МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1976

УДК 531.383

ВЫВОДЕ ФОРМУЛЫ МАГНУСА

Л. О. ФИЛИППОВА

(Красноярск)

Приводятся два новых вывода формулы Магнуса [1–5]. Первый основывается на интегрировании некоторого неголономного соотношения с преобразованием контурного интеграла в интеграл по площади и позволяет провести оценку точности [6–8]. Второй сводится к подсчету угловой скорости поворота полного кинетического момента системы.

1. Пусть $\xi\eta\zeta$, $x_2y_2z_2$, $x_1y_1z_1$ — декартовы системы координат с общим началом в центре карданова подвеса, жестко связанные с неподвижным основанием, внешним и внутренним кольцами карданова подвеса соответственно. При этом ось x_2 направлена по оси вращения внешнего кольца и совпадает с осью ξ неподвижной системы координат. Ось y_1, совпадающая с осью y_2 системы $x_2y_2z_2$, направлена по оси вращения кожуха. Далее, α — угол поворота системы $x_2y_2z_2$ относительно неподвижной системы координат вокруг их общей оси x_2, а β — угол поворота системы $x_1y_1z_1$ относительно $x_2y_2z_2$ вокруг оси y_1. Ось вращения ротора совпадает с осью z_1. Угол поворота его относительно кожуха обозначим γ.

Пусть A_2 — момент инерции внешнего кольца относительно его оси вращения, $A_1B_1C_1$ — моменты инерции кожуха относительно осей x_1, y_1, z_1 соответственно, A, C — экваториальный и полярный моменты инерции ротора.

Система уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе

$$
\begin{gathered}
I(\beta)\alpha^{\cdot\cdot}+H\beta^{\cdot}\cos\beta+2K\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}\sin\beta\cos\beta=0\\
\Theta\beta^{\cdot\cdot}-H\alpha^{\cdot}\cos\beta-K\alpha^{\cdot 2}\sin\beta\cos\beta=0\\
\frac{d}{dt}(C\gamma^{\cdot}+C\alpha^{\cdot}\sin\beta)=0
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

имеет три первых интеграла

$$
I(\beta)\alpha^{\cdot}+H\sin\beta=k,\qquad I(\beta)\alpha^{\cdot 2}+\Theta\beta^{\cdot 2}=h,\qquad C(\gamma^{\cdot}+\alpha^{\cdot}\sin\beta)=H \tag{1.2}
$$

в которых введены обозначения

$$
I(\beta)=A_2+(A_1+A)\cos^2\beta+C_1\sin^2\beta,\qquad K=C_1-A_1-A,\qquad \Theta=A_1+B_1
$$

Представим первое соотношение (1.2) в виде

$$
I(\beta)\frac{d\alpha}{d\beta^{\cdot}}\beta^{\cdot\cdot}+H\sin\beta=k
$$

Подставляя сюда значение $\beta^{\cdot\cdot}$ из второго уравнения (1.1), имеем

$$
I(\beta)\alpha^{\cdot}\frac{\cos\beta}{\Theta}(H+K\alpha^{\cdot}\sin\beta)\frac{d\alpha}{d\beta^{\cdot}}=k-H\sin\beta
$$

Учитывая снова (1.2), подставляем в последнюю формулу выражение для $\alpha^{\cdot}$

$$(k-H\sin\beta)\,\frac{\cos\beta}{\Theta}\left(H+K\sin\beta\,\frac{k-H\sin\beta}{I(\beta)}\right)\frac{d\alpha}{d\beta^{\cdot}}=k-H\sin\beta$$

Отсюда сразу следует

$$\frac{\cos\beta}{\Theta}\left[H+K\sin\beta\,\frac{k-H\sin\beta}{I(\beta)}\right]\frac{d\alpha}{d\beta^{\cdot}}=1$$

$$d\alpha=\frac{\Theta I(\beta)\,d\beta^{\cdot}}{\cos\beta\,(HI(\beta)+K\sin\beta\,(k-H\sin\beta))}$$

Таким образом, приращение $\Delta\alpha$ угла α за одно колебание по β определяется криволинейным интегралом

$$\Delta\alpha=\oint\limits_{C} f(\beta)\,d\beta^{\cdot} \tag{1.3}$$

где C — траектория на фазовой плоскости β, $\beta^{\cdot}$, а

$$f(\beta)=\frac{\Theta I(\beta)}{\cos\beta\,[H(A_2+A_1+A)+kK\sin\beta]} \tag{1.4}$$

Переходя в (1.3) к интегралу по площади, получаем

$$\Delta\alpha=-\iint\limits_{S}\frac{\partial f(\beta)}{\partial\beta}\,d\sigma \tag{1.5}$$

