

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
ТРАПЕЦИЕВИДНЫХ ПЛАСТИН  
МЕТОДОМ ГРАНИЧНОЙ КОЛЛОКАЦИИ

А. В. ВЕСТЯК, Е. А. ХВИЛОН

(Москва)

Метод коллокаций для расчета пластин описан в [1]. В [2] метод граничной коллокации использовался для расчета консольных квадратных пластин. Здесь излагается приближенное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии тонких упругих трапециевидных пластин. Разработан вычислительный алгоритм и получены величины прогибов и напряжений для ряда пластин, нагруженных равномерным давлением, в зависимости от соотношения сторон и угла скоса трапеции. Приближенное решение сравнивается с результатами точных расчетов [3].

Как известно, поперечный изгиб тонкой пластинки определяется уравнением

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (1)$$

где  $w(x, y)$  — прогиб,  $h$  — толщина,  $E$  — модуль Юнга,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $q = \text{const}$  — интенсивность поперечной нагрузки. Для свободно опертой трапециевидной пластины (фиг. 1) решение уравнения (1) должно удовлетворять на границе  $\Gamma$  условиям

$$M(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad w(x, y)|_{\Gamma} = 0 \quad (2)$$

На основаниях трапеции удельный изгибающий момент равен

$$M = M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

на боковых сторонах он составляет

$$M = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha \quad (4)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Решение уравнения (1) для равномерно нагруженной свободно опертой пластины будем искать в виде конечной суммы ряда [3]

$$w(x, y) = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) + \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^n \left( A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (5)$$

Функция  $w(x, y)$  в такой форме удовлетворяет уравнению (1) при любых значениях неопределенных коэффициентов  $A_m, B_m$ . Алгебраическая часть суммы (5) описывает прогиб свободно опертой балки. Так как пластина, нагрузка и граничные условия симметричны, то и изогнутая поверхность пластины должна быть симметрична. Функция  $w(x, y)$  в форме (5) является четной относительно  $y$ . Коэффициент  $\pi/a$  в тригонометрической части суммы выбран так, чтобы граничные условия (2) на параллельных сторонах трапеции также удовлетворялись при любых значениях  $A_m, B_m$ .

Функция  $w(x, y)$  зависит от  $2n$  неопределенных коэффициентов  $A_m, B_m$ . В силу метода коллокации для их нахождения следует составить систему из  $2n$  алгебраических уравнений:  $n-1$  уравнений из условия равенства нулю прогибов  $w(x, y)$  в  $n-1$  точках боковой стороны и  $n-1$  уравнений из условия равенства нулю изгибающего момента, нормального к боковой стороне трапеции в тех же точках

$$y_i = x_i \operatorname{ctg} \alpha + b, \quad w(x_i, y_i) = 0,$$

$$M(x_i, y_i) = 0 \tag{6}$$

Так как на боковых сторонах трапециевидной пластины в силу особенностей метода краевые условия (2) выполняются лишь в некоторых точках боковых сторон, то нужно обеспечить равенство нулю суммарного момента, нормального к боковой стороне трапеции. Поэтому присоединим к имеющимся  $2n-2$  уравнениям одно уравнение вида

$$\int_0^a M(x, x \operatorname{ctg} \alpha + b) dx = 0 \tag{7}$$

Последнее недостающее уравнение получим из условия

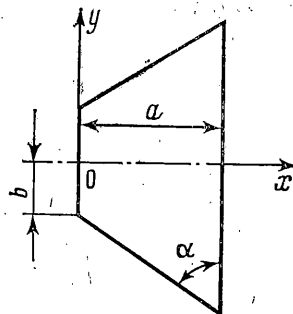
$$\int_0^a w(x, x \operatorname{ctg} \alpha + b) dx = 0 \tag{8}$$

которое позволяет исключить систематическую ошибку при вычислении прогибов в наиболее опасном сечении пластины, соответствующем  $y=0$ .

Точность представления поверхности прогиба  $w$  суммой (5) при фиксированном  $n$  зависит от координат точек коллокаций. Если выбрать узлы равноотстоящими, то имеет место слабая сходимость ряда (5). Это объясняется тем, что функция прогибов  $w(x, y(x))$  не является периодической и делается периодической искусственно, при этом величина погрешности сильно возрастает около обоих концов интервала  $[0, a]$ .

