МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1976

УДК 539.38

К АСИМПТОТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Э. И. ГРИГОЛЮК, В. М. КОРНЕВ

(Москва, Новосибирск)

Построены асимптотические разложения решений в задачах прочности трехслойных пластин и оболочек, когда параметр, характеризующий поперечный сдвиг трехслойного пакета, мал. Этот параметр входит в одно из уравнений системы. Назовем последнее возмущающим уравнением. Необходимо отметить, что рассматриваемые системы уравнений для трехслойных конструкций соответствуют уточненным системам классических уравнений изгиба однородных пластин и оболочек (классические системы уравнений не содержат этого добавочного возмущающего уравнения). Сформулирована вырожденная задача, когда опущено возмущающее уравнение системы, которое имеет решения типа краевого эффекта (погранслоя). Установлена связь решений полной и вырожденной задач. Вырожденная задача соответствует классической теории изгиба однородных пластин и оболочек. Получено обоснование преобразования Кирхгофа на свободном крае пластины или оболочки.

Для задач о собственных колебаниях и устойчивости трехслойных оболочек и пластин разобрана модельная задача.

1. В классической теории изгиба однородных пластин имеется противоречие между общим порядком системы уравнений (два бигармонических уравнения относительно номального прогиба и функции напряжений) и пятью естественными статическими граничными условиями. Например, на свободном крае равны нулю изгибающий и крутящий моменты, перерезывающие усилия и два усилия в плоскости пластины. В классической теории на свободном крае ставятся не пять, а четыре краевых условия, если воспользоваться преобразованием Кирхгофа. Имеются теории, которые можно рассматривать как уточнение классических теорий, так как используются более общие гипотезы при выводе уравнений (учет сдвига по толщине пластины). В этих теориях противоречие между общим порядком системы и естественными статическими граничными условиями исчезает. Вероятно, наиболее простой вид для исследования имеет система уравнений из [1]. Если пренебречь изгибной жесткостью несущих слоев, то общий порядок этой системы будет равен десяти; причем порядок системы повышается по сравнению с классической теорией за счет уравнения второго порядка, которое имеет решения типа краевого эффекта (погранслоя).

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами в плоской ограниченной области Q с гладкой границей Γ

$$L_0u=f(x, y), \qquad \varepsilon^2\Delta v=v \tag{1.1}$$

Здесь L_0 — равномерно эллиптический оператор порядка $2m$, Δ — оператор Лапласа, ε — параметр, характеризующий сдвиговую жесткость трехслойного пакета.

Система (1.1) при соответствующих краевых условиях описывает задачи о прочностном расчете трехслойных пластин (m=2) или оболочек (m=4) (если пренебречь изгибной жесткостью несущих слоев [1, 2]).

Достаточно часто в практических задачах параметр ε мал. Известно, что решение второго уравнения системы (1.1), которое ниже будем называть возмущающим уравнением исходной системы, имеет характер краевого эффекта (погранслоя) [3]. Только в окрестности границы Г решение возмущающего уравнения существенно отличается от нуля; при удалении от границы это решение быстро стремится к нулю, кроме того, $\partial^{n+1}v/\partial\rho^{n+1} \gg \partial^n v/\partial\rho^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, где ρ — нормаль к границе Г.

Предположим (условие 1), что при граничных условиях

$$b_k u + t_k v\,|_\Gamma = \varphi_k \qquad (k=1, 2, \ldots, m, m+1) \tag{1.2}$$

система (1.1) для достаточно малых положительных ε $(0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$ имеет решение и притом единственное, когда φ_k и f — произвольные достаточно гладкие функции. Допустим, что ни одна из функций φ_k и f не может быстро изменяться.

Ограничение на изменяемость функций φ_k, f не всегда является естественным (см., например, работу [4]). Представляют интерес асимптотики решений изучаемой задачи или аналогичных задач по двум параметрам, один из которых мал, а другой велик [4], и по нескольким малым параметрам, характеризующим многослойный пакет [5]. Здесь эти задачи не изучаются.

Построим формальное асимптотическое решение задачи (1.1), (1.2) при $\varepsilon\to 0$. Условие на гладкость границы Г определяет, как далеко может быть продолжен итерационный процесс (далее считается, что справедливы выкладки для возмущающего уравнения и соответствующих краевых условий). При построении асимптотического решения $\varepsilon\to 0$ задачи (1.1), (1.2) возникает вопрос о формулировке краевых условий для вырожденной задачи.

