МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1976

УДК 539.3

О ДИФРАКЦИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

А. Н. КОВШОВ

(Москва)

Описывается разностная схема типа «пространственный крест», которая применяется для решения задачи о дифракции нестационарной упругой волны на цилиндрической полости. Система уравнений упругости записывается в полярных координатах и имеет вид гиперболической системы первого порядка относительно напряжений и скоростей. Представлены результаты расчетов.

В работе [1] рассмотрена дифракция стационарных упругих волн на полости. В работах [2, 3] с некоторой степенью приближения получено решение о дифракции нестационарной волны на полости. В работе [4] дано численное решение о дифракции упругой волны на диске.

1. Физическая постановка задачи такова: на цилиндрическую полость, находящуюся в безграничной упругой среде, падает продольная упругая волна. Требуется определить поле напряжений около полости и движение ее стенок. Задача сводится к отысканию решения уравнений плоской динамической теории упругости с начальным условием, задаваемым падающей волной и граничными условиями на полости. Кроме этого «отраженные» волны должны удовлетворять условию излучения на бесконечности.

Пусть плотность среды $\rho_0=1$, скорости продольных и поперечных волн $a=\sqrt{\lambda+2\mu}$, $b=\sqrt{\mu}$, радиус полости r_0; λ, μ — постоянные среды. Введем безразмерные напряжения $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}'/(\lambda+2\mu)$ скорости, $u_i=u_i'/a$ и время $t=t'a/r_0$. Штрихом помечены размерные величины. Положим $a=1$, $r_0=1$, $u_r=u$, $u_\theta=v$, $\sigma_r=\sigma$, $\sigma_\theta=s$, $\tau_{r\theta}=\tau$. Тогда система уравнений относительно скоростей и напряжений примет вид

$$\sigma_{,t}=u_{,r}+(1-2\mu)\frac{1}{r}(v_{,\theta}+u) \tag{1.1}$$

$$s_{,t}=\frac{1}{r}(v_{,\theta}+u)+(1-2\mu)u_{,r},\quad \tau_{,t}=\mu v_{,r}+\mu\left(\frac{u_{,\theta}}{r}-\frac{v}{r}\right)$$

$$u_{,t}=\sigma_{,r}+\frac{\tau_{,\theta}}{r}+\frac{\sigma-s}{r},\quad v_{,t}=\frac{s_{,\theta}}{r}+\tau_{,r}+\frac{2\tau}{r}$$

Запятая с индексом означает частную производную по соответствующему аргументу.

Решение задачи о дифракции определяется начальными и граничными условиями. Начальное условие состоит в том, что при $t\leqslant 0$ решение должно совпадать с напряжениями и скоростями, которые задаются плоской продольной волной формы $f(\xi)$. При этом за $t=0$ принимается время, когда волна достигла полости (фиг. 1).

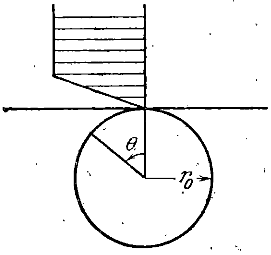
В силу симметрии относительно плоскости $\theta=0$, решение определяется для углов $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, а при $\theta=0$ и $\theta=\pi$ ставятся условия

$$\tau=v=0,\quad u_{,\theta}=\sigma_{,\theta}=s_{,\theta}=0 \tag{1.2}$$

Будем считать, что поверхность полости свободна от напряжений, т. е.

$$\sigma=0,\quad \tau=0 \quad \text{при} \quad r=r_0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{1.3}$$

Пользуясь линейностью задачи, будем искать решение системы (1.1) в виде $w=w_0+w_1$, где w_0 — вектор с компонентами σ_0, s, τ, u, v, задаваемый падающей волной, а w_1 соответствует отраженным волнам.