Как известно [2, 4], слабую сходимость можно устранить, если изменить ряд Фурье. Для этого нужно перейти от переменной  $x$  к новой переменной  $\theta$  с помощью преобразования  $x = a \sin \theta$  [4]. Тогда функция  $w = w(\theta)$  преобразуется в чисто периодическую от новой переменной  $\theta$ . Если положить  $\theta_i = \pi i / 2n$ , то для переменной  $x$  точки коллокации должны располагаться по закону  $x_i = a \sin(\pi i / 2n)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Это очень неравномерное распределение точек интерполирования, при котором они накапливаются вблизи двух концевых точек  $x=0$  и  $x=a$ , но при этом величины погрешности имеют один порядок на всем интервале  $[0, a]$ .

Перейдем в формуле (5) к безразмерным величинам. Положим  $a=1$ ,  $qa^4/D=1$ . Тогда, не меняя обозначений, под  $x, y, b, w, M$  будем понимать  $x/a, y/a, b/a, wD/qa^4, M/qa^2$ .



Фиг. 1

В результате функция  $w(x, y)$  примет вид

$$w(x, y) = \frac{x^4 - 2x^3 + x}{24} + \quad (9)$$

$$+ \sum_{m=1}^n (A_m \operatorname{ch} m\pi y + B_m m\pi y \operatorname{sh} m\pi y) \sin m\pi x$$

Соответствующие моменты  $M_x, M_y, M_{xy}$  определяются формулами

$$M_x = (1-x)0.5x + (1-\mu)\pi^2 \sum_{m=1}^n m^2 [A_m \operatorname{ch} m\pi y + B_m (m\pi y \operatorname{sh} m\pi y - 2\mu(1-\mu) \operatorname{ch} m\pi y)] \sin m\pi x$$

$$M_y = \mu(1-x)0.5x - (1-\mu)\pi^2 \sum_{m=1}^n m^2 \left[ A_m \operatorname{ch} m\pi y + B_m \left( m\pi y \operatorname{sh} m\pi y + \frac{2}{1-\mu} \operatorname{ch} m\pi y \right) \right] \sin m\pi x$$

$$M_{xy} = (1-\mu)\pi^2 \sum_{m=1}^n m^2 [A_m \operatorname{sh} m\pi y + B_m (\operatorname{sh} m\pi y + m\pi y \operatorname{ch} m\pi y)] \cos m\pi x \quad (10)$$

Подставляя соотношения (9), (10) в уравнения (6)–(8) и учитывая (4), получим систему  $2n$  линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^n A_m k_{i,m} + \sum_{m=1}^n B_m k_{i,m+n} = c_i \quad (i=1, 2, \dots, 2n) \quad (11)$$

В формулах (9), (10) следует положить  $y = x \operatorname{ctg} \alpha + b$ . Обозначим

$$f_1(x, y) = \operatorname{ch} m\pi y \sin m\pi x, \quad f_2(x, y) = m\pi y \operatorname{sh} m\pi y \sin m\pi x.$$

$$f_3(x, y) = m^2 \pi^2 (1-\mu) [\operatorname{ch} m\pi y \sin m\pi x \cos 2\alpha + \operatorname{sh} m\pi y \cos m\pi x \sin 2\alpha]$$

$$f_4(x, y) = m^2 \pi^2 (1-\mu) \{ \sin m\pi x [m\pi y \operatorname{sh} m\pi y \cos 2\alpha - 2/(1-\mu) \times \\ \times \operatorname{ch} m\pi y (\mu \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)] + \cos m\pi x (\operatorname{sh} m\pi y + m\pi y \operatorname{ch} m\pi y) \sin 2\alpha \}.$$

Коэффициенты при неизвестных  $A_m, B_m$  удовлетворяют соотношениям

$$k_{i,m} = f_1(x_i, y_i), \quad k_{i,m+n} = f_2(x_i, y_i), \quad c_i = -1/24 (x_i^4 + x_i - 2x_i^3)$$

$$k_{i+n,m} = f_3(x_i, y_i); \quad k_{i+n,m+n} = f_4(x_i, y_i), \quad c_{i+n} = -x_i / 2(1-x_i) (\cos^2 \alpha + \mu \sin^2 \alpha).$$