Перейдем к формулировке вырожденной задачи при $\varepsilon\to 0$. Очевидно эта задача связана с решением первого уравнения (1.1), для которого предстоит сформулировать m условий на Г. Выясним «важность» исходных краевых условий (1.2). Для этого введем в окрестности границы Г локальные координаты (ρ, η), причем ρ — нормаль к Г [6–8].

Будем считать краевые условия записанными в каноническом виде, если они разрешены относительно старшей производной функции v по нормали к границе и расположены так, что эта производная входит только в последнее условие

$$B_k u + T_k \partial^{N_k} v \,/\, \partial\rho^{N_k} + T_k^\circ v\,|_\Gamma = \Phi_k \qquad (k=1, 2, \ldots, m, m+1,\ N_1\leqslant\ldots\leqslant N_m<N_{m+1}) \tag{1.3}$$

Здесь T_k — операторы, которые не содержат дифференцирования по нормали к границе; T_k° — операторы, которые содержат производные по нормали к границе порядка не более N_k; порядок операторов B_k равен m_k $(m_k<2m)$.

Если в соотношениях (1.3) вычеркнуть последнее условие, а в оставшихся опустить функцию v, то получим краевые условия вырожденной задачи. Эта задача формулируется следующим образом:

$$L_0 u_0 = f(x, y), \qquad B_k u_0\,|_\Gamma = \Phi_k \qquad (k=1, 2, \ldots, m) \tag{1.4}$$

Допустим (условие 2), задача (1.4) имеет решение и притом единственное. Этот факт нетрудно установить (оператор L_0 — равномерно эллиптический оператор; краевые условия задач, встречающихся в теории оболочек, удовлетворяют условиям дополнительности, см. [9]). Считается, что для произвольных функций f и Φ_k задача (1.4) может быть решена.

Сформулированная вырожденная задача (1.4) соответствует классической теории изгиба однородных пластин и оболочек. Для оболочек со свободным краем в краевых условиях задачи (1.4) выполнено преобразование Кирхгофа (поперечные усилия заменены обобщенными поперечными усилиями, см. (1.3)).

Основная цель данной работы — построение формальных асимптотических разложений, которые помогают выяснить взаимосвязь решений полной и вырожденной задач. Это связано с тем, что краевые условия вырожденной задачи в общем случае (например свободной от связей край) не совпадают с краевыми условиями упрощенных теорий для однородных пластин и оболочек. В отличие от [6, 10], посвященных исследованиям однородных пластин, более формальный подход [11–13], развитый для исследования трехслойных пластин и оболочек, быстрее приводит к цели (при этом существенно уменьшаются выкладки).

Итак, задачи (1.1), (1.2) и (1.4) удовлетворяют первому и второму условиям. В отличие от задач, изучавшихся в [8], здесь не потребуется повышенная гладкость решения вырожденной задачи u_0, поскольку к функции u_0 не будут применяться операторы, порядок которых превосходил бы $2m$.

Формальное асимптотическое разложение решения задачи (1.1), (1.2) строим в виде ($\varepsilon\ll1$)

$$u_\varepsilon=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i u_i+\varepsilon^{n+1}Z_n,\qquad v_\varepsilon=\varepsilon^\beta\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i v_i+\varepsilon^{n+1}z_n\right)\tag{1.5}$$

где Z_n, z_n — остаточные члены разложений. Отметим, что погранслой в (1.5) (второе соотношение) строится с учетом сглаживающего множителя [7, 8].

Подставим разложения (1.5) в уравнения (1.1) и краевые условия

$$L_0\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i u_i+\varepsilon^{n+1}Z_n\right)=f(x,y),\qquad \varepsilon^\beta(\varepsilon^2\Delta-1)\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i v_i+\varepsilon^{n+1}z_n\right)=0\tag{1.6}$$

$$B_k\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i u_i+\varepsilon^{n+1}Z_n\right)+\varepsilon^\beta\left(T_k\frac{\partial^{N_k}}{\partial\rho^{N_k}}+T_k{}^\circ\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i v_i+\varepsilon^{n+1}z_n\right)\Bigg|_\Gamma=\Phi_k$$
$$(k=1,2,\ldots,m,m+1)\tag{1.7}$$

Как обычно [6, 8], при построении функций типа погранслоя v_i ($i=0,1,\ldots,n$) и для выяснения влияния самих этих функций и их производных на границе Γ (соотношения (1.7)) вводится растяжение масштаба $t=\rho/\varepsilon$. Следовательно, $\partial^s/\partial\rho^s=\varepsilon^{-s}\partial^s/\partial t^s$.

