МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1976

УДК 539.3

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

В. М. ЛЮБИМОВ, Г. И. ПШЕНИЧНОВ

(Москва)

Методом малого параметра в работе [1] решение статической задачи теории пологих оболочек сведено к решению рекуррентных дифференциальных уравнений изгиба пластин и плоской задачи. При этом за малые параметры принимались отношения толщины оболочки к радиусам кривизны срединной поверхности.

Ниже рассматриваются статические задачи и задачи о свободных колебаниях пологих оболочек. Формальное введение малого параметра в дифференциальные уравнения приводит к итерационному процессу, содержащему решение задачи для пластины на упругом основании и некоторой плоской задачи.

Разработан и реализован в виде программ для ЭВМ алгоритм, основанный на численном решении стандартных задач итерационного процесса.

Сходимость метода показана на частных задачах, для которых имеются точные решения (для этих задач найдена также оценка точности приближенного решения, получаемого после произвольного числа итераций), и подтверждается численными решениями некоторых конкретных задач.

Отметим, что в [2] дана оценка погрешности расчета оболочки как плоской пластины.

1. Систему дифференциальных уравнений теории пологих оболочек, записанную в главных линиях кривизн срединной поверхности [3], представим в виде

$$L_{11}(u)+L_{12}(v)+L_{13}(w)=-CX,\ L_{21}(u)+L_{22}(v)+L_{23}(w)=-CY$$
$$L_{31}(u)+L_{32}(v)+L_{33}(w)=-CZ,\ C=(1-\nu^2)AB/Eh \tag{1.1}$$

Здесь и ниже (для погонных усилий и моментов) использованы обозначения [3].

Дифференциальные операторы в (1.1) определяются следующими соотношениями:

$$L_{11}(u)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\frac{\nu}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A^2}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{u}{A}+\right.$$
$$\left.+\frac{A}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{u}{A}\right)-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^2u+\frac{\nu}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u$$

$$L_{12}(v)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}v+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+$$
$$+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}B\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{v}{B}+\frac{B}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{v}{B}\right)-\frac{\nu}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}v$$

$$L_{13}(w)=(k_1+\nu k_2)\,\partial Bw/\partial\alpha-(k_2+\nu k_1)\,w\partial B/\partial\alpha$$

$$L_{33}(w)=-AB\left({}^1/_{12}h^2\nabla^2\nabla^2+k_1{}^2+2\nu k_1k_2+k_2{}^2\right)w$$

$$\nabla^2=\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]$$

Операторы L_{22}, L_{23} получаются из L_{11}, L_{13}, если в них произвести замену A, B, k_1, k_2, $\partial/\partial\alpha$, $\partial/\partial\beta$ соответственно на B, A, k_2, k_1, $\partial/\partial\beta$, $\partial/\partial\alpha$. Система (1.1) симметрична: $L_{ik}=L_{ki}$.

Систему (1.1) необходимо решать с учетом четырех условий на контуре оболочки Г: двух тангенциальных и двух не тангенциальных соответственно

$$L_j(u,\ v,\ N_1,\ N_2,\ S)=f_j(\alpha,\ \beta)\quad {\scriptstyle (j=1,\ 2)}\quad \text{на } \Gamma \tag{1.2}$$

$$L_j(w)=f_j(\alpha,\ \beta)\quad {\scriptstyle (j=3,\ 4)}\quad \text{на } \Gamma \tag{1.3}$$

Вместо (1.1) бдуем рассматривать следующую систему уравнений:

$$L_{11}(u)+L_{12}(v)+L_{13}(w)=-CX,\quad L_{21}(u)+L_{22}(v)+L_{23}(w)=-CY$$
$$\varepsilon L_{31}(u)+\varepsilon L_{32}(v)+L_{33}(w)=-CZ \tag{1.4}$$

Решение (1.2) – (1.4) будет представлять собой решение исходной задачи (1.1) – (1.3) при значении «малого параметра» $\varepsilon=1$.

Решение (1.2) – (1.4) представим в виде

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n u_n,\qquad v=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n v_n,\qquad w=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n w_n \tag{1.5}$$

причем первый член этих разложений удовлетворяет условиям (1.2), (1.3), а все последующие – им же при $f_j\equiv 0$ ($j=1,\ 2,\ 3,\ 4$).

2. Рассмотрим статическую задачу. В этом случае X, Y, Z – известные функции.