Фиг. 1

При $r=1$ напряжения от падающей волны, вычисленные для среды без полости, имеют значения

$$\sigma_0=f(\xi)(1-2\mu\cos^2\theta)$$
$$\tau_0=-f(\xi)\mu\sin 2\theta,\qquad \xi=\cos\theta-1+t \tag{1.4}$$

Для w_1 получим нулевые начальные условия, условия симметрии (1.2), а на границе $r=1$ в силу (1.3) и (1.4) должно выполняться

$$\sigma_1=-f(\xi)(1-2\mu\cos^2\theta),\qquad \tau_1=f(\xi)\mu\sin 2\theta \tag{1.5}$$

Для построения численного решения необходимо ограничить расчетную область некоторой границей, на которой нужно поставить дополнительные условия. Выберем эту границу в виде окружности $r=R$, а условия на ней возьмем, исходя из соображений, аналогичных применяемым в работах [4, 5]. Будем считать, что вблизи границы $r=R$ продольное и поперечное движение локально описывается плоскими волнами, распространяющимися от центра $r=0$ вдоль радиуса. Поэтому положим при $r=R$

$$\sigma_1+u_1=0,\qquad \tau_1+\sqrt{\mu}\,v_1=0 \tag{1.6}$$

2. Решение w_1 строилось с помощью метода конечных разностей. Расчетная область в полярных координатах представляет собой прямоугольник $1\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Считалось, что напряжения определены в точках типа (i, j, k), т. е. $\sigma(r, \theta, t)=\sigma(1+ih, jf, k\Delta t)$, а скорости — в точках $(i+{}^1/_2, j+{}^1/_2, k-{}^1/_2)$. Во внутренних точках применяется схема типа пространственный крест. Первые три уравнения системы (1.1) центрируются в точках $(i, j, k+{}^1/_2)$, остальные два — в точках $(i+{}^1/_2, j+{}^1/_2, k)$ и в этих точках имеем аппроксимацию второго порядка точности по всем трем переменным. При условии независимости решения от угла θ стандартным способом анализировалась устойчивость. Для этого случая можно показать, что модули собственных значений матрицы перехода при $\Delta t/h<1$ ограничены величиной $1+c\Delta t$, т. е. условие Неймана выполняется. Нулевые начальные условия задавались при $k=0$. Так как граница проходит по узлам, где определены напряжения, то условие (1.5) определяет σ_1 и τ_1 при $k=1$ непосредственно. Условие (1.6) аппроксимировалось следующим образом:

$$\sigma_1(m, j, k+1)+u_1^0(m, j, k+{}^1/_2)=0$$
$$\tau_1(m, j, k+1)+\sqrt{\mu}\,v_1^0(m, j, k+{}^1/_2)=0 \tag{2.1}$$

где нолик вверху означает осреднение по углам $f(j+{}^1/_2)$ и $f(j-{}^1/_2)$ и экстраполирование на границу $r=R$.

Условие (1.2) аппроксимировалось как $\tau(i, \theta, k+1)=0$, $\delta_\theta\sigma=0$, $\delta_\theta s=0$, где δ_θ — односторонний оператор, аппроксимирующий производную по углу со вторым порядком точности.

Условия (1.5) и (2.1) не определяют величину s на границе на верхнем слое по времени. Для ее определения использовались бихарактеристические соотношения для системы (1.1) [6, 7]. На характеристической плоскости, вдоль луча, по которому она касается поверхности $r=\mathrm{const}$, получаем соотношение

$$(s-(1-2\mu)\sigma)_{,t}-4\mu(1-\mu)\frac{1}{r}(v_{,\theta}+u)=0 \tag{2.2}$$

Соотношение (2.2) использовалось для определения величины на верхнем слое по времени при $r=1$ и $r=R$, при этом скорости экстраполировались на границу и использовались центральные разности.

Для расчета «резких» форм падающих волн применялось послойное сглаживание решения, которое аналогично используемому в работе [8], но приспособленное к схеме «крест».

