

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ, С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА

И. К. НАВАЛ, П. Ф. САБОДАШ

(Кишинев, Москва)

Известно, что в металлических материалах процесс теплопроводности осуществляется в основном за счет диффузии свободных электронов, причем время установления теплового равновесия между электронным газом и кристаллической решеткой имеет порядок 10^{-10} сек. В этой связи при рассмотрении весьма быстрых динамических процессов деформации, учитывая теплообмен между решеткой и электронным газом (учет инерции теплового потока), в работе [1] впервые было получено уравнение теплопроводности с конечной скоростью распространения тепла. Работа [2] посвящена определению времени релаксации твердых тел на основе экспериментальных данных по соударению образцов в различных диапазонах температур. Линейная связанная задача термоупругости для изотропного однородного полупространства с учетом конечной скорости распространения тепла аналитическими методами исследовалась в работе [3]. Та же задача для неограниченного полупространства при условии, что поля деформаций и температур между собой не связаны, рассматривалась в [4]. Некоторые вопросы теплопроводности при конечной скорости распространения тепла обсуждались в [5]. Методами интегральных преобразований в [6] решалась динамическая задача термоупругости для плоско-параллельного слоя постоянной толщины при малых значениях времени.

В основу данного исследования положена линейная система модельных уравнений динамической связанной задачи термоупругости с учетом конечной скорости распространения тепла, полученная в работе [2]. Показано, что эта система принадлежит к гиперболическому типу и имеет четыре семейства прямолинейных характеристик. Разностная схема решения задачи для слоя построена на основе характеристических соотношений и позволяет определить искомые функции как во внутренних узлах характеристической сетки, так и в узлах, лежащих на границе области. Результаты числовых расчетов представлены в виде графиков изменения температуры и напряжения во времени в фиксированных точках наблюдения и распределения их по пространственной координате для заданных моментов времени.

1. Постановка задачи и вывод характеристических соотношений. Плоско-параллельный упругий слой конечной толщины h , изготовленный из линейного однородного изотропного материала, механические свойства которого характеризуются плотностью ρ , скоростью продольной волны a и скоростью поперечной волны b , в системе неподвижных прямоугольных координат x, y, z занимает область $0 < x < h$, $-\infty < y, z < +\infty$. Предположим, что в начальный момент времени $t=0$ граничная поверхность слоя $x=0$, $-\infty < y, z < \infty$ подвергается заданному тепловому и механическому воздействию, которое сводится к заданию на ней температуры и нормального напряжения. Цель работы состоит в исследовании параметров термоупругого волнового поля внутри слоя $0 < x < h$ при $t > 0$.

Будем считать, что одномерный процесс распространения и отражения термоупругих волн в слое при одноосной деформации в направлении оси x описывается линеаризованной системой волновых уравнений [2, 3]:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) + (3\lambda + 2\mu) \alpha T_0 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \right) \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\sigma_x(x, t) = (\lambda + 2\mu) \varepsilon - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y(x, t) = \sigma_z(x, t) = \lambda \varepsilon - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0)$$

которая получена на основе обобщенного закона Фурье [1], записанного для x_i направления $q_i + \tau_0 \partial q_i / \partial t = -k \partial T / \partial x_i$.

Здесь λ и μ — параметры Ляме, T_0 — начальная температура слоя, c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме (совпадающая с теплоемкостью при постоянном давлении), α — коэффициент линейного расширения, k — коэффициент теплопроводности, $\tau_0 \partial q_i / \partial t$ — «тепловая инерция», τ_0 — время тепловой релаксации. Искомыми являются температура $T(x, t)$, смещение частиц $u(x, t)$, а также отличные от тождественного нуля компоненты тензора напряженного состояния $\sigma_x(x, t)$ и $\sigma_y(x, t)$. Механические и теплофизические параметры предполагаются не зависящими от температуры.

