МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1976

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИН СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

А. В. ПЛЕХАНОВ, А. П. ПРУСАКОВ

(Днепропетровск)

В асимптотическом методе, предложенном А. Л. Гольденвейзером для построения теории изгиба сравнительно тонких пластин [1], строилось решение для внутреннего напряженного состояния и погранслоя, описывающего краевые эффекты. Исходными для этого метода являлись уравнения теории упругости, записанные в статической форме.

В данной работе для построения теории изгиба упругой трансверсально изотропной пластины средней толщины предлагается асимптотический метод (имеющий итерационный характер), основанный на энергетических соображениях. Напряжения и перемещения пластины представляются в виде рядов по полиномам Лежандра по координате, изменяющейся по толщине. Для получения уравнений равновесия, краевых условий и зависимостей между усилиями и перемещениями используется вариационное уравнение Рейсснера [2]. Первое приближение метода дает теорию пластин Рейсснера [3], из второго приближения, как частный случай, получается теория пластин С. А. Амбарцумяна [4]. Решены две задачи для пластины, деформирующейся по цилиндрической поверхности.

1. Рассмотрим упругую трансверсально изотропную пластину постоянной толщины h. Пусть на лицевых плоскостях $z=\pm 0.5h$ пластина нагружена так:

$$\sigma_z=0.5[\pm q(x,\ y)-p(x,\ y)] \qquad \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0$$

Представим напряжения в пластине в виде рядов

$$\sigma_x=N_x h^{-1}+I^{-1}\sum_{i=1}^{\infty} f_i(z)M_{ix}(x,y) \qquad (x\to y,\ x\to xy)$$

$$\sigma_z=-0.5p-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(z)\,\omega_i(x,y) \qquad \omega_1=-q$$

$$\sigma_{xz}=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{i,z}Q_{ix}(x,y) \qquad (x\to y),\quad I=\frac{h^3}{12} \qquad (1.1)$$

где выражения в скобках $x\to y$, $x\to xy$ обозначают, что последующие выражения получаются путем замены x на y и x на xy; нижний индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей переменной.

В (1.1) обозначено ($P_i(2z/h)$ — полиномы Лежандра)

$$f_1=\frac{h}{2}P_1\left(\frac{2z}{h}\right),\quad f_2=-2hP_2\left(\frac{2z}{h}\right),\quad f_3=-\frac{h}{3}P_3\left(\frac{2z}{h}\right),\quad f_4=8hP_4\left(\frac{2z}{h}\right)$$

$$f_5=\frac{4h}{15}P_5\left(\frac{2z}{h}\right),\ \ldots,\quad \alpha_1=\frac{3}{2h}\left(z-\frac{4z^3}{3h^2}\right),\quad \alpha_2=\frac{1}{16}-\frac{z^2}{2h^2}+\frac{z^4}{h^4}$$

$$\alpha_3=\frac{1}{4h}\left(z-\frac{8z^3}{h^2}+\frac{16z^5}{h^4}\right),\quad \alpha_4=\frac{1}{24}-\frac{3z^2}{2h^2}+\frac{10z^4}{h^4}-\frac{56z^6}{3h^6}$$

$$\alpha_5=\frac{1}{8h}\left(z-\frac{20z^3}{h^2}+\frac{112z^5}{h^4}-\frac{192z^7}{h^6}\right),\ \ldots \tag{1.2}$$

Выражения (1.1) находятся в соответствии с [5]; в (1.1) M_{ix}, M_{iy}, M_{ixy}, Q_{ix}, Q_{iy} $(i\geqslant 2)$ — полимоменты и полисилы, определяющие самоуравновешенные по толщине пластины напряжения.

Компоненты перемещений пластины представим в виде

$$u=\sum_{i=0}^{\infty} f_i(z)u_i(x,y)\qquad (u\to v, f_0=1),\qquad w=\sum_{i=0}^{\infty} f_{i,z}w_i(x,y) \tag{1.3}$$