Прибавляемый и вычисляемый на верхнем слое по времени диссипативный член имеет вид

$$\begin{aligned} d_{ij} = \frac{\omega}{2}\frac{\tau}{rf}\{(\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i,j})\,|\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i,j}|-(\varphi_{i,j}-\varphi_{i,j-1})\,|\varphi_{i,j}-\varphi_{i,j-1}|\}+ \\ +\frac{\omega}{2}\frac{\tau}{rh}\left\{\left(r+\frac{h}{2}\right)(\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i,j})\,|\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i,j}|-\right. \\ \left.-\left(r-\frac{h}{2}\right)(\varphi_{i,j}-\varphi_{i-1,j})\,|\varphi_{i,j}-\varphi_{i-1,j}|\right\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

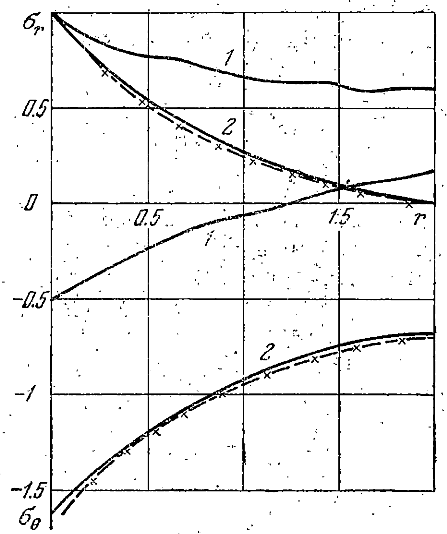
Величина ω подбиралась экспериментально. Можно заметить, что $d_{i,j}$ составляется аналогично диссипативному вязкому члену в форме предложенной Бурстейном с матрицей $Q_{i,j+1/2}=\omega|\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i,j}|$ (см. [9]). Кроме $d_{i,j}$, к сглаживаемой функции добавлялся по аналогии с работой [8] «диагональный» диссипативный член. Для точек границы применялось сглаживание аналогичное (2.3).

3. Предложенная разностная схема проверялась на модельной задаче. В качестве таковой была рассмотрена задача Ламе об определении статистических напряжений в безграничном полупространстве с цилиндрической полостью, нагруженной $\sigma_r=1$, $\tau=0$ и $\sigma_r|_\infty=0$. Перед сравнением результатов расчета сделаем замечание относительно условий (1.6) и (2.1). Если предположить, что при $t\to\infty$ существует решение задачи, то оно должно удовлетворять условию (1.6) при $t\to\infty$, т. е. $\sigma_r=0$, $\tau=0$, так как в установившемся решении скорости u_1 и v_1 равны нулю. Поэтому, применяя метод установления, можно лишь ожидать, что получим решение, удовлетворяющее условию $\sigma_r=\tau=0$ при $r=R$. В точной же статистической задаче напряжения при $r=R$ отличны от нуля.

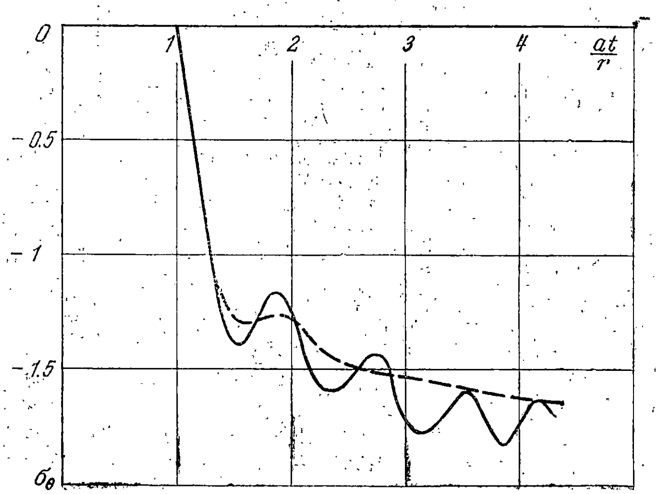
На фиг. 2 представлены результаты сравнения. На двумерной сетке рассчитывалась одномерная задача с условиями $\sigma_r=H(t)$, $\tau=0$ при $r=1$ и условиями (2.1) при $R=2$. $H(t)$ – «ступенчатая» функция. Параметры схемы принимались следующими $h=0.1$, $f=0.156$, $\Delta t=0.05$. Расчет производился без сглаживания. Представлены зависимости $\sigma_r(r)$ и $\sigma_\theta(r)$ для различных времен t – кривая *1* соответствует $t=0.05\times40=2$ (волна «пробежала» один диаметр), кривая *2* – $t=0.05\times240=12$ (волна прошла шесть диаметров). Крестиками отмечено точное решение задачи Ламе с условиями