Исходную систему уравнений будем интегрировать в области $0 < x < h$, $t > 0$ при граничных условиях, выражающих силовое и тепловое воздействие на поверхностях, ограничивающих слой

$$T(x, t) |_{x=0} = f(t) \quad (t \geq 0), \quad \sigma_x(x, t) |_{x=0} = f_1(t) \quad (t \geq 0)$$

$$T(x, t) |_{x=h} = \sigma_x(x, t) |_{x=h} = 0 \quad (t \geq 0) \quad (1.2)$$

и нулевых начальных условиях

$$u(x, t) = u'(x, t) = T(x, t) = T'(x, t) = 0 \quad (t \leq 0) \quad (1.3)$$

отвечающих состоянию покоя в начальный момент времени.

Начально-краевую задачу (1.1) — (1.3) при помощи безразмерных координат и функций

$$x^\circ = \frac{a \rho c_v}{k} x, \quad t^\circ = \frac{a^2 \rho c_v}{k} t, \quad x_* = \frac{a \rho c_v h}{k}, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \sigma_x^\circ = \frac{\sigma_x}{(3\lambda + 2\mu) \alpha T_0}, \quad \sigma_y^\circ = \frac{\sigma_y}{(3\lambda + 2\mu) \alpha T_0}$$

$$u^\circ = \frac{\rho a^3}{(3\lambda + 2\mu) \alpha T_0} \frac{c_v \rho u}{k}$$

$$\beta = \left(\frac{a}{\kappa} \right)^2, \quad \kappa = \sqrt{\frac{k}{\rho c_v \tau_0}}, \quad \beta_1 = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 T_0}{(\lambda + 2\mu) \rho c_v}$$

можно представить в эквивалентной форме

$$\Delta \theta_{xx} - \theta_t - \beta \theta_{tt} = \beta_1 (u_{xt} + \beta u_{ttx}) \quad (1.4)$$

$$u_{xx} - u_{tt} = \theta_x, \quad \sigma_x(x, t) = u_x - \theta, \quad \sigma_y = \sigma_z = [1 - 2(b/a)^2] u_x - \theta$$

$$\theta(x, t) |_{x=0} = f(t) \quad (t \geq 0), \quad \sigma_x(x, t) = f_1(t) \quad (t \geq 0)$$

$$\theta(x, t) |_{x=x_*} = \sigma_x(x, t) |_{x=x_*} = 0 \quad (t \geq 0)$$

$$u(x, t) = u_t(x, t) = \theta(x, t) = \theta_t(x, t) = 0 \quad (t \leq 0, 0 < x < x_*)$$

Индекс внизу означает частное дифференцирование по соответствующей переменной. Здесь и в дальнейшем градус у независимых и зависимых переменных для простоты опущен. Определяющая система взаимосвязанных уравнений динамической термоупругости (1.4) зависит от двух безразмер-

ных параметров β и β_1 , причем параметр β представляет собой квадрат отношения скорости упругой продольной волны a и тепловой волны κ , а параметр β_1 соответствует связности задачи. Если $\beta_1=0$, то поля температуры и деформации внутри слоя между собой не связаны. Используя обозначение $\omega \equiv u_x$ и дифференцируя второе уравнение системы (1.4) по x ,

Константы задачи	Алюминий	Медь	Железо
λ (дин/см ²)	$5.6 \cdot 10^{11}$	$9.5 \cdot 10^{11}$	$10.5 \cdot 10^{11}$
μ (дин/см ²)	$2.6 \cdot 10^{11}$	$4.5 \cdot 10^{11}$	$7.7 \cdot 10^{11}$
E (дин/см ²)	$7.0 \cdot 10^{11}$	$12.0 \cdot 10^{11}$	$21.0 \cdot 10^{11}$
K (дин/см ²)	$7.3 \cdot 10^{11}$	$12.5 \cdot 10^{11}$	$16.0 \cdot 10^{11}$
ν	0.34	0.34	0.28
ρ (г/см ³)	2.7	8.9	7.85
a (м/сек)	6320	4560	5624
b (м/сек)	3100	2250	3148
τ_0 (сек)	$2.38 \cdot 10^{-12}$	$6.06 \cdot 10^{-12}$	$0.82 \cdot 10^{-12}$
c_v (кал/г·град)	0.217	0.093	0.113
α (10^{-6} г/град)	26	17	12
k (кал/см·сек·град)	0.504	0.920	0.161
β	1.1051	1.1336	1.4269
β_1	0.035	0.019	0.008
k_1	0.8834	0.8967	0.8268
k_2	1.0768	1.0474	1.0125

