МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1976

УДК 531.38

ОБ УСЛОВНО-ЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

М. П. ХАРЛАМОВ

(Москва)

Вводится понятие условно-линейного интеграла уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой, являющееся обобщением понятия интеграла, линейного по скоростям. Найдены условия существования интегралов такого вида для движений в произвольном осесимметричном силовом поле. Показано, что в случае движения твердого тела в поле силы тяжести условно-линейного интеграла не существует.

Свяжем с телом декартову систему координат с началом в неподвижной точке и осями, направленными по главным осям инерции тела. Проекции угловой скорости тела на эти оси обозначим p, q, r. Силовое поле полагаем осесимметричным и через ν_1, ν_2, ν_3 обозначим проекции на те же оси направляющего вектора оси симметрии

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1 \tag{0.1}$$

Тогда для силовой функции имеем $U=U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$. Зависимость указанных переменных от времени t определяется из уравнений (A, B, C — главные моменты инерции тела в неподвижной точке)

$$\begin{gathered}
Ap^{\bullet}=(B-C)qr+\nu_3\frac{\partial U}{\partial \nu_2}-\nu_2\frac{\partial U}{\partial \nu_3}\\
Bq^{\bullet}=(C-A)rp+\nu_1\frac{\partial U}{\partial \nu_3}-\nu_3\frac{\partial U}{\partial \nu_1}\\
Cr^{\bullet}=(A-B)pq+\nu_2\frac{\partial U}{\partial \nu_1}-\nu_1\frac{\partial U}{\partial \nu_2}\\
\nu_1^{\bullet}=r\nu_2-q\nu_3,\quad \nu_2^{\bullet}=p\nu_3-r\nu_1,\quad \nu_3^{\bullet}=q\nu_1-p\nu_2
\end{gathered} \tag{0.2}$$

В случае однородного силового поля

$$U=g_1^*\nu_1+g_2^*\nu_2+g_3^*\nu_3 \tag{0.3}$$

Из общих теорем динамики следует существование интегралов энергии

$$h={}^1/_2(Ap^2+Bq^2+Cr^2)-U \tag{0.4}$$

и площадей

$$k=Ap\nu_1+Bq\nu_2+Cr\nu_3 \tag{0.5}$$

Как известно, для сведения задачи к квадратурам достаточно в дополнение к соотношениям (0.1), (0.4), (0.5) указать еще один интеграл, не зависящий от времени и содержащий произвольную постоянную.

Изучением условий существования такого интеграла (или в более общей постановке – инвариантного соотношения) занимались многие авторы (см., например, обзоры [1, 2]). В частности, подвергались анализу и условия существования линейного относительно p, q, r соотношения

$$c_1p+c_2q+c_3r=c_0 \tag{0.6}$$

но при этом обычно полагалось, что c_1, c_2, c_3, c_0 — некоторые постоянные величины. В более общей постановке их можно считать функциями координат, определяющих положение тела в пространстве. В таком предположении задача об условиях существования интеграла (0.6) еще не изучена.

1. Выразим введенные переменные через углы Эйлера φ, θ, ψ

$$\nu_1=\sin\theta\sin\varphi,\quad \nu_2=\sin\theta\cos\varphi,\quad \nu_3=\cos\theta \tag{1.1}$$

$$p=\psi^\cdot\sin\theta\sin\varphi+\theta^\cdot\cos\varphi,\quad q=\psi^\cdot\sin\theta\cos\varphi-\theta^\cdot\sin\varphi,\ r=\psi^\cdot\cos\theta+\varphi^\cdot$$

Используя интеграл (0.5), исключим циклическую переменную ψ

$$\psi^\cdot=\frac{k-(A-B)\theta^\cdot\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi-C\varphi^\cdot\cos\theta}{(A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi)\sin^2\theta+C\cos^2\theta} \tag{1.2}$$