$$\sigma_r=1,\quad \tau=0 \quad \text{при} \quad r=1;\quad \sigma_r=0,\quad \tau=0 \quad \text{при} \quad r=2$$

Видно, что разностное решение при $t=12$ очень мало отличается от точного статического. Также видно, что величина σ_θ при $r=1$ сильно зависит от величины R. Поэтому, чтобы успешно применять метод установления, нужно максимально увеличить R. Как показывает расчет при $R=5$,



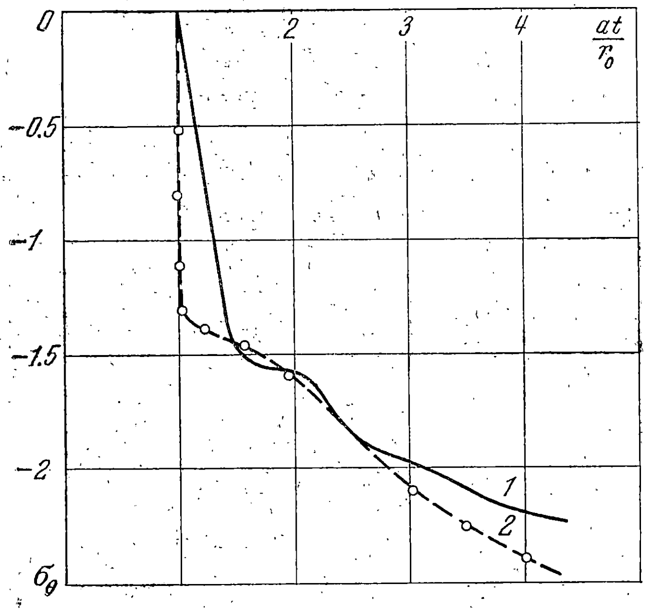
Фиг. 2



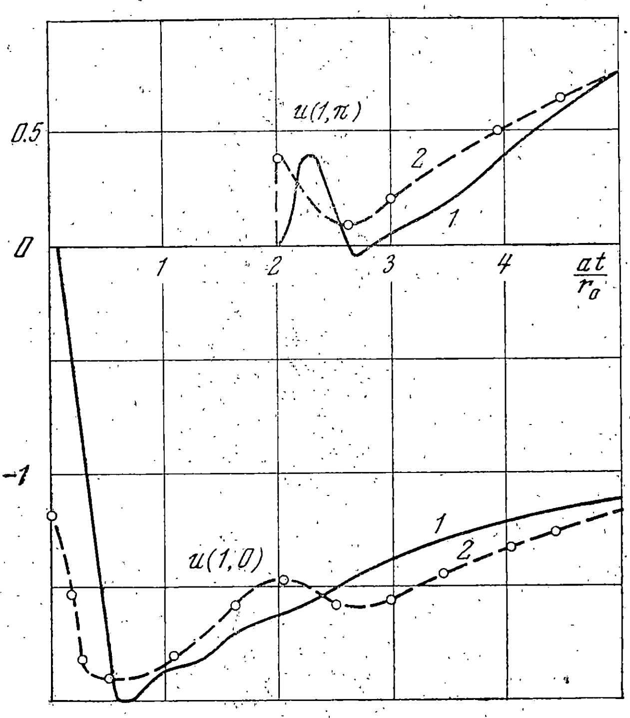
Фиг. 3

разностное решение при $t=12$ практически не отличается от статического решения задачи Ламе с условиями $\sigma_r=1$ при $r=1$, $\sigma_r=0$ при $r=\infty$, которое имеет вид $\sigma_r=1/r^2$, $\sigma_\theta=-1/r^2$.