Для получения уравнений равновесия, краевых условий и зависимостей между усилиями и перемещениями воспользуемся вариационным уравнением Рейсснера [2]. Для трансверсально изотропной пластины оно запишется так:

$$\iiint\limits_h (\sigma_x\delta u_{,x}+\sigma_y\delta v_{,y}+\sigma_z\delta w_{,z}+\sigma_{xy}\delta(u_{,y}+v_{,x})+\sigma_{xz}\delta(w_{,x}+u_{,z})+$$
$$+\sigma_{yz}\delta(w_{,y}+v_{,z})+[u_{,x}-E^{-1}(\sigma_x-\mu\sigma_y)+\mu_3E_3^{-1}\sigma_z]\delta\sigma_x+[v_{,y}-E^{-1}(\sigma_y-\mu\sigma_x)+$$
$$+\mu_3E_3^{-1}\sigma_z]\delta\sigma_y+[u_{,y}+v_{,x}-2(1+\mu)E^{-1}\sigma_{xy}]\delta\sigma_{xy}+\{w_{,z}-E_3^{-1}[\sigma_z-\mu_3(\sigma_x+$$
$$+\sigma_y)]\}\delta\sigma_z+(w_{,x}+u_{,z}-G_3^{-1}\sigma_{xz})\delta\sigma_{xz}+(w_{,y}+v_{,z}-G_3^{-1}\sigma_{yz})\delta\sigma_{yz})\,dx\,dy\,dz-$$
$$-\iint\limits_{F_1}(X_n\delta u+Y_n\delta v+Z_n\delta w)\,dF_1=0 \tag{1.4}$$

В (1.4) X_n, Y_n, Z_n — составляющие поверхностных сил; F_1 — часть поверхности пластины, на которой заданы поверхностные силы; h под знаком интеграла обозначает интегрирование по толщине пластины.

При обычном методе получения основных уравнений пластины из вариационного уравнения (1.4) их порядок увеличивается с каждым приближением (с увеличением i в (1.1) и (1.3)). Повышение порядка уравнений увеличивает вычислительные трудности, а при малом числе приближений нет возможности достаточно точно аппроксимировать краевые эффекты. Отметим, что наличие самоуравновешенных по толщине напряженных состояний в этом методе не обязательно. Основные уравнения, полученные из вариационного обычным методом, будем называть связанными.

Для реализации условия (1.4) можно предложить другой метод. В первом приближении будем варьировать энергию лишь по несамоуравновешенному по толщине напряженному состоянию пластины ($i=0$, 1). Считая несамоуравновешенное напряженное состояние известным, для определения напряженного состояния с индексом $i=2$ будем варьировать энергию пластины по второму (самоуравновешенному) напряженному состоянию. Полагая предыдущие напряженные состояния известными, варьируем затем энергию пластины по третьему (самоуравновешенному) напряженному состоянию и т. д. В итоге получим итерационный процесс, при котором любое напряженное состояние, начиная с $i=1$, описывается уравнениями шестого порядка (напряженное состояние, соответствующее $i=0$, описывается уравнениями четвертого порядка). При этом напряженное состояние пластины в j-м приближении представится суммой несамоуравновешенного напряженного состояния (первого приближения) и соответствующего количества самоуравновешенных напряженных состояний. Наличие самоуравновешенных напряженных состояний в этом методе обязательно. Предлагаемый метод, в отличие от известного асимптотического метода [1], может быть назван энергоасимптотическим.

Пусть $p_n(z, s)$, $p_s(z, s)$, $p_z(z, s)$ — составляющие поверхностных сил, приложенные к боковой поверхности пластины (n, s — внешняя нормаль и касательная к контуру пластины). Тогда в соответствии с (1.1) и (1.3) вариационное уравнение (1.4) для определения несамоуравновешенного напряженного состояния пластины запишется (с учетом $f_{1,z}=1$ и ортогональности f_0 и f_1) так:

$$\begin{gathered}
\iiint_h \{h^{-1}[N_x\delta u_{0,x}+N_y\delta v_{0,y}+N_{xy}\delta(u_{0,y}+v_{0,x})]+I^{-1}f_1^2[M_{1x}\delta u_{1,x}+M_{1y}\delta v_{1,y}+ \\
+M_{1xy}\delta(u_{1,y}+v_{1,x})]+\alpha_{1,z}[Q_{1x}\delta(w_{1,x}+u_1)+Q_{1y}\delta(w_{1,y}+v_1)]+ \\
+h^{-1}[u_{0,x}-E^{-1}h^{-1}(N_x-\mu N_y)-0.5p\mu_3E_3^{-1}]\delta N_x+h^{-1}[v_{0,y}-E^{-1}h^{-1}(N_y-\mu N_x)- \\
-0.5p\mu_3E_3^{-1}]\delta N_y+h^{-1}[u_{0,y}+v_{0,x}-2(1+\mu)E^{-1}h^{-1}N_{xy}]\delta N_{xy}+ \\
+I^{-1}f_1[f_1u_{1,x}-E^{-1}I^{-1}f_1(M_{1x}-\mu M_{1y})+\alpha_1\mu_3E_3^{-1}q]\delta M_{1x}+I^{-1}f_1[f_1v_{1,y}- \\
-E^{-1}I^{-1}f_1(M_{1y}-\mu M_{1x})+\alpha_1\mu_3E_3^{-1}q]\delta M_{1y}+I^{-1}f_1^2[u_{1,y}+v_{1,x}- \\
-2(1+\mu)E^{-1}I^{-1}M_{1xy}]\delta M_{1xy}+\alpha_{1,z}[(w_{1,x}+u_1-\alpha_{1,z}G_3^{-1}Q_{1x})\delta Q_{1x}+ \\
+(w_{1,y}+v_1-\alpha_{1,z}G_3^{-1}Q_{1y})\delta Q_{1y}]\}\,dx\,dy\,dz-\iint q\delta w_1\,dx\,dy- \\
-\int_h [p_n(\delta u_{0n}+f_1\delta u_{1n})+p_s(\delta u_{0s}+f_1\delta u_{1s})+p_z\delta w_1]\,ds\,dz=0 \qquad (1.5)
\end{gathered}$$

В (1.5) и дальнейшем u_{in}, u_{is} — перемещения по нормали и касательной к контуру пластины

$$u_{in}=u_i\zeta_1+v_i\zeta_2,\quad u_{is}=v_i\zeta_1-u_i\zeta_2 \quad (i=0,1,\ldots),\quad \zeta_1=\cos(n,x),\quad \zeta_2=\cos(n,y)$$

Для определения k-го ($k\geqslant 2$) самоуравновешенного напряженного состояния вариационное уравнение (1.4) примет (с учетом ортогональности функций f_i) вид

$$\begin{gathered}
\iiint_h \left(I^{-1}f_k^2[M_{kx}\delta u_{k,x}+M_{ky}\delta v_{k,y}+M_{kxy}\delta(u_{k,y}+v_{k,x})]-\left(0.5p+\sum_{i=1}^k\alpha_i\omega_i\right)f_{k,zz}\delta w_k+\right. \\
+f_{k,z}\left[\left(\sum_{i=1}^k\alpha_{i,z}Q_{ix}\right)\delta(w_{k,x}+u_k)+\left(\sum_{i=1}^k\alpha_{i,z}Q_{iy}\right)\delta(w_{k,y}+v_k)\right]+I^{-1}f_k\left[f_ku_{k,x}-\right. \\
\left.-E^{-1}I^{-1}f_k(M_{kx}-\mu M_{ky})-\mu_3E_3^{-1}\sum_{i=1}^k\alpha_i\omega_i\right]\delta M_{kx}+I^{-1}f_k\left[f_kv_{k,y}-E^{-1}I^{-1}f_k(M_{ky}-\right. \\
\left.-\mu M_{kx})-\mu_3E_3^{-1}\sum_{i=1}^k\alpha_i\omega_i\right]\delta M_{ky}+I^{-1}f_k^2[u_{k,y}+v_{k,x}-2(1+\mu)E^{-1}I^{-1}M_{kxy}]\delta M_{kxy}- \\
-\left\{\sum_{i=1}^k f_{i,zz}w_i+E_3^{-1}[0.5p+\mu_3h^{-1}(N_x+N_y)]+E_3^{-1}\sum_{i=1}^k[\alpha_i\omega_i+\mu_3I^{-1}f_i(M_{ix}+\right.
\end{gathered}$$

$$+M_{iy})\Big]\Big\}\alpha_h\delta\omega_h+\Big\{\sum_{i=1}^{k}[f_{i,z}(w_{i,x}+u_i)-G_3{}^{-1}\alpha_{i,z}Q_{ix}]\Big\}\alpha_{h,z}\delta Q_{hx}+\Big\{\sum_{i=1}^{k}[f_{i,z}(w_{i,y}+$$

$$+v_i)-G_3{}^{-1}\alpha_{i,z}Q_{iy}]\Big\}\alpha_{h,z}\delta Q_{hy}\Big)\,dx\,dy\,dz-0.5\int\int[(q-p)f_{h,z}(0.5h)+$$

$$+(q+p)f_{k,z}(-0.5h)]\delta w_k\,dx\,dy-\int_h[f_k(p_n\delta u_{kn}+p_s\delta u_{ks})+p_zf_{k,z}\delta w_k]\,ds\,dz=0 \tag{1.6}$$