По-видимому, впервые это сделал Г. В. Колосов [3]. Переходя далее от углов нутации и собственного вращения к новым переменным

$$x=\nu_1/\sqrt{A},\quad y=\nu_2/\sqrt{B},\quad z=\nu_3/\sqrt{C} \tag{1.3}$$

он получил функцию Лагранжа приведенной задачи в виде

$$\begin{gathered}L=\frac{1}{2}\frac{ABC(x^{\cdot2}+y^{\cdot2}+z^{\cdot2})-k^2}{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}+U(x,y,z)+\\+k(ABC)^{1/2}\frac{(B-A)xyz^\cdot+(yx^\cdot-xy^\cdot)Cz}{(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)(Ax^2+By^2)}\end{gathered} \tag{1.4}$$

Точка $(x,\ y,\ z)$ вследствие (0.1) принадлежит эллипсоиду

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1 \tag{1.5}$$

Рассмотрим общий случай трехосного эллипсоида (1.5). Обозначения главных моментов инерции всегда могут быть выбраны так, чтобы выполнялись неравенства $A<B<C$. Следуя [3], введем координаты λ, μ на поверхности эллипсоида

$$\begin{gathered}x^2=\frac{BC}{A}\frac{(1-A\lambda)(1-A\mu)}{(B-A)(C-A)}\qquad y^2=\frac{CA}{B}\frac{(B\lambda-1)(1-B\mu)}{(B-A)(C-B)}\\ z^2=\frac{AB}{C}\frac{(C\lambda-1)(C\mu-1)}{(C-A)(C-B)}\end{gathered} \tag{1.6}$$

Так как x, y, z действительны, то

$$A^{-1}\geqslant\lambda\geqslant B^{-1}\geqslant\mu\geqslant C^{-1} \tag{1.7}$$

Лагранжиан (1.4) в новых переменных примет вид

$$\begin{gathered}L=\frac{\lambda-\mu}{8\lambda\mu}[\lambda^{\cdot2}F(\lambda)-\mu^{\cdot2}F(\mu)]+U(\lambda,\mu)-\frac{k^2}{2ABC\lambda\mu}+\\+\frac{k}{2}\frac{C[-F(\mu)F(\lambda)\lambda\mu]^{-1/2}}{(C-A)(C-B)-(C\lambda-1)(C\mu-1)(AB)}[(A+B-C-AB\lambda)\lambda^\cdot F(\lambda)+\\+(A+B-C-AB\mu)\mu^\cdot F(\mu)]\end{gathered} \tag{1.8}$$

$$F(\sigma)=\sigma[(A^{-1}-\sigma)(B^{-1}-\sigma)(C^{-1}-\sigma)]^{-1} \tag{1.9}$$

Отметим, что в промежутках (1.7) имеют место неравенства $F(\lambda)\geqslant 0$, $F(\mu)\leqslant 0$. Запишем в новых переменных и силовую функцию однородного поля (0.3)

$$U=g_1[(1-A\lambda)(1-A\mu)]^{1/2}+g_2[(B\lambda-1)(1-B\mu)]^{1/2}+g_3[(C\lambda-1)(C\mu-1)]^{1/2} \tag{1.10}$$

$$g_1=\frac{g_1^*}{A}\left[\frac{BC}{(B-A)(C-A)}\right]^{1/2},\qquad g_2=\frac{g_2^*}{B}\left[\frac{CA}{(B-A)(C-B)}\right]^{1/2}$$

$$g_3=\frac{g_3^*}{C}\left[\frac{AB}{(C-A)(C-B)}\right]^{1/2}$$

Обозначая

$$\Lambda(\lambda,\mu)=\frac{1}{2}\frac{C(A+B-C-AB\lambda)[-F(\mu)\lambda\mu]^{-1/2}}{(C-A)(C-B)-(C\lambda-1)(C\mu-1)AB}$$

$$M(\lambda,\mu)=\frac{1}{2}\frac{C(A+B-C-AB\mu)[F(\lambda)\lambda\mu]^{-1/2}}{(C-A)(C-B)-(C\lambda-1)(C\mu-1)AB} \tag{1.11}$$

$$N(\lambda,\mu)=U(\lambda,\mu)-\frac{k^2}{2ABC\lambda\mu},\qquad \varkappa(\lambda,\mu)=\frac{\lambda-\mu}{4\lambda\mu}$$