относительно функции $\omega(x, t)$ и $\theta(x, t)$ можно получить линейную гиперболическую систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\theta_{xx} - \theta_t - \beta \theta_{tt} = \beta_1 (\omega_t + \beta \omega_{tt}), \quad \omega_{xx} - \omega_{tt} = \theta_{xx}$$

которая на плоскости xt имеет следующие четыре семейства характеристических соотношений:

$$[\beta k_1^2 - (1 + \beta \beta_1)] (d\omega_t \mp k_1 d\omega_x) - \beta (d\theta_t \mp k_1 d\theta_x) = \gamma dt \quad \text{вдоль} \quad dx = \pm k_1 dt \quad (1.5)$$

$$[\beta k_2^2 - (1 + \beta \beta_1)] (d\omega_t \mp k_2 d\omega_x) - \beta (d\theta_t \mp k_2 d\theta_x) = \gamma dt \quad \text{вдоль} \quad dx = \pm k_2 dt \quad (1.6)$$

$$k_{1,2} = \left[\frac{1 + \beta + \beta \beta_1}{2\beta} \mp \sqrt{\left(\frac{1 + \beta + \beta \beta_1}{2\beta} \right)^2 - \frac{1}{\beta}} \right]^{1/2}, \quad \gamma = \theta_t + \beta_1 \omega_t$$

Представленная система характеристических соотношений для несвязной теории ($\beta_1=0$) значительно упрощается и принимает вид

$$(\beta - 1) (d\omega_t \mp d\omega_x) - \beta (d\theta_t \mp d\theta_x) = \theta_t dt \quad \text{вдоль} \quad dx = \pm dt \quad (1.7)$$

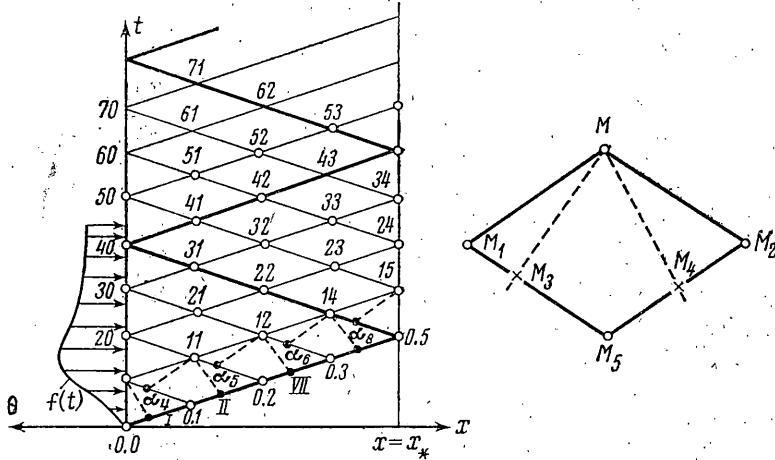
$$-\beta \left(d\theta_t \mp \frac{1}{\sqrt{\beta}} d\theta_x \right) = \theta_t dt \quad \text{вдоль} \quad dx = \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}} dt \quad (1.8)$$

В таблице для трех материалов, где время релаксации τ_0 выбрано в соответствии с опытными данными [7], а другие термомеханические параметры заимствованы из [8, 9], приведены расчетные значения безразмерных коэффициентов задачи β , β_1 , k_1 и k_2 при $T_0=20^\circ \text{C}$.

