

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ УДАРНОЙ АДИАБАТЫ СИЛЬНО ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ

И. В. СИМОНОВ

(Москва)

Для модели среды с жесткой разгрузкой рассмотрены некоторые обратные задачи определения по распределению остаточной деформации уравнения ударной адиабаты или вида граничного условия. Проведено исследование вопроса оценки погрешности решения за счет пренебрежения упругостью разгрузки. Получена связь между оценками погрешности в прямой и обратной задачах и, тем самым, вопрос оценки в обратной задаче сведен к оценке решения прямой задачи. Приведены примеры.

Характерной особенностью сильно пористых и порошкообразных сред является способность претерпевать значительные необратимые объемные деформации при нагружении. При разгрузке деформирование происходит упруго, а упругая деформация мала по сравнению с пластической. Так, например, у металлических порошков пластическая деформация достигает 100% и более, в то время как упругая не превышает нескольких процентов. Пренебрегая последней, приходим к модели среды с жесткой разгрузкой.

Поскольку рассчитанные приращения температуры вдоль ударных адиабат в области уплотнения металлических порошков оказались невелики [1], для описания среды в этой области нагрузок можно принять уравнения состояния с линейной зависимостью давления от внутренней энергии (уравнение типа Ми — Грюнайзена). Тогда можно показать, что если приближение жесткой разгрузки справедливо для квазистатических процессов, то оно остается в силе и для процессов, отличных от квазистатических, например для процесса ударного нагружения и последующей изэнтропической разгрузки.

Рассматриваются одномерные движения такой среды под действием импульсивных нагрузок. Одной из сравнительно просто измеряемых характеристик движения является распределение остаточной деформации в среде после снятия нагрузки и затухания волн. Обратная задача состоит в определении по известному распределению остаточной деформации одной из функций (вид граничного условия, ударная адиабата), которые в постановке прямой задачи являются заданными. Решение строится для модели среды с жесткой разгрузкой. При этом возникает вопрос оценки погрешности решения за счет упрощения модели, а в связи с этим и вопрос устойчивости решения по параметру. Проведенное исследование позволило свести эти вопросы к аналогичным проблемам в прямой задаче.

1. Пусть среда занимает полупространство $X > 0$ и первоначально покоится. При $t=0$ возникает движение среды от импульсивной нагрузки, прикладываемой к поверхности $X=0$. Ограничимся случаем, когда нагрузка принимает максимальное значение при $t=0$, а затем убывает до нуля. Тогда возникает такая картина движения: в глубь среды распространяется ударная волна, за фронтом ударной волны вещество находится в состоянии разгрузки. Рассмотрим следующие три различных крайевых условия, когда к поверхности прикладывается давление, или заданы скорости частиц при $X=0$ или о поверхность ударяется жесткая пластинка

$$p(0, t) = p_0(t) \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = u_0(t) \quad (1.2)$$

$$p(0, t) = -m_0 du(0, t)/dt \quad (u(0, 0) = u_0) \quad (1.3)$$

Здесь p — давление, если касательными напряжениями в среде можно пренебречь, или нормальное напряжение с обратным знаком, u — массовая скорость, p_0, u_0 — неотрицательные монотонно-убывающие функции. Начальные условия — нулевые.

Система уравнений законов сохранения в форме Лагранжа и соотношения на фронте ударной волны имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (0 < r < r_*(t))$$

$$p_* = u_* r_*, \quad u_* = r_*(v_0 - v), \quad p_* = p_*(v, v_0) \quad (r = r_*(t)) \quad (1.4)$$

Здесь r — массовая лагранжева переменная, связанная с текущей координатой частицы $x = x(X, t)$ и лагранжевой координатой X по формулам

$$dr = \rho dx, \quad r = \int_{x(0,t)}^{x(x,t)} \rho(x) dx = \rho_0 X$$

$\rho = 1/v$ — плотность, звездочкой отмечены величины на фронте, а точка означает производную по t .

Поскольку за фронтом предполагается разгрузка, то $\partial v / \partial t = 0$ при $0 < r < r_*$, а из первых двух уравнений (1.4) следует

$$u = u(t) = u_*(t), \quad p = -u_* r + p(0, t) \quad (0 < r < r_*(t)) \quad (1.5)$$

и в совокупности с третьим из (1.4) последнее из (1.5) дает интеграл

$$ur_* = I(t) = \int_0^t p(0, \tau) d\tau \quad (1.6)$$

Вместо ударной адиабаты принято также задавать зависимость скорости фронта от скорости вещества за фронтом

$$r_* = f(u_*) \quad \text{или} \quad u_* = g(r_*) \quad (1.7)$$

Подставим второе уравнение из (1.7) в (1.6)

$$r_* g(r_*) = I(t) \quad (1.8)$$

В случае (1.3) вместо (1.6) можно получить $u_*(r_* + m_0) = m_0 u_0$.