Подставляя (1.5) в (1.4) и приравнивая выражения, находящиеся в левых и правых частях, в случае $\varepsilon=0$, получим

$$L_{11}(u_0)+L_{12}(v_0)=-L_{13}(w_0)-CX,\quad L_{21}(u_0)+L_{22}(v_0)=-L_{23}(w_0)-CY$$
$$L_{33}(w_0)=-CZ \tag{2.1}$$

Аналогично, учитывая различные степени ε, найдем

$$L_{11}(u_n)+L_{12}(v_n)=-L_{13}(w_n),\quad L_{21}(u_n)+L_{22}(v_n)=-L_{23}(w_n) \tag{2.2}$$

$$L_{33}(w_n)=-L_{31}(u_{n-1})-L_{32}(v_{n-1}) \tag{2.3}$$

Для определения функций u_0, v_0, w_0 решим уравнение изгиба пластинки на упругом основании (третье уравнение (2.1)) с учетом (1.3); далее проинтегрируем систему уравнений плоской задачи теории упругости (первые два уравнения в (2.1)) при условиях (1.2).

Последующие члены разложений (1.5) определяются аналогично, только вместо уравнений (2.1) следует использовать (2.2), (2.3). Граничные условия (1.2), (1.3) принимаются однородными.

Таким образом, отыскание любых членов разложений (1.5) сводится к решению двух указанных выше типовых задач.

Предлагаемый метод решения можно использовать лишь в том случае, если при $\varepsilon=1$ ряды (1.5) будут сходящимися.

Рассмотрим квадратную в плане пологую сферическую оболочку радиуса R при шарнирном опирании по контуру, нагруженную поверхностной нагрузкой ($X=Y=0$)

$$Z^{(m)}=q^{(m)}\sin\lambda_m\alpha\sin\lambda_m\beta,\quad \lambda_m=m\pi/a_0\quad {\scriptstyle (m=1,\ 2,\ 3\ \ldots)}$$

где α, β – декартова система координат с началом в угловой точке оболочки ($A=B=R$); a_0 – отношение размера оболочки в плане к радиусу.

Можно показать, что в этом случае ряды (1.5) сходятся к точному решению [3], а относительная погрешность при сохранении в них первых k членов равна

$$\eta_k^{(m)}=\left(w^{(m)}-\sum_{n=0}^{k} w_n^{(m)}\right),\qquad w^{(m)}=[(1+\nu)C_m]^k$$

$$C_m=3(1+\nu)a_0^4[6(1+\nu)a_0^4+m^4\pi^4(n/R)^2]^{-1}$$

Оценки для $u^{(m)}$ и $v^{(m)}$ такие же, как и для прогиба. Поскольку $0<C_m<0.5$, сходимость вычислений будет хорошей.

Рассмотрим прямоугольную в плане пологую оболочку при произвольных граничных условиях.

В дальнейшем за k_1, k_2, u, v, w и другие параметры условимся принимать их безразмерные величины

$$k_1R_0,\ k_2R_0,\ u/R_0,\ v/R_0,\ w/R_0,\ N_1/Eh,\ N_2/Eh,\ S/Eh,\ R_0M_1/D,\ R_0M_2/D,$$
$$R_0H/D,\ R_0^2Q_1^*/D,\ R_0^2Q_2^*/D$$

где R_0 — некоторый характерный радиус кривизны срединной поверхности, D — цилиндрическая жесткость оболочки; звездочкой в верхнем индексе отмечены поперечные силы по Кирхгофу.

В качестве коэффициентов первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки примем $A=B=R_0$.

Системы уравнений (2.1)—(2.3) представим в форме, более удобной для последующих вычислений

$$\frac{\partial u_n}{\partial\alpha}+\nu\frac{\partial v_n}{\partial\beta}-N_{1n}=-(k_1+\nu k_2)w_n$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial\alpha}+\frac{\partial u_n}{\partial\beta}-\frac{2}{1-\nu}s_n=0$$

$$\frac{\partial N_{1n}}{\partial\alpha}+\frac{\partial S_n}{\partial\beta}=-\frac{jR_0}{Eh}X$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial\alpha}+(1-\nu^2)\frac{\partial^2 v_n}{\partial\beta^2}+\nu\frac{\partial N_{1n}}{\partial\beta}=-(1-\nu^2)k_2\frac{\partial w_n}{\partial\beta}-\frac{jR_0}{Eh}Y$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial\alpha}-\varphi_n=0,\qquad \frac{\partial\varphi_n}{\partial\alpha}+\nu\frac{\partial^2 w_n}{\partial\beta^2}+M_{1n}=0$$