Эти расчеты обнаруживают, что параметр связности β_1 для алюминия, меди и железа имеет величину порядка 10^{-2} , а параметр $\beta > 1$, откуда следует, что скорость тепловой волны меньше скорости упругой продольной волны a . Прямолинейные соотношения характеристик (1.7), (1.8) показывают, что для несвязной теории ($\beta_1=0$) в слое от граничной поверхности $x=0$ начинается распространяться упругая волна с единичной скоростью $dx/dt=1$, за которой следует тепловая волна с меньшей скоростью $dx/dt=\beta^{-1/2}$. Для связной теории ($\beta_1 \neq 0$) не существует ни чисто упругой,

ни чисто тепловой волны, а в материале слоя распространяются и многократно отражаются от его граничных плоскостей два термоупругих фронта со скоростями k_1 и k_2 ($k_2 > k_1$), причем непосредственно за передним фронтом $x = k_2 t$ обе функции $\omega(x, t)$ и $\theta(x, t)$ отличны от нуля.

Четыре семейства прямолинейных характеристик (1.5) и (1.6) и дифференциальные соотношения на них позволяют в плоскости перемен-



Фиг. 1

ных xt построить характеристическую сетку и разработать соответствующую разностную схему решения задачи, основанную на использовании соотношений на характеристиках (фиг. 1). Разностная схема строится в предположении, что

$$f_1(t) = 0, f(0) = 0, df/dt|_{t=0} = 0.$$

Тогда обе функции $\omega(x, t)$ и $\theta(x, t)$ вместе со своими первыми производными на переднем фронте термоупругой волны $x = k_2 t$ обращаются в нуль. На фиг. 1 сплошными линиями обозначены термоупругие фронты $dx = \pm k_2 dt$, фронты $dx = \pm k_1 dt$ показаны пунктирными отрезками.

Покажем, как можно определить функции в узлах слоя $t = \Delta t$ (10-15), если на нулевом слое они известны. Узлы, лежащие на левой границе $x = 0$, рассчитываются так. Значения θ_i и ω_i в точке 10 заданы из граничных условий, а дифференциальные соотношения (1.5) и (1.6) — на характеристиках, проходящих через точку 10, записанные в конечно-разностной форме

$$\begin{aligned} & [\beta k_2^2 - (1 + \beta \beta_1)] [(\omega_i^{10} - \omega_i^{01}) + k_2(\omega_x^{10} - \omega_x^{01})] - \beta [(\theta_i^{10} - \theta_i^{01}) + \\ & + k_2(\theta_x^{10} - \theta_x^{01})] = (\theta_i + \beta_1 \omega_i)^{01} \Delta t \text{ вдоль } \Delta x = -k_2 \Delta t \\ & [\beta k_1^2 - (1 + \beta \beta_1)] [(\omega_i^{10} - \omega_i^{01}) + k_1(\omega_x^{10} - \omega_x^{01})] - \\ & - \beta [(\theta_i^{10} - \theta_i^{01}) + k_1(\theta_x^{10} - \theta_x^{01})] = (\theta_i + \beta_1 \omega_i)^{01} \Delta t \\ & \text{вдоль } \Delta x = -k_1 \Delta t \end{aligned} \tag{1.9}$$

дают два линейных уравнения для определения двух неизвестных ω_x^{10} и θ_x^{10} через известные величины.