Рассмотрим следующие обратные задачи. Пусть распределение остаточной плотности после прохождения ударной волны задано или известно из эксперимента. Определим вид граничного условия (1.1) или (1.2) (функции $p_0(t)$ или $u_0(t)$). Уравнение ударной адиабаты считаем известным. На функцию $\rho = \rho(x)$ налагается ограничение: это непрерывная монотонно-убывающая функция. Отметим, что здесь ρ естественным образом задана как функция x . К координате r перейдем по формуле

$$r = \int_0^x \rho(x') dx'$$

Пусть $x = x(r)$ — решение этого уравнения.

Обозначим $\delta(r) = 1/\rho_0 - 1/\rho[x(r)] = v_0 - v[x(r)]$.

Исключая $u = u_*$, из четвертого соотношения (1.4) и (1.7), для $r_* = r_*(t)$ получим уравнение

$$\int_0^{r_*} \frac{\delta(r) dr}{u[\delta(r)]} = t \quad (1.9)$$

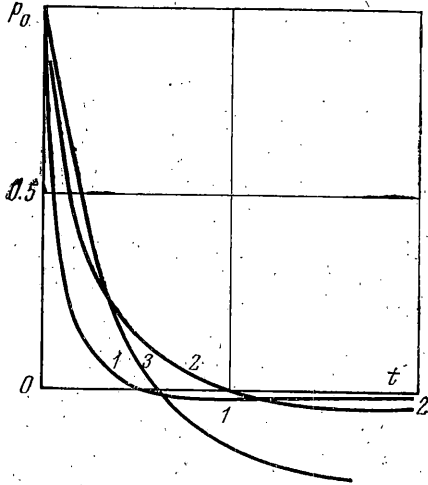
Здесь $u(\delta)$ — решение уравнения $u = \delta f(u)$.

Зная $r_*(t)$, $p_0(t)$ можно определить из (1.8). Решения для $u_0(t)$ дается формулой $u_0(t) = g[r_*(t)]$.

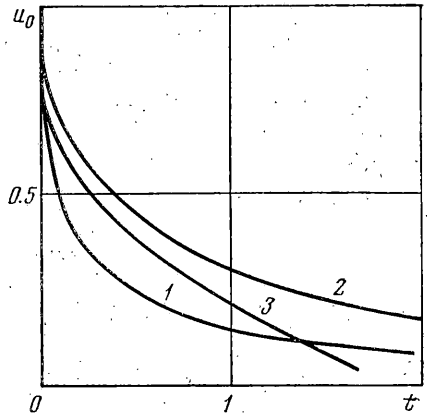
Рассмотрим пример. Пусть распределение остаточной плотности линейно по координате

$$\rho = \rho_1 - \alpha x, \quad 0 < x < (\rho_1 - \rho_0) / \alpha, \quad (\alpha > 0)$$

Определим программу нагружения $p_0(t)$ или $u_0(t)$, которую необходимо осуществить, чтобы получить заданное распределение плотности. Остановимся на случае, когда можно аппроксимировать $f(u)$ линейной зависимостью $f(u) = A + Bu$.



Фиг. 1



Фиг. 2

В [1] представлены многочисленные данные по ударному сжатию металлических порошков. В большинстве случаев зависимость $r_* = f(u)$ с хорошим приближением описывается линейной функцией. Выберем здесь за единицы измерения величины ($\delta_1 = 1/\rho_0 - 1/\rho_1$)

$$p_0 = p_0(0) = A^2 \delta_1 / (1 - B \delta_1)^2, \quad \rho_0, x_0 = (\rho_1 - \rho_0) / \alpha - \text{в случае} \quad (1.1)$$

$$u_0 = u_0(0) = A \delta_1 / (1 - B \delta_1), \quad \rho_0, x_0 = (\rho_1 - \rho_0) / \alpha - \text{в случае} \quad (1.2)$$

Вычислим $\delta(r) = 1 - (\rho_1^2 - 2(\rho_1 - 1)r)^{-1/2}$.