На построении функций v_i останавливаться не будем (см. [3, 7, 8]). Возмущающее уравнение в (1.1) является эллиптическим уравнением второго порядка с малым параметром при старших производных. Решение второго уравнения в (1.6) на каждом шаге итерационного процесса можно представить в виде функций типа погранслоя (краевого эффекта)

$$v_i=\psi(\rho/\eta_1)c_i(\rho/\varepsilon,\ \eta)\exp\left[-\mu(\eta)\rho/\varepsilon\right]\tag{1.8}$$

Здесь c_i — многочлен от ρ/ε, коэффициенты которого зависят от η; $\pm\mu(\eta)$ — корни «характеристического» уравнения на контуре Γ; $\psi(\rho/\eta_1)$ — сглаживающая бесконечно дифференцируемая функция [7]

$$\psi(\rho/\eta_1)=1,\quad \rho\leqslant\eta_1/3,\qquad \psi(\rho/\eta_1)=0,\quad \rho\geqslant2\eta_1/3$$

Конкретный вид погранслоев (1.8) получается с учетом краевых условий.

Преобразованные условия (1.7) имеют вид

$$B_k\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i u_i+\varepsilon^{n+1}Z_n\right)+\varepsilon^\beta\left(\varepsilon^{-N_k}T_k\frac{\partial^{N_k}}{\partial t^{N_k}}+T_k^\circ\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i v_i+\varepsilon^{n+1}z_n\right)\bigg|_\Gamma=\Phi_k \quad (k=1,2,\ldots,m,m+1) \tag{1.9}$$

Необходимо принять во внимание, что в краевых условиях (1.9) погранслои записаны в преобразованной системе координат. Заметим, что только первый оператор во второй скобке в последнем условии (1.9) $k=m+1$ содержит множителем наименьшую степень малого параметра ε, так как граничные условия были выписаны в каноническом виде (1.3), где $N_1\leqslant\ldots\leqslant N_m<N_{m+1}$.

На нулевом шаге итерационного процесса функция v_0 (1.8) должна «выбирать невязки» в последнем краевом условии (1.9)

$$\varepsilon^{\beta-N_{m+1}}T_{m+1}\partial^{N_{m+1}}v_0\,/\,\partial t^{N_{m+1}}\,|_\Gamma=\Phi_{m+1}-B_{m+1}u_0\,|_\Gamma \tag{1.10}$$

причем основная часть решения u_0 считается уже построенной (см. задачу (1.4)).

Для правильного построения итерационного процесса в левой и правой частях (1.10) должны стоять величины одного порядка малости. Поэтому параметр β в разложении (1.5) будет равен $\beta=N_{m+1}$.

Далее собираем члены при одинаковых степенях малого параметра в соотношениях (1.6), (1.9). Сначала собираем члены при ε в нулевой степени. В результате получаем задачу (1.4) для u_0. Если считать, что u_0 уже построено, то для погранслоя v_0 будем иметь краевые условия (1.10) (функция c_0 в соотношении (1.8) определяется в зависимости от правой части краевых условий (1.10) и вида оператора T_{m+1} в тех же условиях). Итак, нулевое приближение u_0, v_0 исходной задачи построено.

Собирая члены при ε в первой степени в (1.6) (первое уравнение) и (1.9), получим задачу для u_1

$$L_0u_1=0 \qquad B_ku_1=\overset{*}{\Phi}_{1,k} \quad (k=1,2,\ldots,m) \tag{1.11}$$

и краевые условия для определения погранслоя v_1

$$T_{m+1}\partial^{N_{m+1}}v_1/\partial t^{N_{m+1}}|_\Gamma=\overset{*}{\Phi}_{1,m+1} \tag{1.12}$$

Функции $\overset{*}{\Phi}_{1,k}$ в (1.11) определяются значениями погранслоя v_0 и его производных на контуре Γ (предполагается, что задача (1.11) может быть решена). Функция $\overset{*}{\Phi}_{1,m+1}$ в правой части краевого условия (1.12) зависит от v_0 и u_1 (построение функции c_1 в соотношении (1.8) для v_1 очевидно [7, 8]). Таким образом, завершено построение первой поправки u_1, v_1 к нулевому приближению u_0, v_0. Формулировка задач для последующих поправок u_i, v_i ($i\geqslant2$) проводится аналогично.