представим лагранжиан (1.8) в виде

$$L(\lambda,\ \mu,\ \dot\lambda,\ \dot\mu)={}^1/{}_2\varkappa[\dot\lambda^2F(\lambda)-\dot\mu^2F(\mu)]+k[\Lambda\dot\lambda\sqrt{F(\lambda)}-M\dot\mu\sqrt{-F(\mu)}]+N$$

Замена

$$d\xi=\sqrt{F(\lambda)}\,d\lambda,\qquad d\eta=\sqrt{-F(\mu)}\,d\mu \tag{1.12}$$

дает $L(\xi,\eta,\dot\xi,\dot\eta)={}^1/{}_2\varkappa(\dot\xi^2+\dot\eta^2)+k(\Lambda\dot\xi-M\dot\eta)+N$.

Соответствующие уравнения Лагранжа могут быть записаны в виде

$$(\varkappa\dot\xi)^{\cdot}-\frac{1}{2}(\dot\xi^2+\dot\eta^2)\frac{\partial\varkappa}{\partial\xi}+k\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta}+\frac{\partial M}{\partial\xi}\right)\dot\eta-\frac{\partial N}{\partial\xi}=0$$

$$(\varkappa\dot\eta)^{\cdot}-\frac{1}{2}(\dot\xi^2+\dot\eta^2)\frac{\partial\varkappa}{\partial\eta}-k\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta}+\frac{\partial M}{\partial\xi}\right)\dot\xi-\frac{\partial N}{\partial\eta}=0 \tag{1.13}$$

Используя интеграл

$${}^1/{}_2\varkappa(\dot\xi^2+\dot\eta^2)=h+N \tag{1.14}$$

получим систему

$$\varkappa(\varkappa\dot\xi)^{\cdot}+k\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta}+\frac{\partial M}{\partial\xi}\right)\varkappa\dot\eta=\varkappa\frac{\partial N}{\partial\xi}+(h+N)\frac{\partial\varkappa}{\partial\xi}$$

$$\varkappa(\varkappa\dot\eta)^{\cdot}-k\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta}+\frac{\partial M}{\partial\xi}\right)\varkappa\dot\xi=\varkappa\frac{\partial N}{\partial\eta}+(h+N)\frac{\partial\varkappa}{\partial\eta} \tag{1.15}$$

Произведем замену независимой переменной [4]

$$dt=\varkappa(\xi,\eta)\,d\tau \tag{1.16}$$

и, обозначая штрихом дифференцирование по τ, представим (1.15) следующим образом:

$$\xi''+k\omega\eta'=\partial V/\partial\xi, \quad \eta''-k\omega\xi'=\partial V/\partial\eta \tag{1.17}$$

$$V=\varkappa(h+N)=\frac{\lambda-\mu}{4\lambda\mu}\left[h-\frac{k^2}{2ABC\lambda\mu}+U(\lambda,\mu)\right]$$
$$\omega=\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta}+\frac{\partial M}{\partial\xi}=[-F(\mu)]^{-1/2}\frac{\partial\Lambda}{\partial\mu}+[F(\lambda)]^{-1/2}\frac{\partial M}{\partial\lambda} \tag{1.18}$$

Последнее при подстановке (1.9) и (1.11) дает

$$\omega=\frac{1}{4ABC}\frac{\lambda-\mu}{(\lambda\mu)^{3/2}}\left(A+B+C-2\frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}\right) \tag{1.19}$$

Интеграл (1.14) для системы (1.17) примет вид

$$\xi'^2+\eta'^2=2V(\xi,\eta)$$

Удовлетворим этому соотношению, вводя новую переменную γ, такую, что

$$\xi'=v\cos\gamma, \quad \eta'=v\sin\gamma \tag{1.20}$$

Здесь $v(\xi, \eta, k, h)=\sqrt{2V}$ — известная функция указанных аргументов. Система (1.17) приводится к одному уравнению

$$\gamma'=v_\eta\cos\gamma-v_\xi\sin\gamma+k\omega \tag{1.21}$$

Таким образом, классическая задача о движении в потенциальном осесимметричном силовом поле тела, имеющего неподвижную точку, сведена к системе (1.20), (1.21), которая и будет изучаться ниже.