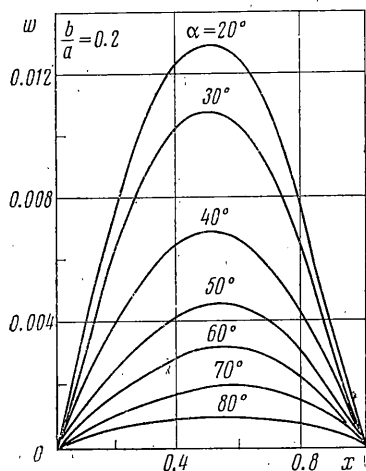
$$k_{n,m} = \int_0^1 f_1(x, y) dx, \quad k_{n,m+n} = \int_0^1 f_2(x, y) dx, \quad c_n = -\frac{1}{120}, \quad k_{2n,m} = \int_0^1 f_3(x, y) dx$$

$$k_{2n,m+n} = \int_0^1 f_4(x, y) dx, \quad c_{2n} = -\frac{1}{12} (\cos^2 \alpha + \mu \sin^2 \alpha) \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

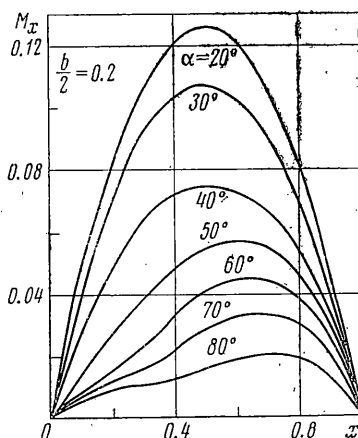
После определения коэффициентов  $A_m, B_m$  функции прогибов и изгибающих моментов найдем из соотношений (9), (10).

Реализация вычислений по изложенным формулам сводится к вычислению матрицы коэффициентов  $k_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, 2n$ ) и решению системы линейных алгебраических уравнений. Составленная программа позволяет вычислять коэффициенты  $A_m,$

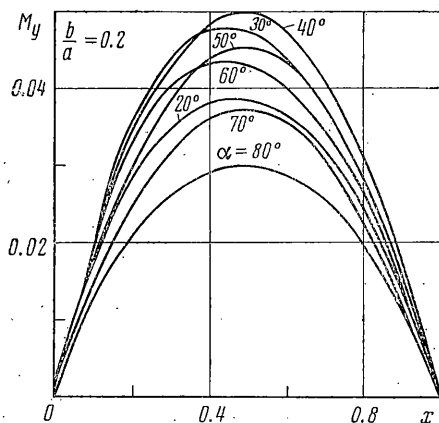
В<sub>m</sub> разложения (5), находить величины прогибов  $w$  моментов  $M_x$  и  $M_y$  в наиболее опасном — осевом сечении при  $y=0$ . Кроме того, в осевом сечении вычисляются  $w_{\max}$ ,  $M_{x\max}$  и  $M_{y\max}$  и их абсциссы. Для контроля точности полученных результатов вычисляются величины прогиба  $w$  и нормального момента  $M$  на боковой стороне трапеции при  $y=x \operatorname{ctg} \alpha + b$ . Если в результате расчетов величины  $|w_{\max}|$ ,  $|M_{\max}|$  на боковой стороне будут малы, то граничные условия (3) выполняются достаточно точно и, следовательно, полученное по методу граничной коллокации приближенное решение близко к точному.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Для увеличения точности естественно выбирать число членов в разложении (5) как можно большим. Однако в выражения для коэффициентов системы (11) входят величины  $\operatorname{sh}(n\pi y)$  и  $\operatorname{ch}(n\pi y)$  и, следовательно, выбор числа  $n$  ограничивается наибольшим машинным числом. С другой стороны, при больших значениях  $n$  приходится оперировать с большими числами и поэтому может иметь место большая вычислительная погрешность. Расчет каждой трапеции проводился для значений  $n=2, 3, \dots, 9$ . Если при каком-нибудь значении  $n$  оказывалось  $\pi n(\operatorname{ctg} \alpha + b) > 30$ , что соответствует значению переменной  $y$  при  $x=1$  на боковой стороне трапеции, то увеличение значения  $n$  заканчивалось. Наиболее точным принимался расчет, соответствующий тому  $n^*$ , при котором принимала наименьшее значение величина

$$\left\{ \max_{x \in [0,1]} |w(x, y)| + \max_{x \in [0,1]} |M(x, y)| \right\}_{y=x \operatorname{ctg} \alpha + b}$$

Исследовалось напряженно-деформированное состояние пластин с углами скоса  $\alpha=20^\circ, 30^\circ, \dots, 90^\circ$  и величиной отношения  $b/a=0, 0.2, \dots, 1$  (фиг. 1). На фиг. 2-4 приведены зависимости прогибов  $w(x, y)$  и изгибающих моментов  $M_x(x, y), M_y(x, y)$  в осевом сечении пластины при  $y=0, b/a=0.2$ .