Члены за малыми параметрами $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $v_0, v_1, \ldots, v_n$ характеризуют учет влияния сдвига на напряженно-деформированное состояние трехслойных пластин и оболочек. На основное напряженно-деформированное состояние u_0 накладываются два поправочных состояния, первое из которых $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — гладкая поправка к основному состоянию, второе $v_0, v_1, \ldots, v_n$ — краевой эффект (погранслой). Отметим, что первое поправочное состояние захватывает всю область, занимаемую пластиной или оболочкой, а второе — узкую полоску около контура пластины или оболочки. Не обязательно, чтобы в каждом из упомянутых состояний все члены были отличны от нуля [12, 13]; например, для пластин и оболочек со свободным краем будут пропуски в асимптотических разложениях (1.5), если этот край прямолинеен; преобразование Кирхгофа обладает высокой точностью для однородных и трехслойных пластин и оболочек, когда край прямолинеен.

Для остаточных членов Z_n и z_n имеем задачу

$$L_0Z_n=0, \qquad (\varepsilon^2\Delta-1)z_n=\sum_{i=0}^{n}A_i\varepsilon^i v_i \tag{1.13}$$

$$B_kZ_n|_\Gamma+\varepsilon^\beta\left(T_k\frac{\partial^{N_k}z_n}{\partial\rho^{N_k}}+T_k^\circ z_n\right)\Big|_\Gamma=\sum_{i=0}^{n}E_{ik}\varepsilon^{i+\beta}v_i\Big|_\Gamma \qquad (k=1,2,\ldots,m,m+1)$$

Здесь A_i, E_{ik} — операторы. По первому условию задача (1.13) имеет решение и притом единственное.

Асимптотические разложения (1.5) выявляют связь решений полной исходной задачи (1.1), (1.2) для системы уравнений и решений вырожденной задачи (1.4) для одного уравнения. Для правильного построения итерационного процесса исходные краевые условия преобразуются определенным образом (это преобразование на свободном крае трехслойных пластин и оболочек совпадает с преобразованием Кирхгофа для однородных пластин и оболочек).

2. Задачи о собственных колебаниях и устойчивости трехслойных пластин и оболочек являются задачами о собственных функциях и числах систем уравнений [2]. Ниже рассматривается простейший аналог подобного рода задач. Эта модельная задача позволяет выявить асимптотическую природу конкретных задач, изученных в работах [11–14], когда параметр, характеризующий поперечный сдвиг трехслойного пакета, мал.

Задача о возмущении собственных функций U_j и собственных чисел Λ_j в плоской ограниченной области Q с гладкой границей Γ описывается следующей системой линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$L_0U_j-\Lambda_jU_j=0, \qquad \varepsilon^2\Delta v_j=v_j \qquad (j=1,2,\ldots) \tag{2.1}$$

Здесь L_0 — эллиптический оператор второго порядка с действительными коэффициентами, Δ — оператор Лапласа, ε — малый параметр.

Очевидно, что второе (возмущающее уравнение) в (2.1) имеет решения типа погранслоя.

Пусть (предположение I) при граничных условиях

$$b_kU_j+t_kv_j|_\Gamma=0 \qquad (k=1,2) \tag{2.2}$$

система (2.1) для достаточно малых положительных ε ($0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$) имеет счетное множество действительных собственных чисел Λ_j и соответствующих им собственных функций U_j, причем $0<\Lambda_1<\Lambda_2<\ldots$ (для простоты изучаются задачи с различными собственными значениями).

Вводя в окрестности Γ локальные координаты (ρ, η), перепишем краевые условия (2.2) в канонической форме (обозначения прежние)

$$B_kU_j+(\partial/\partial\rho)^{N_k}T_kv_j+T_k^\circ v_j=0 \qquad (k=1,2;\ N_1<N_2;\ j=1,2,\ldots) \tag{2.3}$$

Задача о собственных функциях u_j и собственных числах λ_j самосопряженного положительно определенного оператора

$$L_0u_j-\lambda_ju_j=0, \qquad B_1u_j|_\Gamma=0 \qquad (j=1,2,\ldots) \tag{2.4}$$

является предельной задачей при $\varepsilon\to0$ для системы (2.1) с граничными условиями (2.2).

Будем считать (предположение II), что задача (2.4) имеет счетное множество действительных различных собственных значений, т. е. $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$. Предполагается, что собственные функции задачи (2.4) уже пронормированы

$$\int\limits_Q u_j^2\, d\sigma=1$$

Построим формальные асимптотические разложения собственных функций U_j, v_j и собственных чисел Λ_j

$$\Lambda_j=\lambda_j+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i\lambda_{ij}+\varepsilon^{n+1}\lambda_j^*,\qquad U_j=u_j+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i u_{ij}+\varepsilon^{n+1}Z_{nj}$$

$$v_j=\varepsilon^\beta\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i v_{ij}+\varepsilon^{n+1}z_{nj}\right)\qquad (j=1,2,\ldots)\tag{2.5}$$

где λ_j^*, Z_{nj}, z_{nj} — остаточные члены разложений соответственно собственных чисел, собственных функций и решения возмущающего уравнения.

