

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХОСНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО РАСТЯЖЕНИЯ ИЗОТРОПНОГО ЛИСТА

Г. Д. ДЕЛЬ, С. С. ОДИНГ

(Воронеж)

В работе [1] исследована устойчивость двухосного растяжения листа из вязко-пластического материала в условиях плоской деформации. В [2] решение обобщено на общий случай двухосного растяжения листа. Определение напряженно-деформированного состояния упрочняющейся полосы, растягиваемой в условиях плоской деформации, рассмотрено в [3]. Большое число исследований устойчивости пластического деформирования [4-7] (более полный обзор представлен в [8]) выполнено с использованием инженерных критериев устойчивости. Чаще всего используются критерий положительности добавочных нагрузок [4-6] и критерий положительности работы добавочных нагрузок [7]. Данные критерии получили некоторое теоретическое обоснование в [9-10], где на основе моментной теории исследована устойчивость формы цилиндрической и сферической оболочек.

Здесь потеря устойчивости трактуется как нарушение равномерности деформирования, проявляющееся в появлении локального утонения листа в виде шейки. Аналогично понимается потеря устойчивости в [1-3]. В результате получено приближенное условие устойчивости пластического деформирования в общем случае двухосного растяжения изотропного упрочняющегося листа из жестко-пластического материала. Показано, что в случае плоской деформации потеря устойчивости происходит при достижении наибольшей нагрузки своего максимального значения.

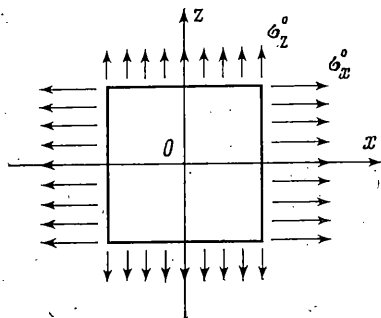
Рассмотрим статическое двухосное растяжение листа в направлениях x и z напряжениями σ_x° и σ_z° (фиг. 1). Ось y направлена по нормали к поверхности листа; верхний индекс соответствует компонентам исследуемого невозмущенного состояния ($\sigma_z^\circ / \sigma_x^\circ = n$, $\sigma_y^\circ = \tau_{xy}^\circ = \tau_{xz}^\circ = \tau_{yz}^\circ = 0$).

Материал считается изотропным, несжимаемым, упрочняющимся. Кривая течения $\sigma_0 = \sigma_0(e_0)$ считается заданной, где e_0 — интенсивность накопленных деформаций, σ_0 — интенсивность напряжений.

Требуется выяснить, является ли интенсивность накопленных деформаций $e_0 = e_0'$ критической, т. е. такой, при которой дальнейшее деформирование становится неустойчивым и образуется местное утонение листа в виде шейки.

Пусть $\eta = d\sigma_0 / de_0$ — тангенс угла наклона касательной к кривой течения при $e_0 = e_0'$, ε_{ij} — приращения деформаций, отсчитываемые от деформации $e_0 = e_0'$, $\varepsilon_0 = (2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} / 3)^{1/2}$ — интенсивность этих приращений деформаций.

Приращения деформаций ε_{ij} считаются малыми, что позволяет в дальнейшем исключить геометрическую нелинейность и считать в интервале деформирования ε_0 упрочнение линейным (с коэффициентом упрочнения η).



Фиг. 1

Если деформация e_0' является критической, то при дальнейшем деформировании наряду с невозмущенным состоянием $\sigma_{ij}^0, \epsilon_{ij}^0$ становится возможным состояние равновесия $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \delta\sigma_{ij}, \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \delta\epsilon_{ij}$, причем компоненты нового равновесного состояния $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ отличаются от $\sigma_{ij}^0, \epsilon_{ij}^0$ на бесконечно малые величины $\delta\sigma_{ij}, \delta\epsilon_{ij}$, называемые в дальнейшем дополнительными компонентами.

Компоненты возмущенного состояния удовлетворяют физическим уравнениям, уравнениям равновесия и условию несжимаемости

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij} / 3 = 2/3\sigma_0\epsilon_{ij} / \epsilon_0, \quad \partial\sigma_{ij} / \partial x_j = 0, \quad \epsilon_{kk} = 0 \\ \sigma_0 = \sqrt{1-n+n^2}\sigma_x^0, \quad \epsilon_0 = 2\sqrt{1-n+n^2}\epsilon_x^0 / (2-n) \end{aligned} \quad (1)$$

Компоненты тензора приращений деформаций в силу малости последних связаны с компонентами приращений перемещений u_i кинематическими уравнениями $\epsilon_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$.