Внутренний узел характеристической сетки (точка 11) находится из линейной системы четырех алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & [\beta k_2^2 - (1 + \beta \beta_1)] [(\omega_i^{11} - \omega_x^{10}) - k_2(\omega_x^{11} - \omega_x^{10})] - \beta [(\theta_i^{11} - \theta_i^{10}) - \\ & - k_2(\theta_x^{11} - \theta_x^{10})] = (\theta_i + \beta_1 \omega_i)^{10} \Delta t \text{ вдоль } \Delta x = k_2 \Delta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [\beta k_2^2 - (1 + \beta \beta_1)] [(\omega_i^{11} - \omega_i^{02}) + k_2 (\omega_x^{11} - \omega_x^{02})] - \beta [(\theta_i^{11} - \theta_i^{02}) + \\
 & \quad + k_2 (\theta_x^{11} - \theta_x^{02})] = (\theta_i + \beta_1 \omega_i)^{02} \Delta t \text{ вдоль } \Delta x = -k_2 \Delta t \quad (1.10) \\
 & [\beta k_1^2 - (1 + \beta \beta_1)] [(\omega_i^{11} - \omega_i^{\alpha_1}) - k_1 (\omega_x^{11} - \omega_x^{\alpha_1})] - \beta [(\theta_i^{11} - \theta_i^{\alpha_1}) - \\
 & \quad - k_1 (\theta_x^{11} - \theta_x^{\alpha_1})] = (\theta_i + \beta_1 \omega_i)^{\alpha_1} \Delta t \text{ вдоль } \Delta x = k_1 \Delta t \\
 & [\beta k_1^2 - (1 + \beta \beta_1)] [(\omega_i^{11} - \omega_i^{\alpha_2}) + k_1 (\omega_x^{11} - \omega_x^{\alpha_2})] - \beta [(\theta_i^{11} - \theta_i^{\alpha_2}) + \\
 & \quad + k_1 (\theta_x^{11} - \theta_x^{\alpha_2})] = (\theta_i + \beta_1 \omega_i)^{\alpha_2} \Delta t \text{ вдоль } \Delta x = -k_1 \Delta t
 \end{aligned}$$

полученной заменой дифференциальных соотношений (1.5) и (1.6) на характеристиках, проходящих через точку 11, их конечно-разностными аналогами. Причем значения величин в промежуточных точках α_1 , α_2 , α_3 и α_4 находятся линейной интерполяцией между соседними точками.

Функции в узле 15, лежащем на правой границе $x=x_*$, находятся по формулам, аналогичным (1.9).

Таким образом, значения четырех величин ω_x , ω_t , θ_x и θ_t в узлах временного слоя $t=\Delta t$ можно найти, используя их значения на переднем фронте термоупругой волны $x=kt$ и граничные условия на поверхностях $x=0$, x_* . Зная эти функции на слое $t=\Delta t$, по аналогичным формулам их можно рассчитать на слое $t=2\Delta t$ и т. д. Выбирая Δx достаточно малым, шаг за шагом можно найти осевую деформацию ω и температуру θ во всей области $0 < x < x_*$, $t > 0$ с учетом падающих и многократно отраженных плоских фронтов. Температура в узле 11 находится в соответствии с зависимостью

$$\begin{aligned}
 \theta^{11} &= 1/2 [\theta^{\alpha_1} + \theta^{\alpha_2} + (\theta_x^{\alpha_1} - \theta_x^{\alpha_2}) \Delta x_1 + (\theta_t^{\alpha_1} + \theta_t^{\alpha_2}) \Delta t_1] \\
 \Delta x_1 &= x^{11} - x^{\alpha_1}, \quad \Delta t_1 = t^{11} - t^{\alpha_1}
 \end{aligned}$$

На этом завершается построение вычислительного алгоритма, основанного на использовании характеристических соотношений в плоскости координата — время.

2. Анализ числовой информации и выводы. Указанная разностная схема для исходных данных $x_*=1$, $f(t)=t^2 e^{-t}$ при $t \geq 0$, $\Delta x=0,01$ была реализована на ЭВМ БЭСМ-4М для пластинок из алюминия, меди и железа, а результаты числовых расчетов представлены графиками на фиг. 2–4 соответственно. На этих графиках сплошными линиями показано изменение во времени нормального напряжения σ_x и температуры θ на середине толщины слоя $x=0,5$ для несвязной теории. Эти же зависимости для связной теории ($\beta_1 \neq 0$) отмечены на графиках пунктирными линиями.