$$\frac{\partial M_{1n}}{\partial\alpha}-(1-\nu)\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial\beta^2}-Q_{1n}^*=0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial Q_{1n}^*}{\partial\alpha}-(1-\nu)\frac{\partial^4 w_n}{\partial\beta^4}-Kw_n+\frac{\partial^2 M_{1n}}{\partial\beta^2}=-Kw_{n-1}+$$
$$+12(R/h)^2(k_1N_{1,\,n-1}+k_2N_{2,\,n-1})-jR^3Z/D$$

$$K=12(R/h)^2(k_1^2+2\nu k_1k_2+k_2^2)$$

Система (2.4) справедлива для любого номера приближения ($n=0$, 1, 2...). При этом функцию с отрицательным номером приближения (этот случай возникает лишь при $n=0$ в последнем уравнении) необходимо считать тождественно равной нулю; $j=1$ при $n=0$; $j=0$ при $n>0$.

При помощи метода прямых из (2.4) получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной α, учитывающие граничные условия на двух противоположных краях оболочки $\beta=0$, β_0.

Решение этих систем уравнений при условиях, заданных на двух других краях оболочки, осуществляется на ЭВМ методом Рунге — Кутта с использованием ортогональной прогонки по Годунову [4].

В качестве примера был выполнен расчет квадратной в плане пологой сферической оболочки, жестко закрепленной по контуру со следующими параметрами: $a_0=0.3$, $12(R/h)^2=10^6$, $\nu=0.15$, $Z=D/R^3$.

Ниже приведены величины $10^9 w/R$ в центре оболочки. В первом столбце указано число полос, второй столбец относится к нулевому приближению, а в третьем, четвертом и пятом столбцах помещены поправки соответственно первого, второго и третьего приближений.

7	540	159	52	17
10	489	148	53	19
15	476	140	52	20

3. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях пологих оболочек. Ограничиваясь изучением достаточно низких частот и соответствующих им напряженно-деформированных состояний, будем учитывать лишь поперечные силы инерции. Тогда после разделения переменных уравнения движения примут вид (1.1), где $X=Y=0$, $Z=\rho h\omega^2 w$, ω — круговая частота свободных колебаний оболочки, ρ — плотность ее материала.

Используя метод возмущений и (в дополнение к (1.4), (1.5)) принимая

$$\lambda^2=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\lambda_n^2,\qquad \lambda^2=\frac{(1-\nu^2)\rho R_0^2\omega}{E} \tag{3.1}$$

найдем

$$L_{33}(w_0)+(AB\lambda_0^2/R_0^2)w_0=0 \tag{3.2}$$

$$L_{33}(w_n)+\left(\frac{AB\lambda_0^2}{R_0^2}\right)w_n=-\left[L_{13}(u_{n-1})+L_{23}(v_{n-1})+\frac{AB}{R_0^2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 w_{n-k}\right] \tag{3.3}$$

Кроме того, для всех приближений ($n=0, 1, 2\ldots$) имеет место система (2.2).

Следует отметить, что в случае свободных колебаний в (1.2), (1.3) необходимо считать $f_i(\alpha,\beta)\equiv 0$.

Для определения частот и форм свободных колебаний оболочки сначала решается задача (1.3), (3.2) на собственные значения, т. е. известная задача о свободных колебаниях пластинки на упругом основании. После определения λ_0^2 и w_0 функции u_0, v_0, как и в любом приближении, находятся путем решения краевой задачи (1.2), (2.2). Для отыскания прогиба во всех последующих приближениях необходимо решать задачу (1.3), (3.3). Можно показать, что решение этой краевой задачи существует лишь при единственном значении λ_n^2.

Действительно, пусть решениями (1.3), (3.2) будут λ_{0j}^2, w_{0j} ($j=1, 2, 3$) и требуется найти последующие приближения для $j=k$. Представим

$$w_{nk}=\sum_{j=1}^{\infty}a_{nkj}w_{0j}\qquad (a_{nkk}=0) \tag{3.4}$$

Проинтегрируем (3.3) по поверхности оболочки Ω, предварительно умножив левую и правую части на w_{0k}. Тогда, учитывая (3.4) и используя условия ортогональности, получим

$$\int_\Omega w_{0j}w_{0k}\,d\Omega=0\ \text{при}\ j\neq k \tag{3.5}$$

$$\lambda_{nk}^2 = -\left\{R_0^2 \int\limits_\Omega [L_{13}(u_{n-1,k}) + L_{23}(v_{n-1,k})] w_{0k}\, d\Omega\right\} \left(AB \int\limits_\Omega w_{0k}^2\, d\Omega\right)^{-1}$$

Отметим, что решение задачи (1.3), (3.3) будет неоднозначным и имеет вид

$$w_{nk}^\circ = w_{nk} + C_{nk} w_{0k} \tag{3.6}$$

где C_{nk} — произвольная постоянная.