Производя интегрирование в (1.9), приходим к квадратному уравнению относительно $r_*(t)$. Выбирая нужный корень этого уравнения, окончательно получим

$$r_*(t) = [a_1 t - B(a_2 - \sqrt{a_2^2 - 2a_1 t})] a_3^{-1}, \quad r_*^*(t) = [A(1 - B\sqrt{a_2^2 - 2a_1 t})] (1 - B)^{-1} \\ a_1 = A(\rho_1 - 1)(1 - B), \quad a_2 = \rho_1 - B(\rho_1 - 1), \quad a_3 = (\rho_1 - 1)(1 - B)^2 \quad (1.10)$$

Тогда

$$I(t) = r_*(t) r_*^*(t) \delta[r_*(t)], \quad p_0(t) = I'(t), \quad u_0(t) = (r_*^*(t) - A) / B \quad (1.11)$$

Проведены некоторые расчеты по формулам (1.10), (1.11). Результат содержит всего два независимых параметра, в качестве которых выбраны A и ρ_1 . На фиг. 1, 2 показаны зависимости $p_0 = p_0(t)$ и $u_0 = u_0(t)$ для $A = 0.1$, $\rho_1 = 2$ (кривая 1), $A = 0.1$, $\rho_1 = 3$ (кривая 2), $A = 0.4$, $\rho_1 = 2$ (кривая 3). Значения B получились равными соответственно 1.86, 1.38, 1.43. Из графиков на фиг. 1 видно, что в рассмотренных случаях нельзя получить линейное распределение плотности на всем интервале $0 < x < 1$, не меняя знака приложенного давления.

Предположим теперь, что задано одно из граничных условий (1.1) — (1.3) и распределение остаточной плотности. Определим уравнение ударной адиабаты на интервале $\rho_0 < \rho < \rho(0)$.

Эта задача сводится к решению одного из дифференциальных уравнений соответственно условиям (1.1) — (1.3):

$$r_* r_*^* \delta(r_*) = I(t), \quad r_*^* \delta(r_*) = u_0(t), \quad (r_* + m_0) r_*^* \delta(r_*) = m_0 u_0 \quad (1.12)$$

Уравнения (1.12) — с разделяющимися переменными. Решение в неявной форме дается квадратурами

$$\int_0^{r_*} r \delta(r) dr = \int_0^t I(\tau) d\tau, \quad \int_0^{r_*} \delta(r) dr = \int_0^t u_0(\tau) d\tau, \quad \int_0^{r_*} (r+m_0) \delta(r) dr = m_0 u_0 t \quad (1.13)$$

Из третьего и четвертого соотношений (1.4) следует

$$p_* = \delta r_*^2 \quad (1.14)$$

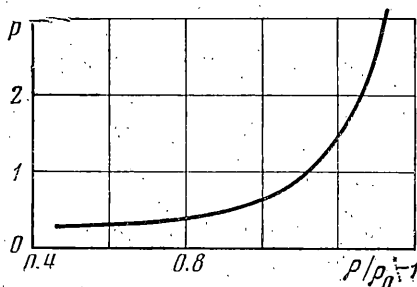
что в совокупности с уравнением $\delta = \delta(r)$ и (1.13) неявно определяет ударную адиабату $p_* = p_*(\delta)$.

Для случая (1.3) проще использовать формулу

$$p_*(r_*) = m_0^2 u_0^2 \delta^{-1}(r_*) (r_* + m_0)^{-2} \quad (1.15)$$

которая получается исключением функции r_* .

Отметим, что в экспериментах по определению ударной адиабаты способом измерения скорости фронта и скорости частиц при выходе ударной волны на свободную поверхность получают одну точку из одного опыта. Измеряя распределение плот-



Фиг. 3

ности спрессованного материала и используя формулы (1.13) — (1.15), из одного опыта можно получить ударную адиабату сразу на интервале $\rho_0 < \rho < \rho(0)$. Естественно при этом, кроме ошибок измерения, возникает ошибка в результате пренебрежения упругой разгрузкой. Некоторые оценки такого приближения даются в п. 2.

Для примера рассмотрим конкретную задачу об ударе пластинки. Экспериментальные данные по распределению плотности железного порошка ПЖ-2М в результате удара стальной пластинки толщиной 5 мм с начальной скоростью $u_0 = 297$ м/сек² (данные взяты из работы [2]) хорошо аппроксимируются зависимостью

$$\rho / \rho_0 = a - bx + cx^2 \quad (a = 2.34, \quad b = 0.029 \text{ мм}^{-1}, \quad c = 10^{-4} \text{ мм}^{-2}, \quad x - \text{в мм}) \quad (1.16)$$

Тогда

$$r_* = \rho_0 (ax - bx^2 / 2 + cx^3 / 3) \quad (1.17)$$

и (1.15) — (1.17) дают неявную зависимость $p_* = p_*(\rho / \rho_0)$.