В результате линеаризации соотношений для $\epsilon_0, \epsilon_{ij}$ и уравнений (1) получим замкнутую систему уравнений относительно дополнительных компонент

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{ij} - \delta\sigma_{kk}\delta_{ij} / 3 = 2[\eta\delta\epsilon_{ij} + \sigma_0^0\delta(\epsilon_{ij} / \epsilon_0)] / 3 \\ \delta\epsilon_0 = (\delta\epsilon_x + n\delta\epsilon_z) / \sqrt{1-n+n^2}, \quad \delta\epsilon_{kk} = 0, \quad \partial(\delta\sigma_{ij}) / \partial x_j = 0 \\ \delta\sigma_0 = \eta\delta\epsilon_0, \quad \delta\epsilon_{ij} = [\partial(\delta u_i) / \partial x_j + \partial(\delta u_j) / \partial x_i] / 2 \end{aligned} \quad (2)$$

Эксперименты показывают, что при $0.5 \leq n \leq 1$ потеря устойчивости проявляется в образовании достаточно протяженной в направлении оси z шейки. Ограничившись в дальнейшем рассмотрением такой формы потери устойчивости, примем $\delta\epsilon_z = 0$, все производные по z равны нулю. Заметим, что при плоской деформации это условие удовлетворяется точно. При рассмотрении такой формы потери устойчивости в случае, когда исследуемое, невозмущенное состояние отлично от случая плоской деформации, возникает особенность, связанная с наличием у дополнительных нормальных компонент тензора напряжений в (2) второго слагаемого. При рассмотрении плоской схемы деформирования легко убедиться, что $\delta(\epsilon_{ij} / \epsilon_0) = 0$ при $i=j$. Считая, что в начальный момент образования шейки главным фактором, влияющим на изменение напряженного состояния, является упрочнение материала, пренебрегаем вторым слагаемым в (2).

При сделанных допущениях вышеприведенная система уравнений будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\mu \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \delta u_x = 0, \quad \mu = \frac{\sigma_0^0 - 2\eta\epsilon_0^0}{\sigma_0^0 + \eta\epsilon_0^0} \quad (4)$$

На поверхностях листа, свободных от нагрузок, должны удовлетворяться следующие граничные условия:

$$\delta\sigma_{ij}v_j^0 + \sigma_{ij}^0\delta v_j = 0 \quad (5)$$

где v_j — направляющие косинусы нормали к поверхности листа. Обозначив через θ угол наклона касательной, проведенной к контуру шейки, с осью x , будем иметь $\delta v_x = -\sin \theta, \delta v_y = \cos \theta$.

Тогда граничные условия (5) запишутся в виде

$$\delta\tau_{xy} - \sigma_x^0 \operatorname{tg} \theta = 0, \quad \delta\sigma_y = 0, \quad y = \pm h \quad (6)$$

где $2h$ — толщина листа, определенная при $e_0 = e_0'$;

$$\operatorname{tg} \theta = d(\delta u_y) / dx$$

Функцию, описывающую возмущенную свободную поверхность листа, можно разложить в ряд Фурье в области $-\pi/b \leq x \leq \pi/b$. В результате получим

$$\delta u_y = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m \cos mbx$$

где λ_m — коэффициенты разложения ряда Фурье. Поэтому решение уравнения (4) логично искать в виде

$$\delta u_x = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(t_m) \sin mbx, \quad t_m = mby \quad (7)$$

Подставив (7) в (4), получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\varphi_m^{IV} + 2\mu\varphi_m'' + \varphi_m) \sin mbx = 0$$

Это уравнение остается справедливым для всех значений x при условии, что φ_m удовлетворяет уравнению

$$\varphi_m^{IV} + 2\mu\varphi_m'' + \varphi_m = 0 \quad (8)$$

В связи с тем, что поле добавочных приращений перемещений δu_x симметрично относительно плоскости $y=0$, решением уравнения (8) будет функция

$$\varphi_m = A_{1m} \cos ct_m \operatorname{ch} at_m + A_{2m} \sin ct_m \operatorname{sh} at_m, \quad c = (1+\mu)^{1/2} / \sqrt{2}, \quad a = (1-\mu)^{1/2} / \sqrt{2} \quad (9)$$

Постоянные интегрирования A_{1m} и A_{2m} находятся из граничных условий (6).

