МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1976

УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЙ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА И УПРУГО СВЯЗАННОЙ С НИМ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ

Н. В. ПАНКОВА, В. Н. РУБАНОВСКИЙ

(Москва)

Рассматривается задача о движении по инерции свободной механической системы, состоящей из динамически симметричного твердого тела и упруго связанной с ним материальной точки. На основе [1, 2] исследована устойчивость и бифуркация всех стационарных вращений системы. Множество этих движений представлено геометрически в виде кривой $k=k(\omega)$, где k – постоянная интеграла площадей, ω – угловая скорость стационарного вращения системы. Распределение устойчивых и неустойчивых движений на ветвях кривой $k=k(\omega)$ подчиняется закону смены устойчивости при фиксированном значении параметра k, при этом изменение степени неустойчивости этих движений происходит лишь в точках бифуркации.

1. Рассмотрим движение по инерции свободной механической системы, состоящей из динамически симметричного твердого тела и точечной массы, связанной с телом при помощи безынерционной пружины и движущейся по прямой, которая лежит в экваториальной плоскости центрального эллипсоида инерции тела.

Введем правые прямоугольные системы осей координат: кенигову $Cxyz$; подвижную $Czz'z''$ с началом в центре масс системы C, вращающуюся вокруг оси z с некоторой угловой скоростью ω; связанную $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре масс тела O и осями, направленными по главным осям центрального эллипсоида инерции.

Не ограничивая общности, будем считать, что материальная точка массы m движется относительно тела по прямой, заданной уравнениями $x_2=b$, $x_3=0$, и значение $x_1=a$ соответствует положению точки, для которого пружина находится в недеформированном состоянии. Отклонение точки от положения $x_1=a$ обозначим через $s=x_1-a$.

При движении системы относительно осей Кенига имеют место интегралы энергии $T+cs^2/2=\mathrm{const}$ и площадей $\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{\gamma}=k=\mathrm{const}$, где T – кинетическая энергия системы, c – жесткость пружины, $\mathbf{G}$ – вектор кинетического момента системы относительно ее центра масс, γ – орт оси z, проекции которого на оси x_i ($i=1, 2, 3$) обозначим через γ_i (при этом $\Gamma=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2-1=0$). Обозначая через $\mathbf{G}_*$ вектор кинетического момента системы относительно точки C в ее движении относительно осей $Czz'z''$, представим интеграл площадей в виде $\mathbf{G}_*\cdot\boldsymbol{\gamma}+\omega S=k$, где S – момент инерции системы относительно оси z. Величину ω выберем так, чтобы в любой момент времени имело место равенство $\mathbf{G}_*\cdot\boldsymbol{\gamma}=0$.

Тогда будем иметь $\omega S=k$, и интеграл энергии можно представить в виде $T_*+W=\mathrm{const}$, где T_* – кинетическая энергия относительного движения системы, $W=k^2/2S+cs^2/2$ – измененная потенциальная энергия системы.

Для S будем иметь выражение

$$S=(J+\mu b^2)\gamma_1^2+[J+\mu(a+s)^2]\gamma_2^2+\{I+\mu[b^2+(a+s)^2]\}\gamma_3^2-2\mu b(a+s)\gamma_1\gamma_2$$

где $\mu=Mm(M+m)^{-1}$, M — масса твердого тела, J и I — осевой и экваториальный моменты инерции тела (далее предполагается $I>J$).