Рассчитанная по этим формулам ударная адиабата показана на фиг. 3. Так же рассчитана зависимость $X_* = X_*(u)$. Эта зависимость близка к линейной.

2. Оценка решения обратной задачи. Рассмотрим прямую задачу вычисления остаточного распределения плотности и обратную задачу определения уравнения ударной адиабаты для модели среды с изменяющейся при разгрузке плотностью. Считаем, что разгрузка происходит упруго и близка к жесткой, и будем характеризовать упругую разгрузку некоторым малым параметром ε ($0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$), таким, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ модель среды становится жесткой при разгрузке.

Покажем возможность выразить оценку погрешности решения обратной задачи (в данном случае — погрешность вычисления ударной адиабаты за счет упрощения модели среды) через оценку решения соответствующей прямой задачи.

Считая фиксированным одно из краевых условий (1.1), будем изучать соответствие функций $p(\rho)$ — ударных адиабат и функций $r(\rho)$, где под $r(\rho)$ будем понимать решение уравнения $\rho = \rho(r)$ ($\rho(r)$ — остаточное распределение плотности; звездочку в индексе здесь и далее опускаем) как для модели среды с $\varepsilon = 0$ (невозмущенная задача), так и для модели среды $\varepsilon \neq 0$ (возмущенная задача). Формализуем рассматриваемую ситуацию введением операторов, осуществляющих это соответствие.

Пусть E_1 и E_2 — два линейных нормируемых пространства функций вещественного переменного, A_ε и A_0 — возмущенный и невозмущенный операторы, заданные на множестве $P \subset E_1$, $R_\varepsilon \subset E_2$ и $R_0 \subset E_2$ — области значений этих операторов соответственно. Таким образом, если элемент (функция) $p \in P$ и $r_\varepsilon = A_\varepsilon p$, $r_0 = A_0 p$, то $r_\varepsilon \in R_\varepsilon$, $r_0 \in R_0$.

Возмущенный оператор A_ε зависит от параметра ε и определен при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Оператор A_0 получается, если в A_ε положить формально $\varepsilon = 0$.

Обозначим через β разность

$$\beta(\varepsilon; p) = A_\varepsilon p - A_0 p \quad (2.1)$$

Предположим, что отображения A_ε и A_0 взаимнооднозначны и пусть A_ε^{-1} и A_0^{-1} — обратные операторы. Предположим также, что множество $R = R_0 \cap R_\varepsilon$ (пересечение R_0 и всего семейства множеств R_ε ($0 < \varepsilon < \varepsilon_0$)) не пусто и будем обозначать

$$p_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} r, \quad p^0 = A_0^{-1} r, \quad \Delta p = p_\varepsilon - p^0 \quad (r \in R)$$

Установим связь между величинами Δp и β , чтобы свести вопрос оценки решения обратной задачи к оценке решения прямой задачи.

Согласно (2.1) $A_\varepsilon p_\varepsilon - A_0 p_\varepsilon = \beta(\varepsilon; p_\varepsilon)$. Отсюда, в силу взаимнооднозначности $A_\varepsilon p_\varepsilon = r$, $A_0 p_\varepsilon = r - \beta(\varepsilon; p_\varepsilon)$. Умножая обе части последнего равенства на A_0^{-1} , получим $p_\varepsilon = A_0^{-1}(r - \beta)$ и

$$\Delta p = A_0^{-1}(r - \beta(\varepsilon; p_\varepsilon)) - A_0^{-1} r \quad (2.2)$$

Из уравнения (2.2) следует, что если оператор A_0^{-1} непрерывен в R , а

$$\beta(\varepsilon; p_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

(сходимость понимается в сильном смысле как сходимость по норме), то и $\Delta p \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. решение обратной задачи будет устойчиво по параметру ε (это условие необходимо для корректности постановки обратной задачи). Условие (2.3) будет выполнено, если $\beta(\varepsilon, p) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по p .

Пусть $\beta(\varepsilon; p_\varepsilon)$ допускает представление при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\beta(\varepsilon; p_\varepsilon) = \beta(\varepsilon; p^0 + \Delta p) = \beta(\varepsilon; p^0) + \omega(\varepsilon; p^0, \Delta p) \quad (2.4)$$

где ω удовлетворяет условию

$$\lim \|\omega(\varepsilon; p^0; \Delta p)\| / \|\beta(\varepsilon; p^0)\| = 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

Можно интерпретировать (2.4) так, что если получены две точные оценки погрешности решения прямой задачи для двух функций p_ε и p^0 , которые при малых ε близки одна к другой, то и полученные оценки будут отличаться на величину более высокого порядка малости.