Легко проверить, что при получении функций $u_{n-1,k}$, $v_{n-1,k}$, необходимых для вычисления λ_{nk}^2 по (3.5), в правую часть (2.2) можно подставлять как w_{nk}°, так и w_{nk} (это не скажется на величине λ_{nk}^2). При вычислениях определяется w_{nk}° при некотором значении C_{nk}. Однако вместо функции w_{nk}° удобнее использовать w_{nk}. Константа C_{nk} находится умножением (3.6) на w_{0k} и интегрированием полученного равенства по поверхности оболочки с учетом (3.4) и условия ортогональности

$$C_{nk} = \int\limits_\Omega w_{nk} w_{0k}\, d\Omega \left(\int\limits_\Omega w_{0k}^2\, d\Omega\right)^{-1} \tag{3.7}$$

Отметим, что формула (3.7) следует также из условия минимума функционала, равного интегралу по поверхности оболочки от функции w_{nk}^2.

Исследуем сходимость предлагаемого метода решения на примере расчета свободных колебаний квадратной в плане шарнирно опертой по контуру пологой сферической оболочки. Эта задача, как и в статике, имеет точное решение: например, собственным функциям с одинаковой зависимостью от α и β соответствуют частоты свободных колебаний [3]

$$\rho h \omega_m^2 = Eh^3 \lambda_m^4 / [3R^4(1-\nu^2)] + Ehk^2$$

Используя предлагаемый метод, найдем

$$\overset{(m)}{u_0} = u^{(m)}, \quad \overset{(m)}{v_0} = v^{(m)}, \quad \overset{(m)}{w_0} = w^{(m)}, \quad \overset{(m)}{u_n} = \overset{(m)}{v_n} = \overset{(m)}{w_n} = 0 \quad (n>0)$$

$$\rho h \omega_{m0}^2 = Eh^3 k^4 \lambda_m / 3(1-\nu^2) + 2Ehk^2/(1-\nu)$$

$$\rho h \omega_{m1}^2 = -(1+\nu) Ehk^2/(1-\nu), \quad \omega_{mn}^2 = 0 \quad (n>1)$$

Таким образом, итерационный процесс заканчивается после двух итераций и, поскольку $\rho h \omega_m^2 = \rho h (\omega_{m0}^2 + \omega_{m1}^2)$, сходится к точному решению.

Как и в случае статического расчета рассматриваемая задача сведена к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений по координате α. При решении этих систем методом Рунге – Кутта используется ортогональная прогонка по Годунову [4].

Расчеты выполнены для квадратной и прямоугольной в плане пологих сферических оболочек при жестком закреплении по контуру в случае, когда $12(R/h)^2 = 10^6$, $\nu = 0.15$. Длины сторон оболочек в направлении осей α и β равны соответственно a и b. Результаты вычислений первых четырех коэффициентов ряда (3.1) приведены ниже.

a/b	a/R	b/R	λ_0^2	λ_1^2	λ_2^2	λ_3^2	$\Sigma\lambda_n^2$
1	0.30	0.30	2.46	−0.63	−0.06	−0.01	1.77
1	0.10	0.10	15.63	−0.63	$-8\cdot10^{-4}$	10^{-6}	15.0
0.5	0.15	0.30	2.59	−0.32	−0.01	$3\cdot10^{-4}$	2.26

Эти результаты указывают на хорошую сходимость предлагаемого метода решения (для практических целей при определении частот свободных колебаний в рассмотренных задачах достаточно ограничиться лишь нулевым и первым приближениями).

Поступила 16 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А. А.* Метод последовательных приближений в теории пологих оболочек. Уч. зап. Саратовск. ун-та. Сер. механ., 1956.
2. *Михлин С. Г.* Оценка погрешности расчета упругой оболочки как плоской пластины. ПММ, 1952, т. 16, вып. 4.
3. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М., Гостехиздат, 1949.
4. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1961, т. 16, вып. 3.