Вместо W будем рассматривать функцию $W_*=W+\lambda\Gamma/2$, где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

2. Согласно теореме Рауса значения переменных γ_1, γ_2, γ_3, s, для которых W имеет стационарные значения, соответствуют некоторым действительным движениям системы и могут быть определены из уравнений

$$\begin{gathered}
\partial W_*/\partial\gamma_1=-k^2\{(J+\mu b^2)\gamma_1-\mu b(a+s)\gamma_2\}/S^2+\lambda\gamma_1=0\\
\partial W_*/\partial\gamma_2=-k^2\{[J+\mu(a+s)^2]\gamma_2-\mu b(a+s)\gamma_1\}/S^2+\lambda\gamma_2=0\\
\partial W_*/\partial\gamma_3=-k^2\{I+\mu[b^2+(a+s)^2]\}\gamma_3/S^2+\lambda\gamma_3=0 \qquad (2.1)\\
\partial W_*/\partial s=-k^2\{\mu(a+s)(\gamma_2^2+\gamma_3^2)-\mu b\gamma_1\gamma_2\}/S^2+cs=0\\
\partial W_*/\partial\lambda={}^1/_2(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2-1)=0
\end{gathered}$$

Решения уравнений (2.1) описывают равномерные вращения системы как одного твердого тела вокруг оси z с угловой скоростью $\omega=kS_0^{-1}$, где индекс ноль указывает, что соответствующая величина вычисляется для рассматриваемого решения уравнений (2.1).

Уравнения (2.1) имеют следующие три семейства решений:

$$\begin{gathered}
\gamma_1=\gamma_2=0,\quad \gamma_3=\pm1,\quad s=\frac{\omega^2\mu a}{c-\omega^2\mu},\quad \lambda=\{I+\mu[b^2+(a+s)^2]\}\omega^2\\
k=\omega S=(I+\mu b^2)\omega+\omega\mu a^2c^2/(c-\omega^2\mu)^2 \qquad (2.2)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\gamma_3=0,\quad (a+s)\gamma_1+b\gamma_2=0,\quad [b^2+(a+s)^2]\gamma_1^2=b^2\\
s=\omega^2\mu a/(c-\omega^2\mu),\quad \lambda=\{J+\mu[b^2+(a+s)^2]\}\omega^2\\
k=\omega S=(J+\mu b^2)\omega+\omega\mu a^2c^2/(c-\omega^2\mu)^2 \qquad (2.3)
\end{gathered}$$

$$\gamma_3=0,\quad b\gamma_1=a\gamma_2,\quad (a^2+b^2)\gamma_2^2=b^2,\quad s=0,\quad \lambda=J\omega^2,\quad k=J\omega \qquad (2.4)$$

Эти решения описывают вращения системы вокруг осей, проходящих через центр масс системы. Для движений (2.2) ось вращения ортогональна экваториальной плоскости эллипсоида инерции тела, а для движений (2.3), (2.4) лежит в экваториальной плоскости; при этом для движений (2.3) точечная масса лежит на прямой, проходящей через центр масс системы и перпендикулярной оси вращения, а для движений (2.4) лежит на оси вращения.

Рассмотрим, например, движения (2.2). Каждому значению ω, определяемому последним из соотношений в (2.2) при фиксированном значении постоянной k, соответствует одно и только одно стационарное вращение системы, которое следует из формул (2.2). Таким образом, семейство стационарных вращений (2.2) можно представить геометрически в виде кривой $k=k(\omega)$, определяемой последним из соотношений в (2.2).

На фиг. 1 семейства движений (2.2) — (2.4) представлены в виде кривых I, II, III соответственно ($\omega_*^2=c\mu^{-1}$).

3. Исследуем устойчивость движений (2.2) — (2.4) по отношению к величинам ω_i, γ_i, s, $s^\cdot=ds/dt$ ($i=1$, 2, 3), где ω_i — проекции на оси x_i вектора угловой скорости тела при движении системы относительно осей $Czz'z''$. С этой целью воспользуемся теоремой Рауса, в силу которой условия устойчивости движений (2.2) — (2.4) можно получить как условия положительной определенности второй вариации δ^2W_* на линейном многообразии $\delta\Gamma/2=\gamma_1{}^\circ\alpha_1+\gamma_2{}^\circ\alpha_2+\gamma_3{}^\circ\alpha_3=0$, где α_i ($i=1$, 2, 3) — возмущения величин γ_i (возмущение величины s обозначим через α).