Напряженное состояние пластины разделяется на симметричное и кососимметричное (изгибное). В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь изгибной деформации пластины, которая определяется нечетными i в (1.1) и (1.3).

При помощи (1.5) и (1.2) получаем уравнения для определения несамоуравновешенного состояния пластины при изгибной деформации

$$D\nabla^4w_1=q-h^2(2GE_3-\mu_3EG_3)[10E_3G_3(1-\mu)]^{-1}\nabla^2q$$
$$\nabla^2\psi_1-10C_0\psi_1=0 \tag{1.7}$$

В (1.7) и дальнейшем $D=Eh^3/12(1-\mu^2)$, $\nabla^2(\cdot)=(\cdot)_{,xx}+(\cdot)_{,yy}$, $\psi_i=u_{i,y}-v_{i,x}$, $C_0=G_3(Gh^2)^{-1}$. Остальные функции, описывающие решение задачи в первом приближении, определяются через w_1 и ψ_1 так:

$$u_1=-w_{1,x}+1.2DC^{-1}[1.2(A-C^{-1})q_{,x}-\nabla^2w_{1,x}+0.5(1-\mu)\psi_{1,y}]$$
$$(u\to v,\ x\rightleftarrows y,\ \psi\to-\psi)$$
$$M_{1x}=D(u_{1,x}+\mu v_{1,y}+1.2Aq)\quad(x\rightleftarrows y,\ u\rightleftarrows v),\quad M_{1xy}=0.5D(1-\mu)(u_{1,y}+v_{1,x}) \tag{1.8}$$
$$Q_{1x}=5C(w_{1,x}+u_1)/6\quad(x\to y,\ u\to v),\quad B=Eh/(1-\mu^2)$$
$$A=\mu_3(1+\mu)/E_3h,\quad C=G_3h$$

Граничные условия следуют из условия на контуре, которое получается из (1.5). Для первого приближения и последующих напряженных состояний условия на контуре можно записать в виде

$$\int[(A_iM_{in}-M_{in}{}^\circ)\delta u_{in}+(A_iM_{is}-M_{is}{}^\circ)\delta u_{is}+(B_iQ_{in}-Q_{in}{}^\circ)\delta w_i]\,ds=0$$
$$A_i=I^{-1}\int_h f_i{}^2dz,\quad B_i=\int_h\alpha_{i,z}f_{i,z}dz\quad{\scriptstyle(i=1,3,\ldots)} \tag{1.9}$$

В (1.9) и в дальнейшем

$$M_{in}=M_{ix}\zeta_1{}^2+M_{iy}\zeta_2{}^2+2M_{ixy}\zeta_1\zeta_2,\quad M_{is}=(M_{iy}-M_{ix})\zeta_1\zeta_2+M_{ixy}(\zeta_1{}^2-\zeta_2{}^2)$$

$$Q_{in}=Q_{ix}\zeta_1+Q_{iy}\zeta_2,\quad M_{in}{}^\circ=\int_h p_nf_i\,dz,\quad M_{is}{}^\circ=\int_h p_sf_i\,dz,\quad Q_{in}{}^\circ=\int_h p_zf_{i,z}\,dz$$

Первое приближение, как это видно из (1.7), дает теорию пластин Рейсснера.