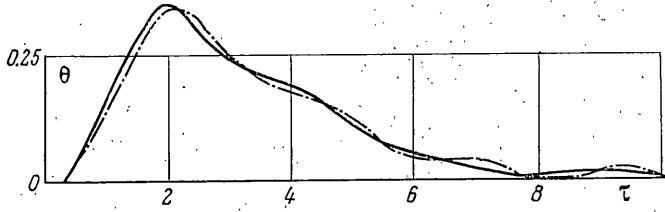
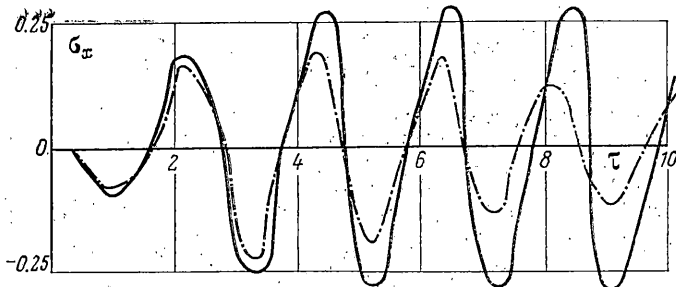
Учет влияния конечной скорости распространения тепла при $\beta_1=0$ в отличие от классического случая ($\beta=0$) приводит к образованию в конструкции двух фронтов волн: упругого, распространяющегося с единичной скоростью, и теплового со скоростью распространения, равной $\beta^{-1/2}$. Для связной теории скорости двух термоупругих волн равны значения k_1 и k_2 .

Анализ числовой информации показывает, что при $\beta_1=0$ первым в заданную точку наблюдения в момент $t=0,5$ вступает упругий фронт, который вызывает сжимающие напряжения, а затем в момент времени $t=0,5\sqrt{\beta}$ в эту точку приходит фронт тепловой волны, вызывающий уменьшение амплитуды напряжения σ_x . Передний фронт упругой волны сжатия в момент $t=1$ достигает свободной от напряжений поверхности $x_*=1$ и отражается от нее волной растяжения, которая достигает сечения $x=0,5$ в момент $t=1,5$ и которая вызывает заметные растягивающие напряжения. Этот процесс попеременного растяжения — сжатия периодически повторяется во времени.

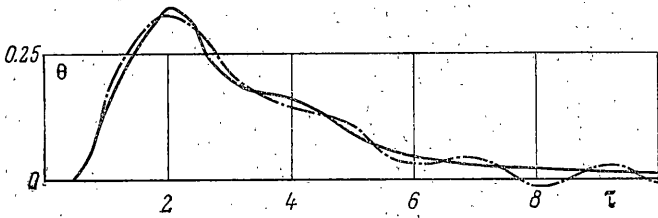
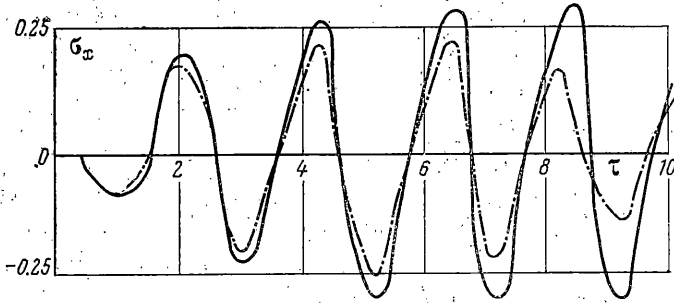
Изменение температуры θ на середине толщины слоя носит более плавный характер, в значительной степени повторяя форму граничного воздействия с тем отличием, что на кривой имеются небольшие флуктуации, обусловленные гиперболической природой уравнения для температуры.

Для связной теории распространение термоупругих фронтов происходит аналогичным образом.