2. При подстановке (1.1) в (0.6) последнее переходит в соотношение, линейное относительно $\varphi^\cdot$, $\theta^\cdot$, $\psi^\cdot$, с коэффициентами, зависящими от θ и φ

$$c_3\varphi^\cdot+(c_1\cos\varphi-c_2\sin\varphi)\theta^\cdot+[(c_1\sin\varphi+c_2\cos\varphi)\sin\theta+c_3\cos\theta]\psi^\cdot=c_0$$

Для уравнений Лагранжа приведенной задачи последнее соотношение вследствие (1.2) преобразуется к виду

$$S_1(\theta,\varphi)\varphi^\cdot+S_2(\theta,\varphi)\theta^\cdot=S_0(\theta,\varphi,k) \tag{2.1}$$

где S_1, S_2, S_0 — определенные функции θ, φ, причем S_0 линейно относительно k.

При последующих преобразованиях (1.3), (1.6), (1.12) соотношение (2.1) приводится к такому:

$$G_1(\xi,\eta)\xi^\cdot+G_2(\xi,\eta)\eta^\cdot=G_0(\xi,\eta,k) \tag{2.2}$$

И, наконец, последний шаг — замена (1.16) независимой переменной переводит (2.2) в соотношение

$$m(\xi,\eta)\xi'+n(\xi,\eta)\eta'+l(\xi,\eta;k)=0 \tag{2.3}$$

в котором m, n и l — определенные функции переменных ξ, η, а l — линейная функция параметра k.

Если (0.6) есть следствие системы (0.2), то (2.2) должно быть следствием системы (1.13), и, поскольку произвольная постоянная интеграла (1.14) в уравнениях (1.13) не содержится, то естественно, что G_1, G_2, G_0, вообще говоря, не зависят от h. Не приводит к этой зависимости и замена (1.16), и если (2.3) получено указанными преобразованиями, то m, n и l также не будут зависеть от h.

Однако можно поставить задачу о существовании линейного относительно ξ', η' интеграла системы (1.17), в которой функции $k\omega(\xi, \eta)$ и $V(\xi, \eta, k, h)$ содержат k и h в качестве параметров. Общий вид такого интеграла

$$m(\xi, \eta, k, h)\xi'+n(\xi, \eta, k, h)\eta'+l(\xi, \eta, k, h)=\text{const} \tag{2.4}$$

Определение. Интеграл вида (2.4) системы (1.17) будем называть условно-линейным интегралом системы (1.13) или, после замены переменных ξ, η на исходные,— условно-линейным интегралом системы (0.2).

Если параметр h существенно входит хотя бы в один из коэффициентов линейного относительно ξ', η' интеграла системы (1.17), то при обратном переходе от этой системы к системе (1.13) параметр h в (2.4) должен быть заменен вытекающей из (1.14) величиной $^1/_2\varkappa(\xi^{\cdot 2}+\eta^{\cdot 2})-N(\xi, \eta)$. Полученный таким образом интеграл системы (1.13) уже не будет линейным относительно $\xi^{\cdot}$, $\eta^{\cdot}$. Точно так же, если хотя бы один из коэффициентов m, n содержит k существенным образом, или же по отношению к k функция l нелинейна, то подстановка получаемого из (1.2) выражения $k=k(\varphi, \theta, \varphi^{\cdot}, \theta^{\cdot}, \psi^{\cdot})$ в (2.4) при обратном переходе от переменных ξ, η к исходным переменным приведет к интегралу, более общему, чем (0.6) — нелинейному относительно p, q, r.

Этим и обусловлено название интеграла (2.4) — условно-линейный интеграл. Линейный в обычном смысле интеграл (0.6) (даже в случае, когда c_1, c_2, c_3, c_0 являются функциями углов θ и φ) есть, очевидно, частный случай условно-линейного интеграла.