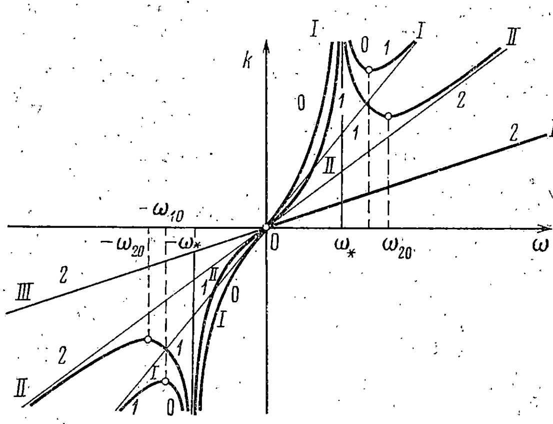
Рассмотрим движения (2.2); для них имеем

$$\delta^2 W_* = [c - \omega^2\mu + 4S^{-1}\omega^2\mu^2(a+s)^2]\alpha^2 + \omega^2\{[I-J+\mu(a+s)^2]\alpha_1^2 - -2\mu b(a+s)\alpha_1\alpha_2 + (I-J+\mu b^2)\alpha_2^2\}$$

Требование положительной определенности $\delta^2 W_*$ приводит к условиям

$$\omega^2[I-J+\mu(a+s)^2]>0, \quad \omega^2(I-J)\{I-J+\mu[b^2+(a+s)^2]\}]>0$$
$$D_1 = c - \omega^2\mu + 4S^{-1}\omega^2\mu^2(a+s)^2 = \mu S^{-1}(\omega_*^2 - \omega^2)dk/d\omega > 0$$

В предположении $I>J$ первые два из этих неравенств удовлетворяются, если $\omega \neq 0$. Анализ последнего неравенства элементарен. Действительно, если $\omega^2<\omega_*^2$, то (фиг. 1, кривая I) $dk/d\omega>0$ и, следовательно, $D_1>0$. Для $\omega^2>\omega_*^2$ имеем $dk/d\omega<0$, если $\omega_*^2<\omega^2<\omega_{10}^2$, и $dk/d\omega>0$, если $\omega^2>\omega_{10}^2$, где $\omega=\pm\omega_{10}$ — вещественные корни уравнения $dk/d\omega=0$. Таким образом, $D_1>0$, если $\omega_*^2<\omega^2<\omega_{10}^2$, и $D_1<0$, если $\omega^2>\omega_{10}^2$. Отсюда на основе теоремы Рауса заключаем, что движения (2.2) для $0<\omega^2<\omega_{10}^2$ $(\omega^2\neq\omega_*^2)$ устой-



Фиг. 1

чивы (при этом степень неустойчивости χ равна нулю); для $\omega^2>\omega_{10}^2$ движения (2.2) неустойчивы и $\chi=1$; значениям $\omega=0$ и $\omega=\pm\omega_{10}$ соответствуют точки бифуркации.

Для семейства движений (2.3) получим

$$\delta^2 W_* = [c - \omega^2\mu\gamma_2^2 + 4S^{-1}\omega^2\mu^2(a+s)^2]\alpha^2 + 2\omega^2\mu b^{-1}\gamma_1[b^2+(a+s)^2]\alpha\alpha_2 + +\omega^2\mu b^{-2}[b^2+(a+s)^2]^2\alpha_2^2 + \omega^2(J-I)\alpha_3^2$$

Условия положительной определенности $\delta^2 W_*$ приводятся к неравенствам

$$\omega^2(J-I)>0, \quad \omega^2\mu b^{-2}[b^2+(a+s)^2]^2>0$$
$$D_2 = \omega^2\mu b^{-2}[b^2+(a+s)^2]^2[c-\omega^2\mu\gamma_2^2+4S^{-1}\omega^2\mu^2(a+s)^2] - -\omega^4\mu^2b^{-2}\gamma_1^2[b^2+(a+s)^2]^2 = S^{-1}\mu^2 b^{-2}[b^2+(a+s)^2]^2\omega^2(\omega_*^2-\omega^2)dk/d\omega>0.$$