Подставим разложения (2.5) в уравнения (2.1) и краевые условия (2.3). Приравнивая величины при нулевой степени малого параметра ε, получим задачу (2.4). Для определения v_{0j} имеем краевые условия

$$\varepsilon^\beta[(\partial/\partial\rho)^{N_2}T_2v_{0j}+T_2^\circ v_{0j}]\,|_\Gamma=-B_2u_j|_\Gamma$$

правая часть которых считается уже известной функцией. Очевидно, что определение членов разложения решения возмущающего уравнения в (2.1) полностью совпадает с п. 1. Например, параметр β в разложении (2.5) для v_j определяется из соотношения $\beta=N_2$.

Перейдем к определению λ_{ij} и u_{ij}. Приравнивая члены при первой степени малого параметра, получим

$$L_0u_{1j}-\lambda_ju_{1j}=\lambda_{1j}u_j,\qquad B_1u_{1j}|_\Gamma=\varphi_1,\qquad \varphi_1=-(\partial/\partial\rho)^{N_1}T_1v_{0j}\tag{2.6}$$

Условие разрешимости этого уравнения [15] для первой краевой задачи будет

$$\lambda_{1j}\int\limits_Q u_j^2\,d\sigma+\int\limits_\Gamma \varphi_1\frac{\partial u_j}{\partial\rho}\,d\eta=0\tag{2.7}$$

и для второй или третьей краевой задачи

$$\lambda_{1j}\int\limits_Q u_j^2\,d\sigma+\int\limits_\Gamma \varphi_1u_j\,d\eta=0\tag{2.8}$$

Из соотношений (2.7) или (2.8) определяется поправка λ_{1j} к собственному числу λ_j вырожденной задачи (2.4) (функция u_{1j} является частным решением уравнения (2.6)).

Продолжая процесс, определим v_{1j}, λ_{2j}, $u_{2j},\ldots,v_{n-1,j}$, λ_{nj}, u_{nj}, v_{nj}. Для остаточных членов λ_j^*, Z_{nj}, z_{nj} задача получается достаточно громоздкая (см. п. 1).

Итак, на основную часть решения u_j ($j=1, 2,\ldots,$) накладываются поправки u_{ij} ($i\geqslant1$), v_{ij} ($i\geqslant0$), первые из которых захватывают всю область, а вторые v_{ij} существенно отличны от нуля только около контура. Поправки к собственным значениям λ_{ij} ($i\geqslant1$) характеризуют интегральный эффект возмущения.

Поступила 1 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* К расчету трехслойных пластин с жестким заполнителем. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1964, № 1.
2. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М., Машиностроение, 1973.
3. *Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г.* и др. Линейные уравнения математической физики (справочник). М., «Наука», 1964.
4. *Корнев В. М.* Об упрощенных теориях многослойных пластин. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 11.
5. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Нелинейные уравнения пологих многослойных оболочек регулярного строения. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1.
6. *Friedrichs K. O.* Asymptotic phenomena in mathematical physics. Bull. Amer. Math. Soc., 1955, vol. 61, p. 485–504.
7. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 5.
8. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I. Успехи матем. наук, 1960, т. 15, вып. 3.
9. *Агмон Ш., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
10. *Friedrichs K. O., Dressler R. F.* A boundary-layer theory for elastic plates. Communs Pure and Appl. Math., 1961, vol. 14, No. 1.
11. *Григолюк Э. И., Корнев В. М.* Обоснование уравнений трехслойных пластин несимметричной структуры с жестким заполнителем. Инж. ж. МТТ, 1966, № 6.
12. *Григолюк Э. И., Корнев В. М.* Анализ уравнений трехслойных оболочек несимметричной структуры с жестким заполнителем. Прикл. механ., 1968, вып. 3.
13. *Григолюк Э. И., Корнев В. М.* К формулировке уравнений трехслойных пластин и оболочек. В кн.: Прочность и пластичность. М., «Наука», 1971, стр. 40–46.
14. *Иванов А. В.* Влияние краевого эффекта на критические нагрузки для трехслойных пластин несимметричной структуры с жестким заполнителем. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3.
15. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., Изд-во иностр. лит. 1953.