Здесь S — площадь, охватываемая контуром C на плоскости β, $\beta^{\cdot}$. Производная функции (1.4) после некоторых преобразований приобретает вид

$$\frac{\partial f}{\partial\beta}=\frac{\Theta[(A_2+C_1)(HA_0+kK\sin\beta)\sin\beta+A_0K\cos^2\beta\,(H\sin\beta-k)]}{\cos^2\beta\,(HA_0+kK\sin\beta)^2}$$

$$A_0=A_2+A_1+A$$

Так как эта функция непрерывна в области S, то найдется такая внутренняя точка β^*, что согласно (1.5) приращение угла α за период нутационных колебаний можно представить следующим образом:

$$\Delta\alpha=-\left.\frac{\partial f}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta^*}S$$

Используя результаты линеаризованной теории гироскопа в кардановом подвесе [8]

$$\alpha=Q\cos\nu t,\qquad \beta=\beta_0+QI(\beta_0)^{1/2}\Theta^{-1/2}\sin\nu t,\qquad \nu=H[I(\beta_0)\Theta]^{-1/2}\cos\beta_0 \tag{1.6}$$

и выбирая в качестве β^* начальное значение, удовлетворяющее равенству $\sin\beta_0=k/H$, приходим к следующим соотношениям:

$$S=\pi\nu Q^2I(\beta_0)\Theta^{-1}=\pi\alpha_a^{\cdot}QI(\beta_0)\Theta^{-1}$$

$$\Delta\alpha=-\frac{(A_2+C_1)\operatorname{tg}\beta_0}{H\cos\beta_0}\,\pi\alpha_a^{\cdot}Q,\qquad \alpha_a^{\cdot}=\nu Q$$

Отсюда для средней скорости ухода внешнего кольца получаем выражение

$$\Delta\alpha/T = -[(A_2+C_1)\alpha_a^{\cdot 2}\operatorname{tg}\beta_0]/2H\cos\beta_0$$

представляющее собой известную формулу Магнуса.

2. Обозначим проекции кинетического момента $\mathbf{G}$ системы на оси x_2, y_2, z_2 через G_{x_2}, G_{y_2}, G_{z_2}. Согласно теореме о кинетическом моменте

$$\frac{dG_{x_2}}{dt} = 0, \quad \frac{dG_{y_2}}{dt} - G_{z_2}\alpha^{\cdot} = 0, \quad \frac{dG_{z_2}}{dt} + G_{y_2}\alpha^{\cdot} = K_{z_2} \tag{2.1}$$

$$G_{x_2} = (A_2 + (A_1+A)\cos^2\beta + C_1\sin^2\beta)\alpha^{\cdot} + H\sin\beta, \qquad G_{y_2} = (A+B_1)\beta^{\cdot}$$

$$G_{z_2} = H\cos\beta + (C_1 - A_1 - A)\alpha^{\cdot}\sin\beta\cos\beta$$

В (2.1) K_{z_2} – момент сил реакции в опорах внешнего кольца относительно оси, перпендикулярной плоскости этого кольца. Из (2.1) следует, что

$$K_{z_2} = -H\beta^{\cdot}\sin\beta + (C_1 - A_1 - A)\alpha^{\cdot\cdot}\sin\beta\cos\beta +$$

$$+ (C_1 - A_1 - A)\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}\cos 2\beta + (A+B_1)\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}$$

Пользуясь последним выражением, где H считаем достаточно большим ($H \gg K\alpha^{\cdot}$), можно показать, что взаимная ориентация векторов $\mathbf{K}_{z_2}$ и $\mathbf{G}$ в плоскости, их содержащей, остается постоянной в том смысле, что момент $\mathbf{K}_{z_2}$ увлекает кинетический момент $\mathbf{G}$ в сторону уменьшения угла α.

Принимая этот факт во внимание, воспользуемся теоремой о секториальной скорости.

Секториальная скорость кинетического момента системы определяется выражением

$$2\frac{d\sigma}{dt} = \left[\mathbf{G}\times\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right] = \begin{Vmatrix} x_2^\circ & y_2^\circ & z_2^\circ \\ G_{x_2} & G_{y_2} & G_{z_2} \\ 0 & 0 & K_{z_2} \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

Здесь x_2°, y_2°, z_2° — единичные векторы осей $x_2y_2z_2$, а σ — площадь, заметаемая вектором $\mathbf{G}$. Проекцию секториальной скорости на ось x_2 обозначим $\sigma_{x_2}^{\cdot}$

$$\sigma_{x_2}^{\cdot} = G_{y_2}K_{z_2}/2 \tag{2.3}$$

С другой стороны

$$\sigma_{x_2}^{\cdot} = \frac{1}{2}[G_{y_2}^2 + G_{z_2}^2]\frac{d\varphi}{dt} \tag{2.4}$$