Если $I>J$ и $\omega\neq 0$, то первое из этих неравенств не выполняется, второе выполняется, а анализ третьего показывает, что $D_2>0$ для $0<\omega^2<\omega_{20}^2$ $(\omega^2\neq\omega_*^2)$ и $D_2<0$ для $\omega^2>\omega_{20}^2$, где $\omega=\pm\omega_{20}$ — вещественные корни уравнения $dk/d\omega=0$ (при этом $\omega_{20}>\omega_{10}$).

Отсюда заключаем, что для движений (2.3) $\chi=1$, если $0<\omega^2<\omega_{20}^2$ $(\omega^2\neq\omega_*^2)$, и $\chi=2$, если $\omega^2>\omega_{20}^2$. Значениям $\omega=0$ и $\omega=\pm\omega_{20}$ соответствуют точки бифуркации.

Наконец, для движений (2.4) имеем

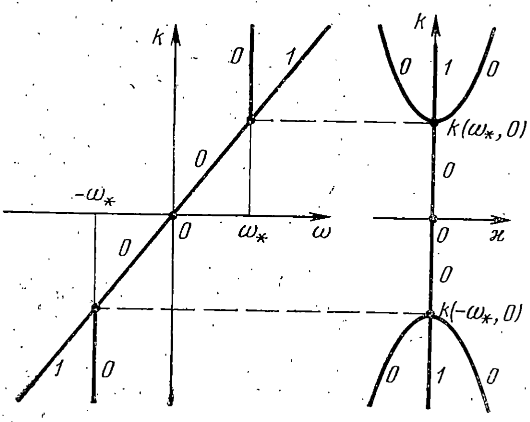
$$\delta^2 W_* = (c-\omega^2\mu\gamma_2^2)\alpha^2+2\omega^2\mu b^{-1}\gamma_2(a^2+b^2)\alpha\alpha_1-$$
$$-\omega^2\mu b\gamma^2(a^2+b^2)^2\alpha_1^2-\omega^2[I-J+\mu(a^2+b^2)]\alpha_3^2$$

Условия положительной определенности $\delta^2 W_*$ имеют вид

$$\omega^2\mu b^{-2}(a^2+b^2)^2<0, \quad \omega^2[I-J+\mu(a^2+b^2)]<0$$
$$D_3=-(c-\omega^2\mu\gamma_2^2)\omega^2\mu b^{-2}(a^2+b^2)^2-\omega^4\mu^2 b^{-2}\gamma_2^2(a^2+b^2)^2=$$
$$=-\omega^2\mu c b^{-2}(a^2+b^2)^2>0$$

Если $I>J$ и $\omega\neq0$, то ни одно из этих неравенств не выполняется. Следовательно, для движений (2.4) $\chi=2$, если $\omega\neq0$; значению $\omega=0$ соответствует точка бифуркации.

Результаты проведенного исследования устойчивости и бифуркации движений (2.2)–(2.4) представлены на фиг. 1. Цифры 0, 1, 2 на ветвях



Фиг. 2

кривых I, II, III указывают степень неустойчивости соответствующих движений. Изменение степени неустойчивости на ветвях кривой $k=k(\omega)$ происходит лишь в точках бифуркации, для которых $\omega=0$, $\pm\omega_{10}$, $\pm\omega_{20}$.

Отметим, что если среди движений (2.3) и (2.4), для которых $\chi=2$, имеются устойчивые, то их устойчивость носит гироскопический характер и разрушается при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией (достаточно частичной диссипации по координате s). Устойчивость движений (2.2), для которых $\chi=0$, носит вековой характер и упрочняется до асимптотической устойчивости при наличии полной диссипации (достаточно частичной диссипации по координате s).