Интегрируя второе уравнение в (3) при условии, что $\delta u_y = 0$ при $y=0$, найдем

$$\delta u_y = - \sum_{m=0}^{\infty} [(aA_{1m} - cA_{2m}) \cos ct_m \operatorname{sh} at_m + (cA_{1m} + aA_{2m}) \sin ct_m \operatorname{ch} at_m] \cos mbx$$

Тогда из (2) и из последнего уравнения в (3) следует

$$\delta \tau_{xy} = \frac{2}{3} \left(\frac{\sigma_0^{\circ}}{\varepsilon_0} + \eta \right) ab \sum_{m=0}^{\infty} (A_{1m} \cos ct_m \operatorname{sh} at_m + A_{2m} \sin ct_m \operatorname{ch} at_m) \sin mbx \quad (10)$$

Используя (10) из третьего уравнения в (3), будем иметь

$$\delta \sigma_y = - \frac{2}{3} \left(\frac{\sigma_0^{\circ}}{\varepsilon_0} + \eta \right) ab \sum_{m=0}^{\infty} m [(A_{1m}c + A_{2m}a) \sin ct_m \operatorname{sh} at_m + (A_{1m}a - A_{2m}c) \cos ct_m \operatorname{ch} at_m] \cos mbx + F(x) \quad (11)$$

С другой стороны, на основе соотношения (2) и уравнения равновесия в (3) можно получить

$$\delta \sigma_y = - \frac{2}{3} \left(\frac{\sigma_0^{\circ}}{\varepsilon_0} + \eta \right) ab \sum_{m=0}^{\infty} m [(A_{1m}c + A_{2m}a) \sin ct_m \operatorname{sh} at_m + (A_{1m}a - A_{2m}c) \cos ct_m \operatorname{ch} at_m] \cos mbx + f(y) \quad (12)$$

Сопоставляя уравнения (11) и (12), найдем $f(y)=F(x)=C$; так как при $y=0$ $\delta\sigma=0$ при любом x , то $C=0$.

Записывая граничные условия (6) относительно A_{1m} , A_{2m} , получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} m \left\{ \left[a \left(\sigma_x^{\circ} - \frac{2}{3} \frac{\sigma_0^{\circ}}{\varepsilon_0^{\circ}} - \frac{2}{3} \eta \right) \cos cH_m \operatorname{sh} aH_m + \sigma_x^{\circ} c \sin cH_m \operatorname{ch} aH_m \right] A_{1m} + \right. \\ \left. + \left[a \left(\sigma_x^{\circ} - \frac{2}{3} \frac{\sigma_0^{\circ}}{\varepsilon_0^{\circ}} - \frac{2}{3} \eta \right) \sin cH_m \operatorname{ch} aH_m - \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma_x^{\circ} c \cos cH_m \operatorname{sh} aH_m \right] A_{2m} \right\} \sin mbx = 0 \\ \sum_{m=0}^{\infty} m [(c \sin cH_m \operatorname{sh} aH_m + a \cos cH_m \operatorname{ch} aH_m) A_{1m} + \\ + (a \sin cH_m \operatorname{sh} aH_m - c \cos cH_m \operatorname{ch} aH_m) A_{2m}] \cos mbx = 0, \quad H_m = mbh \quad (13)$$

Система (13) остается справедливой для всех значений x при условии, что каждое слагаемое перед тригонометрической функцией обращается в нуль. Таким образом, система распадается на ряд подсистем. Для существования нетривиального решения системы уравнений относительно A_{1m} и A_{2m} необходимо, чтобы определитель хотя бы одной подсистемы был равен нулю

$$[\sigma_x^{\circ}/(\sigma_0^{\circ} + \eta\varepsilon_0^{\circ}) - \frac{2}{3} a^2/\varepsilon_0^{\circ}] \sin 2cH_m - \frac{2}{3} ac \operatorname{sh} 2aH_m/\varepsilon_0^{\circ} = 0 \quad (14)$$

При использовании уравнения (14) для анализа процесса потери устойчивости возникают большие трудности, связанные с тем обстоятельством, что неизвестна величина параметра b в момент потери устойчивости. Естественно предположить, что этому параметру b соответствует минимальное значение критических деформаций, удовлетворяющих условию (14).