Здесь $\varphi^{\cdot}$ — скорость поворота проекции кинетического момента на плоскость, перпендикулярную оси x_2. Из (2.3) и (2.4)

$$\varphi^{\cdot} = G_{y_2}K_{z_2}/(G_{y_2}^2 + G_{z_2}^2) \tag{2.5}$$

Подставляя сюда значения входящих величин из (2.1), можно убедиться, что при достаточно больших H и $\beta \neq 0$ скорость $\varphi^{\cdot}$ имеет постоянную отрицательную составляющую. Однако удобнее воспользоваться другим выражением для K_{z_2}. Его можно определить из уравнения движения кожуха относительно оси, совпадающей с осью ротора. Это уравнение согласно [9] имеет вид

$$C_1\alpha^{\cdot\cdot}\sin\beta + (C_1 + B_1 - A_1)\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}\cos\beta = -A_2\alpha^{\cdot\cdot}\sin\beta + K_{z_2}\cos\beta$$

Отсюда и из (2.5) получаем

$$\varphi^{\cdot} = \frac{\Theta\beta^{\cdot}[(A_2+C_1)\alpha^{\cdot\cdot}\operatorname{tg}\beta_0 + (C_1+B_1-A_1)\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}]}{H^2\cos^2\beta[1 + K\alpha^{\cdot}\sin\beta/H]^2 + \Theta^2\beta^{\cdot 2}} \tag{2.6}$$

Подставляя сюда решения линеаризованной системы из (1.6) и осредняя по периоду нутационных колебаний, можно снова получить формулу Магнуса. Однако если в (2.6) подставить значение $\alpha^{\cdot\cdot}$ из первого уравнения (1.1), то $\varphi^{\cdot}$ можно представить в виде

$$\varphi^{\cdot}=\frac{\Theta\beta^{\cdot 2}[-(A_2+C_1)\sin\beta(H+2K\alpha^{\cdot}\sin\beta)+I(\beta)(C_1+B_1-A_1)\alpha^{\cdot}]}{I(\beta)[\cos^2\beta(H+K\alpha^{\cdot}\sin\beta)^2+\Theta^2\beta^{\cdot 2}]}$$

Значение этой функции в момент времени, когда $\alpha^{\cdot}=0$, с точностью до малых (по сравнению с $H^2\cos^2\beta$) членов в знаменателе совпадает с формулой Магнуса в форме [3]

$$\varphi^{\cdot}=-\frac{(A_2+C_1)\operatorname{tg}\beta^*}{2H\cos\beta^*}\frac{h}{I(\beta^*)},\qquad \sin\beta^*=\frac{k}{H} \tag{2.7}$$

В выводе Магнуса этот момент времени вообще принимался за начальный. Следовательно, $h=I(\beta_0)\nu^2Q^2$ согласно (1.6) и (1.2).

Отсюда и из (2.7) сразу следует формула Магнуса

$$\varphi^{\cdot}=-\frac{(A_2+C_1)\alpha_a^{\cdot 2}}{2H\cos\beta_0}\operatorname{tg}\beta_0$$

Поступила 12 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Magnus K.* Beiträge zur Dynamik des Kräftefreien, kardanisch gelagerten Kreisels. Z. angew. Math. and Mech., Januar — Februar, 1955, Bd 35, H 1/2.
2. *Plymale B. T., Goodstein R.* Nutation of a free Gyro subjected to an impulse. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1955, vol. 22, No. 3. (Рус. перев.: Машиностроение. Сб. перев., 1956, № 5 (35).)
3. *Лунц Я. Л.* О неустойчивости оси фигуры гироскопа. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
4. *Бородина Р. М.* Решение уравнений движения уравновешенного гироскопа методом усреднения. Укр. матем. ж., 1961, т. 13.
5. *Брюно А. Д.* О движении гироскопа в кардановом подвесе. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6.
6. *Валеев К. Г.* О прецессии симметричного гироскопа в кардановом подвесе. Механика твердого тела. Респ. межвед. сб., № 7. Киев, «Наукова думка», 1974.
7 *Журавлев В. Ф.* К вопросу об оценках эффекта Магнуса. Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 1.
8. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М., «Наука», 1976.
9. *Климов Д. М.* Движение гироскопа при наличии сил трения, пропорциональных нормальным составляющим динамических реакций. Доп. к кн. Е. Л. Николаи «Гироскоп в кардановом подвесе», изд. 2. М., «Наука», 1964.