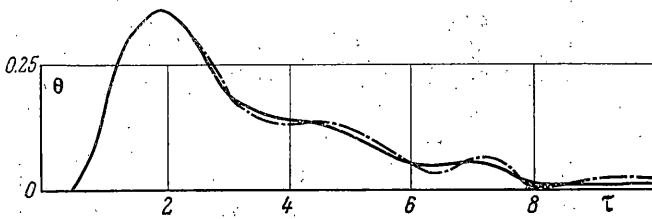
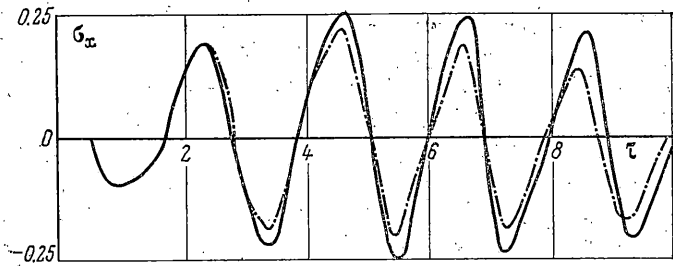
Сравнение результатов по напряжениям для связной и несвязной теории показывает, что значения σ_x на начальном этапе процесса отличаются незначительно, но с ростом t это различие амплитуд может достигать двух раз (причем во всех случаях при $\beta_1 \neq 0$ значения σ_x по абсолютной величине меньше соответствующих



Фиг. 2



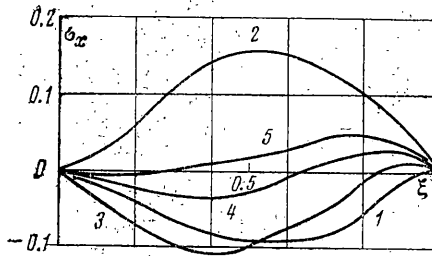
Фиг. 3



Фиг. 4

значений, достигаемых при $\beta_1=0$). Температуры при этом во всех рассмотренных случаях отличаются на доли процента. Увеличение параметра β приводит к уменьшению амплитуд для σ_x .

Распределение σ_x по толщине пластины $0 < x < 1$ при исходных данных $\beta=1.1051$, $\beta_1=0.035$ для фиксированных моментов времени $t=1, 2, 3, 5, 7$ показано на фиг. 5



Фиг. 5

(кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответственно). На момент времени $t=1$ передний фронт упругой волны сжатия достигает свободной границы $x_*=1$ и напряжение σ_x по всей толщине $0 < x < 1$ является сжимающим. Отраженная от свободной границы волна растяжения в момент $t=2$ достигает поверхности $x=0$ и на этот момент напряжение σ_x всюду является растягивающим. В последующие моменты времени в результате многократного наложения волновых фронтов образуются два участка, на одном из которых σ_x является сжимающим, а на втором — растягивающим.

Поступила 19 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaliski S. Wave equations of thermoelasticity. Bull. Acad. Polon. sci. ser. sci techn., 1965, vol. 13, No. 5.
2. Zord H. W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. J. Mech. and Phys. Solids, 1967, vol. 15, No. 5.
3. Попов Б. Е. Динамическая связанная задача термоупругости для полупространства с учетом конечной скорости распространения тепла. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
4. Михайлов М. Д. О динамических задачах термоупругости. Инж.-физ. ж., 1969, т. 16, № 1.
5. Харитонов В. В. К вопросу о теплопроводности при конечной скорости распространения тепла. Инж. физ. ж., 1969, т. 16, № 4.
6. Мышкина В. В. Совместная динамическая задача термоупругости для слоя в случае малых значений времени. Инж. ж. МГТ, 1968, № 4.
7. Труэлл Р., Эмбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М., «Мир», 1972.
8. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
9. Карякин Н. И., Быстров К. Н., Киреев П. С. Краткий справочник по физике. М., «Высшая школа», 1969.