}\bar{\mathbf{r}}_i^*+M^{ik}(\nabla_i\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{r}_j b_i^j)+N^k(\mathbf{m}+\boldsymbol{\gamma})$$

$$T^{ik}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma^{ik}\,dz,\quad N^i=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma^{i3}\,dz,\quad N^3=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma^{33}\,dz,\quad M^{ik}=\int_{-h/2}^{h/2}z\sigma^{ik}\,dz.$$

$$N_1{}^i=\int_{-h/2}^{h/2}z\sigma^{i3}\,dz \tag{6.2}$$

Применяя формулу преобразования поверхностного интеграла в контурный, из (6.1) будем иметь

$$\int_c\{(\boldsymbol{\Phi}^s-\mathbf{R}^i n_i)\delta\mathbf{v}+(G_*{}^s-G_*)\mathbf{n}_*\delta\boldsymbol{\gamma}-(H_*{}^s-H_*)\boldsymbol{\tau}_*\delta\boldsymbol{\gamma}\}ds+\iint_\sigma(\mathbf{L}\delta\mathbf{v}+\mathbf{H}\delta\boldsymbol{\gamma})d\sigma=0 \tag{6.3}$$

$$\int_c(M_{n_*}{}^3-N_1{}^i n_i)\delta\varepsilon_3\,ds+\iint_\sigma(\nabla_i N_1{}^i-N^3+M_*{}^3)\delta\varepsilon_3\,d\sigma=0 \tag{6.4}$$

В результате найдем векторные уравнения равновесия

$$\mathbf{L}=\nabla_k\mathbf{R}^k+\mathbf{X}=0,\quad \mathbf{H}=\nabla_i(M^{ik}\mathbf{r}_k^*)+(M_*{}^i-N_*{}^i)\mathbf{r}_i^*=0 \tag{6.5}$$

и уравнение равновесия

$$\nabla_i N_1{}^i-N^3+M_*{}^3=0\quad (N_1{}^i n_i=M_{n_*}{}^3 \text{ на } c) \tag{6.6}$$

из которого можно определить обжатие ε_3.

Найдем скалярную форму уравнений (6.5) в деформированных координатах. Компоненты векторов (6.2) в системе координат деформированной оболочки равны

$$\begin{gathered}R^{ij}=\mathbf{R}^i\mathbf{r}_*{}^j=T^{ij}+M^{ik}(\varkappa_k{}^j+\nabla_k\varepsilon^{j3}-\nabla^j\varepsilon_{k3})+2N^i\varepsilon^{j3}\\ R^{i3}=\mathbf{R}^i\mathbf{m}_*=N^i(1+\varepsilon)+2b_{kj}{}^*\varepsilon^{j3}M^{ik}\end{gathered} \tag{6.7}$$

Скалярная форма уравнений равновесия (6.5) имеет вид

$$\begin{gathered}\nabla_k R^{kj}+A_{ks}{}^j R^{ks}-b_k{}^{*j}R^{k3}+X_*{}^k=0,\quad \nabla_k R^{k3}+b_{kj}{}^*R^{kj}+X_*{}^3=0\\ \nabla_k M^{kj}+A_{ks}{}^j M^{ks}-N^j+M_*{}^j=0,\quad M^{ik}b_{ik}{}^*=0\end{gathered} \tag{6.8}$$

Последнее уравнение $M^{ik}b_{ik}{}^*=0$ является тождеством, которому можно удовлетворить подходящим выбором соотношений упругости.

Для получения уравнений движения в правые части уравнений (6.6) и (6.8) необходимо ввести инерционные силы и инерции вращения.

Компоненты усилий (6.7) определены при сохранении величин $zb_k{}^i$ в выражениях базисных векторов $\boldsymbol{\rho}_i=\mathbf{r}_k(\delta_i^k-zb_i^k)$, а также величины γ как в линейных, так и в нелинейных членах. Благодаря учету этих величин удается выразить усилия R^{ij} и R^{i3} через T^{ik}, M^{ik}, N^i и $\varkappa_{ik}$, ε_{i3}, ε_3 в компактной форме (6.7), где явно не содержатся обобщенные перемещения.

Контурный интеграл, выражающий элементарную работу внутренних усилий и моментов и позволяющий сформулировать граничные условия, имеет вид

$$A_c=\int_c(\boldsymbol{\Phi}\delta v+2G_*'\delta\varepsilon_{n3}-G_*m_*\delta\mathbf{n}_*-2H_*\delta\varepsilon_{\tau3})ds+\mathbf{g}_*\delta\mathbf{v}|_c$$

$$\Phi = \mathbf{R}^i n_i - \partial \mathbf{g}_* / \partial s, \quad \mathbf{g}_* = H_* \mathbf{m}_* + h_* \mathbf{n}_* \tag{6.9}$$

$$h_* = 2(G_* \varepsilon_{\tau 3} + H_* \varepsilon_{n3}), \quad \varepsilon_{n3} = \varepsilon_{i3} n^i, \quad \varepsilon_{\tau 3} = \varepsilon_{i3} \tau^i$$

где Φ — вектор обобщенного контурного усилия. Если поперечные сдвиги отсутствуют, то получаем вектор обобщенного усилия теории оболочек Кирхгофа — Лява.

При формулировке граничных условий вместо вектора обобщенных усилий (5.4) необходимо брать (6.9). Благодаря учету поперечных сдвигов в уравнениях равновесия (6.8) появляются дополнительные члены, содержащие моменты, перерезывающие усилия, поперечные сдвиги и и углы поворота $\gamma_i^* = 2\varepsilon_{i3} - \omega_i$, которые могут быть существенны в задачах устойчивости оболочек.

Поступила 24 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айнола Л. Я.* Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек. Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем и техн. наук, 1965, т. 14, № 3.
2. *Айнола Л. Я.* Вариационные методы для нелинейных уравнений движения оболочек. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
3. *Галимов К. З.* Нелинейная теория тонких оболочек типа Тимошенко. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек, № 11. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1975.
4. *Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А.* Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига, «Зинатне», 1974.
5. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел, т. 5. М., ВИНИТИ, 1973.
6. *Галимов К. З.* Условия неразрывности деформации поверхности при произвольных изгибах и деформациях. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1953, т. 113, кн. 10.