Полагая в (1.6) $k=3$, получаем основные уравнения для определения самоуравновешенного напряженного состояния, соответствующего $i=3$ в (1.1) и (1.3)

$$a_5a_8\nabla^4w_3-[a_4(157.5a_8-4DA)+{}^4/_{21}a_5(a_5a_6{}^{-1}-1)]\nabla^2w_3+30a_4a_5a_6{}^{-1}w_3=$$
$$=[a_5a_6{}^{-1}(2.25-a_7)-2.25]q+[5.25a_8(a_7-2.25)+0.2DA(1.5-{}^2/_3a^7)]\nabla^2q+$$
$$+a_3({}^{63}/_{16}a_8-0.1DA)\nabla^4w_1-0.75a_3a_5a_6{}^{-1}\nabla^2w_1$$

$$\nabla^2\psi_3-90C_0\psi_3=-22.5C_0\psi_1 \tag{1.10}$$

$$a_1={}^1/_{11}-{}^4/_{45}AB\mu_3,\quad a_2=1-2AB\mu_3,\quad a_3=Eh\mu_3[a_1(1-\mu)]^{-1},\quad a_4=E_3(a_1h)^{-1},$$

$$a_5={}^{315}/_8C,\quad a_6=a_5+{}^7/_4a_3,\quad a_7=a_2a_1^{-1}+0.9a_3C^{-1},\quad a_8=D(1+{}^2/_{45}Aa_3)a_6^{-1}$$

Остальные функции с индексом $i=3$ определяются следующим образом:

$$\varphi_3=5.25a_6^{-1}[(a_7-2.25)q+30a_4w_3-{}^4/_{21}a_5\nabla^2w_3+0.75a_3\nabla^2w_1] \tag{1.11}$$

$$\omega_3=2.25q+{}^4/_{21}a_5(\varphi_3+\nabla^2w_3),\quad u_3=-w_{3,x}+0.3C^{-1}Q_{1x}+$$
$$+2D[\varphi_{3,x}+0.5(1-\mu)\psi_{3,y}+0.2A(1.5q_{,x}-{}^2/_3\omega_{3,x})](15C)^{-1}$$
$$(u\to v,\ x\rightleftarrows y,\ \psi\to-\psi)$$
$$M_{3x}=D[u_{3,x}+\mu v_{3,y}+0.2A(1.5q-{}^2/_3\omega_3)]\quad (u\rightleftarrows v,\quad x\rightleftarrows y)$$
$$M_{3xy}=0.5D(1-\mu)(u_{3,y}+v_{3,x}),\quad Q_{3x}=-2.25Q_{1x}+7.5C(w_{3,x}+u_3)\quad (x\to y,\ u\to v)$$

Граничные условия получаются из (1.9) при $i=3$.

Полагая в (1.6) и (1.9) $k=5, 7,\ldots$, можно получить основные уравнения и краевые условия для определения w_k и ψ_k.

Решение некоторых задач показало, что сходимость процесса приближений при использовании связанных уравнений оказывается несколько лучшей по сравнению с энергоасимптотическим методом, но получение решений энергоасимптотическим методом значительно проще и может быть осуществлено в высоком приближении.

В дальнейшем напряженное состояние, описываемое w_1, будем называть основным, напряженное состояние, определяемое w_k $(k\geqslant3)$ — потенциальным, а функциями ψ_k $(k\geqslant1)$ — вихревым. Полное напряженное состояние будет складываться из основного, потенциального и вихревого напряженных состояний.

Основное напряженное состояние распространяется на всю пластину и не содержит краевых эффектов. Потенциальное напряженное состояние состоит из двух качественно различных состояний. Первое распространяется на всю пластину (основное потенциальное напряженное состояние), второе локализуется около краев (потенциальный краевой эффект). Вихревое напряженное состояние имеет характер краевого эффекта (вихревой краевой эффект).

Таким образом, внутреннее напряженное состояние будет состоять из основного и основного потенциального состояний. Напряженное состояние погранслоя будет определяться потенциальным и вихревым краевыми эффектами.

2. Рассмотрим некоторые частные случаи полученных уравнений.

Если в уравнениях первого приближения пренебречь напряжением σ_z и поперечными сдвигами, полагая $E_3=G_3=\infty$, то получим классическую теорию пластин.

Первое приближение, как уже отмечалось, дает теорию пластин Рейсснера [3], которая описывает (в первом приближении) как внутреннее напряженное состояние (при линейном изменении по толщине напряжений σ_x, σ_y, σ_{xy}), так и вихревой краевой эффект (краевой эффект Рейсснера). Потенциального краевого эффекта эта теория не содержит.

Второе приближение, которое описывается уравнениями (1.7) и (1.10), дает потенциальное напряженное состояние в первом приближении и вихревой краевой эффект во втором приближении.

Из второго приближения как частный случай можно получить теорию пластин [4].