Вопрос о существовании условно-линейных интегралов в динамике твердого тела удобно решать в терминах системы (1.20), (1.21). Применительно к этой системе соотношение (2.4) примет вид

$$mv\cos\gamma+nv\sin\gamma+l=\text{const} \tag{2.5}$$

3. Выясним, при каких функциях V и ω система (1.20), (1.21) допускает интеграл (2.5). Производная (2.5) по τ в силу уравнений (1.20), (1.21) должна обращаться в нуль тождественно по переменным ξ, η, γ

$$\begin{gathered}{}^1/_2(m_\xi-n_\eta)v\cos 2\gamma+{}^1/_2(n_\xi+m_\eta)v\sin 2\gamma+\\+(l_\xi+k\omega n)v\cos\gamma+(l_\eta-k\omega m)v\sin\gamma+mv_\xi+nv_\eta+\\+{}^1/_2(m_\xi+n_\eta)v=0\end{gathered}$$

Отсюда

$$m_\xi-n_\eta=0,\quad m_\eta+n_\xi=0 \tag{3.1}$$

$$mv_\xi+nv_\eta+{}^1/_2(m_\xi+n_\eta)v=0 \tag{3.2}$$

$$l_\xi=-k\omega n,\quad l_\eta=k\omega m \tag{3.3}$$

С учетом определения v (3.2) можно представить в виде

$$(mV)_\xi+(nV)_\eta=0 \tag{3.4}$$

а условием совместности равенств (3.3) является

$$[(m\omega)_\xi+(n\omega)_\eta]k=0 \tag{3.5}$$

Вследствие соотношений (3.1) m и n — сопряженные гармонические функции, и $Q(\zeta)=m(\xi, \eta)+in(\xi, \eta)$ является аналитической функцией переменной $\zeta=\xi+i\eta$.

Из (3.4) следует, что существует функция $\Phi(\xi, \eta)$, удовлетворяющая равенствам

$$mV=\Phi_\eta,\quad nV=-\Phi_\xi \tag{3.6}$$

Отсюда

$$m\Phi_\xi+n\Phi_\eta=0 \tag{3.7}$$

Будем рассматривать формулы $\zeta=\xi+i\eta$, $\bar\zeta=\xi-i\eta$ формально как переход от переменных ξ, η к переменным, ζ, $\bar\zeta$. При этом

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\partial}{\partial\bar\zeta},\qquad \frac{\partial}{\partial\eta}=i\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\right)$$

и уравнение (3.7) запишется так:

$$Q(\zeta)\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}+E(\bar\zeta)\frac{\partial\Phi}{\partial\bar\zeta}=0 \tag{3.8}$$

Здесь через $E(\bar\zeta)$ обозначена функция $m-in=\overline{Q(\zeta)}=\bar Q(\bar\zeta)$. Общее решение уравнения (3.8) представимо в виде произвольной функции

$$\Phi=\Phi(\chi),\quad \chi(\zeta,\bar\zeta)=\frac{1}{2i}\left[\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{dz}{Q(z)}-\int\limits_{\bar\zeta_0}^{\bar\zeta}\frac{dz}{E(z)}\right] \tag{3.9}$$

Функция χ в действительной форме имеет вид

$$\chi(\xi,\eta)=\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi,\eta)}\frac{m(\xi,\eta)d\eta-n(\xi,\eta)d\xi}{m^2(\xi,\eta)+n^2(\xi,\eta)} \tag{3.10}$$

Из (3.6), (3.9), (3.10) следует

$$V(\xi,\eta)=\Phi'(\chi)(m^2+n^2)^{-1} \tag{3.11}$$

Сопоставив (3.6) с уравнениями (3.3), заключаем, что

$$k\omega(\xi,\eta)=l'(\chi)(m^2+n^2)^{-1} \tag{3.12}$$

Представимость функций V, $k\omega$ в виде (3.11), (3.12) является [1], очевидно, необходимым и достаточным условием существования интеграла (2.5), а следовательно, и условно-линейного интеграла уравнений (1.13).

4. В конкретных случаях проверка возможности представлений (3.11), (3.12), связанная с построением m и n по заданным V и $k\omega$, затруднительна. Исключая из системы (3.1), (3.4), (3.5) функции m и n, получим необходимые условия существования условно-линейного интеграла.