При расчете двумерной задачи, из-за памяти ЭВМ (БЭСМ-3М) величина R не может быть достаточно большой. Поэтому решение, полученное методом установления, будет несколько отличаться от соответствующего статического решения для безграничной среды. Влияние величины R в двумерном случае было проверено следующим образом. Применялся переменный шаг h_i по координате r, такой, что $h_i=r_if$, $r_i=r_0(1+f)^{(i)}$, $r_0=1$. При этом последние два уравнения для скоростей системы (1.1) аппроксимируются со вторым порядком точности, а при аппроксимации уравнений для напряжений в ошибку аппроксимации входит член, пропорциональный разности (h_i-h_{i-1}). Но при этом $h_i-h_{i-1}=f^2(1+f)^{i-1}$, т. е. второй порядок точности сохраняется. Поэтому применение переменного шага h_i



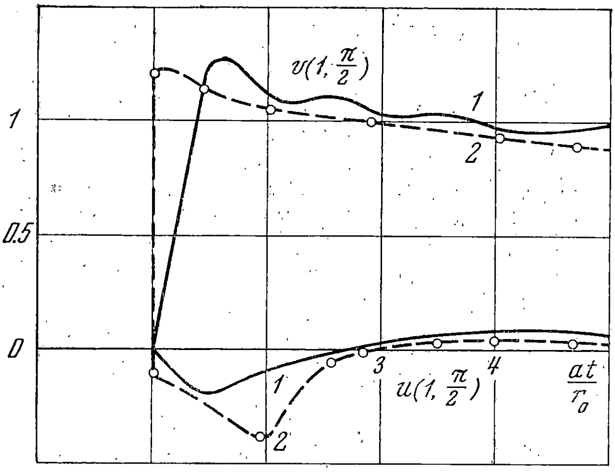
Фиг. 4



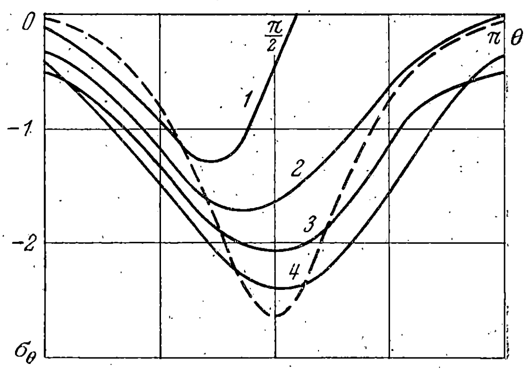
Фиг. 5

несколько увеличивало ошибку аппроксимации при больших r, но увеличивало значение R (например, при $i=12$, $f=0.157$ величина $R=5.76$).

Расчеты задачи о дифракции производились на двумерной сетке, содержащей 13×21 расчетный узел. Применялось сглаживание, в результате чего устойчивый счет был при $\Delta t/\sqrt{h^2+f^2}=1/\sqrt{2}$. При этом очень точно передавалась скорость распростране-



Фиг. 6



Фиг. 7

ния волн, и фронты были довольно резкими. Фиг. 3 показывает влияние сглаживания. На ней изображена величина $\sigma_\theta(1,\pi/2)$ как функция времени. При этом бралось $h=0.15$, $f=0.156$, величина $R=2.8$. Кривая *1* соответствует сглаживанию ($\omega=0.2$), кривая *2* – без сглаживания. Время прихода волны в эту точку $t=1$, форма падающей волны — «ступенька размазанная» на два шага по времени.