В таблице приведены наиболее интересные числовые данные. Здесь  $n_{\max}$  — максимальное число членов ряда (5),  $n^*$  — то значение  $n$ , при котором расчет принимался наиболее точным. Далее приводятся абсциссы и значения максимальных величин прогибов  $w$  и моментов  $M_x$  и  $M_y$  в осевом сечении трапеции.

На боковой стороне трапеции величина  $w$  не превышала 0.1% от значения максимального прогиба в осевом сечении.

$\alpha$	$b/a$	$n_{\max}$	$n^*$	$x_1$	$w_{\max}$	$x_2$	$M_{x\max}$	$x_3$	$M_{y\max}$
30°	0.0	5	3	0.50	0.9326	0.50	0.9509	0.50	0.4844
	0.2	4	3	0.50	1.0798	0.50	1.0732	0.50	0.4510
	0.4	4	3	0.50	1.1703	0.50	1.1703	0.50	0.4247
	0.6	3	3	0.50	1.2202	0.50	1.2202	0.50	0.4076
	0.8	3	3	0.50	1.2546	0.50	1.2546	0.50	0.3951
	1.0	3	3	0.50	1.2761	0.50	1.2761	0.50	0.3869
45°	0.0	8	6	0.60	0.2619	0.67	0.4313	0.38	0.4206
	0.2	7	6	0.53	0.5385	0.58	0.6244	0.44	0.5022
	0.4	6	4	0.51	0.8234	0.52	0.8545	0.48	0.4834
	0.6	5	4	0.50	1.0044	0.51	1.0083	0.49	0.4600
	0.8	4	4	0.50	1.1332	0.50	1.1158	0.50	0.4333
	1.0	4	4	0.50	1.1985	0.50	1.1686	0.50	0.4138
60°	0.0	9	6	0.67	0.1025	0.73	0.2507	0.54	0.2569
	0.2	9	9	0.56	0.3236	0.64	0.4525	0.43	0.4366
	0.4	9	9	0.52	0.6224	0.56	0.6898	0.46	0.4975
	0.6	7	7	0.50	0.8696	0.52	0.8968	0.49	0.4854
	0.8	6	3	0.50	1.0309	0.51	1.0308	0.49	0.4553
	1.0	5	3	0.50	1.1387	0.50	1.1200	0.50	0.4306
75°	0.0	9	4	0.75	0.0173	0.81	0.0854	0.64	0.1303
	0.2	9	6	0.59	0.1488	0.69	0.2585	0.49	0.3433
	0.4	9	7	0.52	0.4415	0.57	0.5222	0.48	0.4814
	0.6	9	9	0.50	0.7361	0.52	0.7810	0.49	0.4994
	0.8	8	8	0.50	0.9486	0.50	0.9628	0.49	0.4749
	1.0	7	7	0.50	1.0889	0.50	1.0798	0.50	0.4457

Для равносторонней треугольной ( $\alpha=60^\circ$ ) и прямоугольных ( $b/a=0.6, 0.8, 1$ ) пластин результаты расчетов сравнивались с точными решениями [3]. Расхождения между максимальными значениями  $w, M_x$  и  $M_y$  не превосходили 1.1%.

Для ряда пластин (см. таблицу) координаты максимального прогиба  $w$  и моментов  $M_x$  и  $M_y$  принимают значение  $x=0.5$ , что соответствует прямоугольным пластинам. Переход к эквивалентным прямоугольным пластинам по формулам из [3] приводит к отношению сторон прямоугольника больше пяти. Результаты расчета для пластин с  $\alpha=20^\circ, b/a=0.4$  отличаются на 0.5% от результатов расчета для прямоугольных пластин.

Поступила 24 IV 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Корнишин М. С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М., «Наука», 1964.
2. Петров Ю. П., Лифшиц А. Л., Лифшиц В. Л. Расчет на изгиб консольной пластины методом граничной коллокации. Инж. ж. МГТ, 1967, № 2.
3. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
4. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
5. Вайнберг Д. В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин. Киев, «Будівельник», 1973.