Тогда, если оператор A_0^{-1} дифференцируем по Фреше, приближенную оценку Δp получим путем разложения в ряд первого слагаемого в правой части (2.2)

$$\Delta p \approx A_0^{-1}[r - \beta(\varepsilon; p^0)] - A_0^{-1} r \quad (2.5)$$

Строгое рассмотрение затронутых вопросов требует отдельной публикации.

Различными авторами на численном эксперименте показана хорошая сходимость решений волновых задач для среды с упругой разгрузкой к решениям, где разгрузка жесткая. Это дает основание предположить, что они принадлежат тому классу задач, для которого справедливо (2.5).

В случае удара пластинки имеем

$$A_0^{-1}r = m_0^2 u_0^2 \delta^{-1} (r + m_0)^{-2} \quad (2.6)$$

$$\Delta p/p \approx 2(r + m_0)^{-1} \Delta r \approx 2p(r + m_0)^{-1} \Delta x \approx C_1 \Delta \rho / \rho$$

$$\Delta r = \beta(\epsilon, p), \quad \Delta x = x_\epsilon(\rho) - x(\rho), \quad \Delta \rho = \rho_\epsilon(x) - \rho(x), \quad C_1 = 2\rho^2 (r + m_0)^{-1} dx/d\rho$$

Аналогичные оценки можно получить в случаях (1.1) и (1.2). Оценим погрешности решения конкретной задачи, рассмотренной в п. 1. Коэффициент C_1 принимает максимальное значение при $r=0$. Качественные соображения подсказывают, что величина $\Delta \rho(\epsilon; p^0)$ принимает максимальное значение также на границе $r=0$. Вычислим $\Delta p/p$ при $r=0$. Уравнение упругой разгрузки возьмем в виде $p_1 = p_m - c^2(\rho_m - \rho_1)$. Здесь p_m, ρ_m — максимальные значения p_1, ρ_1 , достигнутые в процессе нагружения; c — скорость звука, соответствующая разгрузке.

Из этого уравнения, приравнявая p_1 нулю и учитывая, что

$$p_m(0) = \rho_0 [1 - \rho_0 \rho_m^{-1}(0)] X_*^*(0), \quad \rho_m = \rho(0)$$

можно определить $\Delta \rho = \rho_1(0) - \rho_m(0)$

$$\Delta \rho = -p_m/c^2 = -\rho_0 [1 - \rho_0 \rho_m^{-1}(0)] X_*^{*2}(0)/c^2$$

Значение скорости звука c в уплотненном порошке железа, соответствующее данным задачи, возьмем из таблицы II [1]; остальные параметры даны в [2] или могут быть вычислены: $c \approx 4.4$ км/сек, $X_*^*(0) \approx 0.52$ км/сек, $\rho_m(0)/\rho_0 \approx 2.34$, $\rho_0^{-1} d\rho/dx|_{x=0} \approx 0.29$ см⁻¹, $m_0/\rho_0 \approx 1.7$ см. По формуле (2.6) вычислим $|\Delta p/p| \approx 7.5\%$. Формулу (2.6) можно также использовать для оценки точности результата в зависимости от погрешности измерений или аппроксимации функции $\rho(x)$.

Вместо ударной адиабаты часто используют $X_*^* - u_*$ соотношение. Оценим величину погрешности $(\Delta X_*^*/X_*^*)|_{u_* = \text{const}}$. Из (1.4) следует $\Delta X_*^*/X_*^* \approx (\rho/\rho_0 - 1)^{-1} \Delta \rho/\rho$ и для рассмотренного случая получим $|\Delta X_*^*/X_*^*| \approx 0.85\%$.

Вычисленные оценки погрешности за счет пренебрежения упругостью разгрузки находятся в пределах точности, даваемой другими методами определения соотношений между параметрами на фронте ударной волны в порошкообразных средах. Заметим, что оценка $X_*^* - u_*$ соотношения получилась на порядок меньше оценки ударной адиабаты. Это находится в согласии с тем фактом, что при расчете ударной адиабаты из полученного в эксперименте $X_*^* - u_*$ соотношения для пористой среды погрешность заметно возрастает.

Автор благодарит Н. В. Зволинского за ценные замечания при выполнении работы.

Поступила 17 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Hermann W., Constitutive equation for the dynamic compaction of ductile porous materials. J. Appl. Phys. 1969, vol. 40, № 6, p. 2490–2499. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1970, № 5.)
2. Мальцев А. А., Роман О. В. Распределение плотности в порошковых брикетах, спрессованных энергией метаемой пластины. Докл. АН БССР, 1974, т. 15, № 9.