Отметим также, что указанное на фиг. 1 распределение степени неустойчивости движений (2.2)–(2.4) на ветвях кривой $k=k(\omega)$ справедливо и в случае, когда $b=0$.

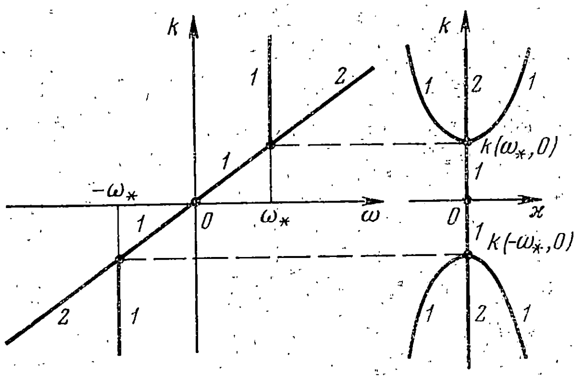
4. Рассмотрим теперь случай, когда $a=0$. В этом случае уравнения (2.1) допускают следующие три семейства решений:

$$\gamma_1=\gamma_2=0, \quad \gamma_3=\pm1, \quad s=\varkappa\delta(\omega^2-\omega_*^2), \quad \lambda=[I+\mu(b^2+s^2)]\omega^2$$
$$k=k(\omega,\varkappa)=\omega S=\{I+\mu[b^2+\varkappa^2\delta(\omega^2-\omega_*^2)]\}\omega \tag{4.1}$$

$$\gamma_3=0,\quad s\gamma_1+b\gamma_2=0,\quad (b^2+s^2)\gamma_1^2=b^2$$
$$s=\varkappa\delta(\omega^2-\omega_*^2),\quad \lambda=[J+\mu(b^2+s^2)]\omega^2$$
$$k=k(\omega,\ \varkappa)=\omega S=\{J+\mu[b^2+\varkappa^2\delta(\omega^2-\omega_*^2)]\}\omega \tag{4.2}$$
$$\gamma_3=0,\quad b\gamma_1=0,\quad b^2\gamma_2^2=b^2,\quad s=0,\quad \lambda=J\omega^2,\quad k=k(\omega)=\omega S=J\omega \tag{4.3}$$

Здесь $\varkappa$ — вещественный параметр; $\delta(x)=0$, если $x\neq 0$, и $\delta(0)=1$.

Рассмотрим семейство движений (4.1). Множество этих движений можно представить [2] геометрически в пространстве $(k,\ \omega,\ \varkappa)$ в виде кривой L, отдельные ветви которой лежат в плоскостях $\varkappa=0$ и $\omega=\pm\omega_*$ и определяются уравнениями $k=k(\omega,\ 0)$, $\varkappa=0$; $k=k(\omega_*,\ \varkappa)$, $\omega=\omega_*$; $k=k(-\omega_*,\ \varkappa)$, $\omega=-\omega_*$. Первая из этих ветвей кривой L имеет по одной



Фиг. 3

общей точке со второй и третьей ветвями. Эти точки соответствуют значениям $\omega=\pm\omega_*$, $\varkappa=0$ и являются точками бифуркации.

На фиг. 2, 3 показан вид проекций кривой L для решений (4.1) (фиг. 2) и (4.2) (фиг. 3). Указанное здесь распределение степени неустойчивости $\chi=0$, 1, 2 на ветвях кривой L подчиняется закону смены устойчивости при фиксированном значении параметра k (изменение степени неустойчивости происходит лишь в точках бифуркации, для которых $\omega=0$, $\varkappa=0$, $\omega=\pm\omega_*$, $\varkappa=0$).

Значению $\omega=0$ соответствует безразличное положение равновесия системы, которое принадлежит каждому из семейств движений (4.1)—(4.3). Исследование движений (4.3) было проведено в п. 3.

Поступила 14 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рубановский В. Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений. София, Теоретична и приложна механика, 1974, год 5, № 1.
2. *Рубановский В. Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений в некоторых задачах динамики твердого тела. ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.