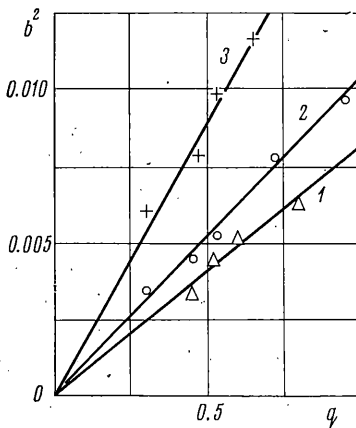
Переписывая уравнение (14) в виде

$$\left[\frac{3}{2} \sigma_x^{\circ} \varepsilon_0^{\circ} / (\sigma_0^{\circ} + \eta\varepsilon_0^{\circ}) - a^2 \right] / ac = \\ = \operatorname{sh} 2aH_m / \sin 2cH_m$$

можно показать, что при любом значении ε_0° левая часть данного уравнения является монотонной функцией σ_0°/η , в то время как правая часть уравнения является монотонной функцией параметра b . Причем минимальному значению σ_0°/η соответствует значение $b \rightarrow 0$, что также подтверждает численный счет.

Такой же результат получен при экспериментальном исследовании геометрии поверхности шейки на различных стадиях ее развития при одноосном растяжении полос из меди, стали 20 и нержавеющей стали Х18Н10С. Эксперименты показали, что на всех стадиях своего развития шейка в сечении $z=0$ хорошо описывается функцией

$$\delta u_y = -q \exp(-b^2 x^2) \quad (15)$$



Фиг. 2

где q — параметр, характеризующий степень развитости шейки, b — параметр, характеризующий протяженность шейки. Разлагая правую часть уравнения (15) в ряд Фурье в области $-\pi/b \leq x \leq \pi/b$, получим уравнение

$$\delta u_y = -q \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos mbx, \quad \gamma_m = \frac{2b}{\pi} \int_0^{\pi/b} \exp(-b^2 x^2) \cos mbx dx$$

которое по виду совпадает с (7).

При испытании полос различной длины (длина полос в семь — десять раз превосходила их ширину) установлено, что параметр b в исследуемом интервале не зависит от длины образца. Обнаружена зависимость параметра b от свойств материала. На фиг. 2 приведены экспериментальные данные для меди (кривая 1), стали 20 (кривая 2), стали X18H10T (кривая 3).

Установлено, что зависимость b^2 от параметра q близка к линейной (при $q \rightarrow 0$ $b \rightarrow 0$). С учетом этого условия получим следующий критерий устойчивости пластического деформирования $\sigma_0/\eta = 4\sqrt{(1-n+n^2)}/3$, совпадающий в случае плоской деформации ($n=0.5$) с условием, выведенным в предположении, что в момент потери устойчивости наибольшая из нагрузок проходит через свое максимальное значение [6].

Поступила 4 11 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута. ПММ, 1943, т. 7, вып. 2.
2. Дель Г. Д. Устойчивость двухосного растяжения листа из вязкопластического материала. В сб.: Механика деформируемых тел и конструкций. М., «Машиностроение», 1975.
3. Жуков А. М., К вопросу возникновения шейки в образце при растяжении. Инж. сб., 1949, т. 5, вып. 2.
4. Lankford W. T., Saibel E. Some problems in unstable plastic flow under biaxial tension. Metals. Technol., 1947, vol. 14, No. 15.
5. Гоффман О., Закс Г. Введение в теорию пластичности для инженеров. М., Машгиз, 1957.
6. Гомленов А. Д. Пластическое напряженное состояние и устойчивость процесса вытяжки. В сб.: Вопросы обработки металлов давлением. М., Изд-во АН СССР, 1958.
7. Малинин Н. Н. Устойчивость двухосного пластического растяжения анизотропных листов и цилиндрических оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 2.
8. Григорьев А. С. О теории и задачах равновесия оболочек при больших деформациях. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1.
9. Виноградова А. М. Об образовании шейки при растяжении полых цилиндрических образцов. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 6.
10. Виноградова А. М. Об устойчивости равновесия при растяжении Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5.