Решение, полученное с переменным шагом h_i, сопоставлялось с решением Барона [2, 3]. При этом выбирались следующие параметры: $\omega=0.2$, $f=0.156$, $\Delta t=0.155$, $\mu=0.333(b/a=\sqrt{0.333})$, $R=5.78$. Форма падающей волны – ступенька размазанная на два шага по времени.

Заметим, что решение, построенное в [2, 3], основано на замене суммы бесконечного ряда двумя первыми слагаемыми, и как там указывается, справедливо для $t>2$. Для времени t, при котором влияние внешней границы $r=R$ еще не сказывается, конечно-разностное решение отличается от точного на величины порядка ошибок аппроксимации. Результаты сравнения показаны на фиг. 4, где дана величина σ_θ при $\theta=\pi/2$ как функция времени. Кривая *1* – конечно-разностное решение при $R=5.76$, кривая *2* – результат работы [2]. На фиг. 5, 6 представлено сравнение скоростей точек полости. Кривые *1* – разностное решение, кривые *2* – результаты работы [3]. На фиг. 5 представлены значения скоростей $u(1,0)$ и $u(1,\pi)$ в зависимости от времени (т. е. на полости при $\theta=0$ и $\theta=\pi$). Скорость $u(1,0,t)$ достигает значения, равного -2 (как при отражении плоской волны от свободной границы) при $t=0.5$, и стремится к стационарному значению, равному -1. На фиг. 6 представлены значения скоростей $v(1,\pi/2)$ и $u(1,\pi/2)$ в зависимости от времени[1]. Результаты,

[1] Примеры расчетов полей напряжений вблизи полости при других параметрах и формах падающей волны см. в работе: Ковшов А. Н. Численное решение задач о дифракции упругой волны на цилиндрической полости и массивном цилиндре. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1976, препринт № 71.

представленные на фиг. 7, показывают распределение напряжения σ_θ на полости по углу θ для различных значений времени t и демонстрируют характер приближения нестационарного решения к статическому. Кривые *1*, *2*, *3*, *4* соответствуют времени t=1.09, 2.18, 3.26, 4.35. Пунктирная кривая представляет распределение σ_θ, соответствующее решению статической задачи для упругого пространства с цилиндрической полостью, свободной от напряжений и с условиями на бесконечности $\sigma_r = -(1-2\mu\sin^2\theta)$, $\sigma_\theta=-(1-2\mu\cos^2\theta)$, $\tau_{r\theta}=\mu\sin 2\theta$, которые обусловливаются прошедшей плоской продольной упругой волной. Это распределение имеет вид $\sigma_\theta = -2(1-\mu(1+2\cos 2\theta))$.

Автор благодарит Н. В. Зволинского за постоянное внимание к работе.

Поступила 18 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Яворская И. М.* Дифракция плоских стационарных упругих волн на гладких выпуклых цилиндрах. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
2. *Baron M. L., Matthews A. T.* Diffraction of a pressure wave by a cylindrical cavity in an elastic medium. Trans. ASME Ser. E, J. Appl. Mech.. 1961, vol. 28, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Е, 1961, т. 28, № 3.)
3. *Baron M. L., Parnes R.* Displasments and velocities produced by the diffraction of a pressure wave by a cylindrical cavity in an elastic medium. Trans. ASME Ser. E, J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No 2. (Рус перев.: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Е, 1962, т. 29, № 2.)
4. *Скобеев А. М.* Дифракция упругой волны на диске. ПМТФ, 1972, № 3.
5. *Скобеев А. М.* Взаимодействие упругой волны с пластинкой. ПМТФ, 1972, № 2.
6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
7. *Clifton R. J.* A difference method for plane problems in dynamic elasticity. Quart Appl. Math., 1967, vol. 25, No. 1, p. 97–116. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1968, № 1 (108).)
8. *Ляхов В. И.* Сглаживание и искусственная вязкость при расчетах двумерных нестационарных течений с разрывами. В сб.: Численные методы в механике сплошной среды, вып. 3, Новосибирск, 1974.
9. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972.