При заданных m и n функции V и $k\omega$ удовлетворяют одному и тому же уравнению (см. (3.4), (3.5)), которое запишем в виде

$$(me^s)_\xi+(ne^s)_\eta=0 \tag{4.1}$$

так что $s=\ln V$ в случае (3.4) и $s=\ln\omega$ в случае (3.5) при $k\neq0$. Вводя вспомогательную функцию $w(\xi,\eta)$, запишем систему (3.1), (4.1), так:

$$m_\xi=-{}^1/_2(ms_\xi+ns_\eta),\quad m_\eta=w,\quad n_\xi=-w,\quad n_\eta=-{}^1/_2(ms_\xi+ns_\eta) \tag{4.2}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}-4w_\xi=(2s_{\xi\eta}-s_\xi s_\eta)m+(2s_{\eta\eta}-s_\eta{}^2)n+2ws_\xi\\ 4w_\eta=(2s_{\xi\xi}-s_\xi{}^2)m+(2s_{\xi\eta}-s_\xi s_\eta)n-2ws_\eta\end{gathered} \tag{4.3}$$

Дифференцируя первое соотношение по η, а второе по ξ, сложим полученные выражения и, подставив из (4.2), (4.3) значения первых производных функций m, n, w, получим $[(s_{\xi\xi}+s_{\eta\eta})_\xi-(s_{\xi\xi}+s_{\eta\eta})s_\xi]m+[(s_{\xi\xi}+s_{\eta\eta})_\eta-(s_{\xi\xi}+s_{\eta\eta})s_\eta]n=0$ или $m\sigma_\xi+n\sigma_\eta=0$, где $\sigma=(s_{\xi\xi}+s_{\eta\eta})e^{-s}$. Из этих равенств следует, что m и n могут быть выражены через одну функцию $u(\xi,\eta)$, а именно: $m=-e^u\sigma_\eta$, $n=e^u\sigma_\xi$, вследствие чего (4.1) приведется к уравнению

[1] В отличие от [4] такое представление не сопровождается дополнительными преобразованиями переменных ξ, η.

$(u+s)_\eta \sigma_\xi - (u+s)_\xi \sigma_\eta = 0$ и, значит, $u+s = f(\sigma)$. При этом $m = -\sigma_\eta \exp(-s+f(\sigma))$, $n = \sigma_\xi \exp(-s+f(\sigma))$ и уравнения (3.1) дадут

$$2f'(\sigma)\sigma_\xi\sigma_\eta = s_\xi\sigma_\eta + s_\eta\sigma_\xi - 2\sigma_{\xi\eta}$$
$$(\sigma_\xi^2 - \sigma_\eta^2) f'(\sigma) = \sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\xi\xi} + s_\xi\sigma_\xi - s_\eta\sigma_\eta$$

Исключая $f'(\sigma)$, получим

$$\left(s_\xi + 2\frac{\sigma_{\eta\eta}\sigma_\xi - \sigma_{\xi\eta}\sigma_\eta}{\sigma_\xi^2+\sigma_\eta^2}\right)\sigma_\eta = \left(s_\eta + 2\frac{\sigma_{\xi\xi}\sigma_\eta - \sigma_{\xi\eta}\sigma_\xi}{\sigma_\xi^2+\sigma_\eta^2}\right)\sigma_\xi \qquad (4.4)$$

Это и есть условие, которому (с учетом обозначений s и σ) должны удовлетворять функции V и $k\omega$, чтобы соответствующее уравнение (3.4) или (3.5) было совместно с уравнениями (3.1).

Проверку выполнения условия (4.4) в дальнейшем понадобится проводить в случаях, когда вместо ξ, η употребляется другая пара переменных, связанная с ними зависимостями вида

$$d\alpha / d\xi = \sqrt{G(\alpha)}, \quad d\beta / d\eta = \sqrt{H(\beta)} \qquad (4.5)$$

Подставив в (4.4) значения

$$\sigma_\xi = \sqrt{G}\sigma_\alpha, \quad \sigma_\eta = \sqrt{H}\sigma_\beta, \quad \sigma_{\xi\eta} = \sqrt{GH}\sigma_{\alpha\beta}$$
$$\sigma_{\xi\xi} = G\sigma_{\alpha\alpha} + {}^1\!/_2\sigma_\alpha dG/d\alpha, \qquad \sigma_{\eta\eta} = H\sigma_{\beta\beta} + {}^1\!/_2\sigma_\beta dH/d\beta$$

получим

$$(\sigma_\alpha s_\beta - \sigma_\beta s_\alpha)(G\sigma_\alpha^2 + H\sigma_\beta^2) + 2(H\sigma_\beta^2 - G\sigma_\alpha^2)\sigma_{\alpha\beta} +$$
$$+ [2(G\sigma_{\alpha\alpha} - H\sigma_{\beta\beta}) + \sigma_\alpha dG/d\alpha - \sigma_\beta dH/d\beta]\sigma_\alpha\sigma_\beta = 0 \qquad (4.6)$$

5. Вопрос о существовании условно-линейного интеграла уравнений движения несимметричного твердого тела в осесимметричном силовом поле решается следующей теоремой.

Теорема. При $k \neq 0$ не существует условно-линейного интеграла уравнений (0.2).

Доказательство. Пусть $k \neq 0$. Уравнение (3.5), принимающее вид $(m\omega)_\xi + (n\omega)_\eta = 0$, может быть совместным с уравнениями (3.1) лишь в случае, когда функция (1.19) удовлетворяет условию (4.6). Введем переменные $\alpha = 2/(A+B+C)\lambda$, $\beta = 2/(A+B+C)\mu$. Тогда $\omega = e^s = {}^1\!/_2(\alpha - \beta)K^{-1}(\alpha+\beta-1)(\alpha\beta)^{1/2}$, где $K = 8ABC/(A+B+C)^3$. Из (1.9), (1.12), (4.5) находим $G(\alpha) = \alpha^2K^{-1}(\alpha^3 - 2\alpha^2 + c\alpha - K)$, $H(\beta) = -\beta^2K^{-1}(\beta^3 - 2\beta^2 + c\beta - K)$, $c = 4(BC+CA+AB)/(A+B+C)^2$. Эти величины вместе с

$$s_\alpha = \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha+\beta-1} - \frac{1}{\beta-\alpha}, \qquad s_\beta = \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{\alpha+\beta-1} + \frac{1}{\beta-\alpha}$$

$$\sigma = \frac{s_{\xi\xi}+s_{\eta\eta}}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left(Gs_{\alpha\alpha} + Hs_{\beta\beta} + \frac{1}{2}s_\alpha\frac{dG}{d\alpha} + \frac{1}{2}s_\beta\frac{dH}{d\beta}\right) =$$
$$= \frac{1}{2(\alpha+\beta-1)^3(\alpha\beta)^{1/2}}\{15(\alpha^4+\beta^4) + 45(\alpha^2+\beta^2)\alpha\beta + 56\alpha^2\beta^2 -$$
$$-48(\alpha^3+\beta^3) - 110\alpha\beta(\alpha+\beta) + 41(\alpha^2+\beta^2) + 67\alpha\beta - 12(\alpha+\beta) +$$
$$+ c[5(\alpha^2+\beta^2) + 14\alpha\beta - 12(\alpha+\beta) + 3] + 4K\}$$

внесем в левую часть (4.6). Получим выражение

$$P(\alpha, \beta, c, K) / [(\alpha+\beta-1)^{13}(\alpha\beta)^{5/2}K]$$

в котором P — многочлен четвертой степени относительно K. Коэффициент при K^4 в этом многочлене равен

$$12(\alpha^4+\beta^4)+196\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+512\alpha^2\beta^2-(\alpha+\beta)[325(\alpha^2+\beta^2)+$$
$$+488\alpha\beta]+53(\alpha^2+\beta^2)+68\alpha\beta-20(\alpha+\beta)$$

и, следовательно, многочлен P не исчезает. Таким образом, функция (1.19) не удовлетворяет необходимому условию (4.6), поэтому уравнению (3.5) можно удовлетворить, лишь положив $k=0$.

В дополнение заметим, что при $k=0$ существуют такие функции $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, при которых система (0.2) допускает условно-линейный интеграл (достаточно, исходя из произвольной аналитической функции $Q(\zeta)$ и произвольной функции $\Phi(\chi)$, воспользоваться выражением $Q(\zeta)=m(\xi, \eta)+in(\xi, \eta)$ и формулами (3.10), (3.11)).

6. В случае тяжелого несимметричного твердого тела имеет место следующая теорема.

Теорема. При воздействии однородного силового поля (0.3) система (0.2) не допускает условно-линейного интеграла [1].

Доказательство. Как было показано выше, необходимым условием существования условно-линейного интеграла является условие $k=0$. При этом (см. (1.10), (1.18))

$$V={}^1\!/_4(\lambda-\mu)(\lambda\mu)^{-1}\{h+g_1[(1-A\lambda)(1-A\mu)]^{1/2}+$$
$$+g_2[(B\lambda-1)(1-B\mu)]^{1/2}+g_3[(C\lambda-1)(C\mu-1)]^{1/2}\}$$

Покажем, что эта функция не обращает (4.4) в тождество. Зададим для упрощения выкладок удобные значения параметров $h=0$, $g_2=g_3=0$. Переменные α, β вводим равенствами

$$\alpha=\lambda^{-1}-A,\quad \beta=\mu^{-1}-A \tag{6.1}$$

тогда

$$V={}^1\!/_4 g_1(\beta-\alpha)(\alpha\beta)^{1/2}[(\alpha+A)(\beta+A)]^{-1/2} \tag{6.2}$$

и из (1.9), (1.12), (4.5), (6.1) получаем

$$G(\alpha)=(ABC)^{-1}(\alpha+A)^2\alpha(B-A-\alpha)(C-A-\alpha)$$
$$H(\beta)=-(ABC)^{-1}(\beta+A)^2\beta(B-A-\beta)(C-A-\beta)$$

Подставив (6.2) в $s=\ln V$, имеем

$$s_\alpha=-\frac{1}{\beta-\alpha}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+A}\right),\quad s_\beta=\frac{1}{\beta-\alpha}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta+A}\right)$$

а из определения σ получаем

$$\sigma=\frac{1}{V}\left[Gs_{\alpha\alpha}+Hs_{\beta\beta}+\frac{1}{2}\left(s_\alpha\frac{dG}{d\alpha}+s_\beta\frac{dH}{d\beta}\right)\right]=$$
$$=-\frac{1}{g_1ABC}\frac{[(\alpha+A)(\beta+A)]^{1/2}}{(\alpha\beta)^{1/2}}\left[A^2\frac{(B-A)(C-A)}{\alpha\beta}+6\alpha^2+8\alpha\beta+6\beta^2+\right.$$
$$\left.+(17A-4B-4C)(\alpha+\beta)+13A^2-6AB-6AC+2BC\right]$$

---

[1] В работе [5] со ссылкой на [6] утверждается, что задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки допускает новый линейный интеграл. Это утверждение основано на молчаливом допущении, что из уравнения (9) работы [6] при любых U и ω может быть определена функция $K(x, y)$. Условием разрешимости этого уравнения, по существу, и является полученное выше условие (4.4).

Найденные значения подставим в (4.6) и выделим слагаемое, содержащее $\alpha\beta$ в знаменателе в максимальной степени

$$\frac{27}{4}A^6\frac{(B-A)^4(C-A)^4}{g_1{}^3B^4C^4}\,\frac{\alpha+\beta}{\alpha^6\beta^6}\left[\frac{(\alpha+A)(\beta+A)}{\alpha\beta}\right]^{1/2}$$

Ясно, что оно отлично от нуля, и, следовательно, условие (4.6) не выполняется.

Поступила 16 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1940.
2. *Кудряшова Л. В., Степанова Л. А.* О точных решениях уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. История и методология естественных наук, вып. 14. Изд-во МГУ. Сер. матем., механ., 1973.
3. *Колосов Г. В.* О некоторых видоизменениях начала Гамильтона в применении к решению вопросов механики твердого тела. СПб., 1903.
4. *Биркгоф Г.* Динамические системы. М.— Л., Гостехиздат, 1941.
5. *Аржаных И. С.* Об уравнениях вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Докл. АН СССР, 1954, т. 97, № 3.
6. *Аржаных И. С.* О приложении функций комплексного переменного к динамике материальной точки. Докл. АН СССР, 1954, т. 96, № 1.