Если принять во втором приближении

$$w_3=\omega_3=Q_{3x}=Q_{3y}=0 \tag{2.1}$$

то выражения для напряжений, усилий и перемещений пластины примут вид

$$\sigma_x=(zM_{1x}+f_3M_{3x})/I \quad (x\to y,\ x\to xy) \tag{2.2}$$

$$\sigma_z=\alpha_1 q, \quad \sigma_{xz}=\alpha_{1,z}Q_{1x} \quad (x\to y)$$

$$M_{3x}=D(u_{3,x}+\mu v_{3,y}+0.3Aq) \quad (u\rightleftarrows v, \quad x\rightleftarrows y), \quad M_{3xy}=0.5D(1-\mu)(u_{3,y}+v_{3,x})$$

$$w=w_1, \quad u=zu_1+f_3u_3 \quad (u\to v)$$

где моменты с индексом $i=1$ определяются согласно (1.8).

С помощью (2.1) и выражений (1.8), (1.11) получаем

$$u_3=0.25(w_{1,x}+u_1) \quad (u\to v, \quad x\to y) \tag{2.3}$$

где w_1, u_1, v_1 определяются по теории пластин Рейсснера.

Выражения (2.2) с учетом (2.3) находятся в полном соответствии с [4].

Таким образом, теория пластин [4] описывает во втором приближении внутреннее напряженное состояние (при нелинейном изменении по толщине σ_x, σ_y, σ_{xy}) и в первом приближении вихревой краевой эффект. Потенциального краевого эффекта эта теория не содержит.

3. В качестве первого примера был рассмотрен изгиб по цилиндрической поверхности свободно опертой пластины под действием поперечной нагрузки $q=q_0\sin(\pi x a^{-1})$, где a – длина пластины.

В этой задаче потенциальный и вихревой краевые эффекты отсутствуют, и напряженное состояние пластины состоит из основного и основного потенциального напряженных состояний. Числовые расчеты были выполнены для изотропных пластин ($\mu=0.3$) с $a=h$ и $a=5h$. Результаты расчетов приведены ниже

точное решение	0.87367	15.399	0.35082	77.024
по теории [3]	0.60793	15.198	0.38081	76.783
по теории [4]	0.85078	15.441	0.38081	76.783
по связанным уравнениям	0.86123	–	0.35275	–
во втором приближении	0.85662	15.401	0.36087	77.046
в третьем приближении	0.87229	15.401	0.35867	77.044

В первых двух столбцах даны значения σ_x/q при $z=0.5h$ соответственно для $a=h$ и $a=5h$. В третьем и четвертом столбцах приведены значения wE/qh при $z=0$ для $a=h$ и $a=5h$. Точное решение задачи было получено в соответствии с уравнениями Ляме для случая плоской деформации.

Как видно из таблицы, решение задачи энергоасимптотическим методом во втором приближении дает хорошие результаты как для перемещений, так и для напряжений.

В п. 1 отмечалось, что в случае использования связанных уравнений сходимость процесса приближений оказывается несколько лучшей. В четвертой строке таблицы для $a=h$ даны результаты решения во втором приближении по связанным уравнениям (во втором приближении они имеют двенадцатый порядок). Эти результаты хотя и точнее, но мало отличаются от результатов решения в том же приближении энергоасимптотическим методом.

В качестве второго примера был рассмотрен изгиб по цилиндрической поверхности заделанной по краям пластины под действием равномерно распределенной нагрузки q. В этом случае напряженное состояние пластины описывается основным, основным потенциальным напряженными состояниями и потенциальным краевым эффектом. Числовые расчеты были проведены для изотропных пластин ($\mu=0.3$) с

$a=5h$ и $a=10h$. Результаты расчетов (определялись напряжения σ_x при $z=0.5h$ по середине пластины — $\sigma_x^{(1)}$, в заделке — $\sigma_x^{(2)}$ и прогибы w при $z=0$ по середине пластины) даны ниже

По классической теории	6.2500	25.000	−12.500	−50.000	17.773	284.38
по теории [3]	6.5071	25.257	−12.243	−49.743	27.523	323.38
во втором приближении	6.7083	25.458	−16.592	−61.210	27.617	323.84
в третьем приближении	6.7084	25.458	−18.872	−65.092	27.615	323.83

В первом и втором столбцах этой таблицы приведены значения $\sigma_x^{(1)}/q$ соответственно при $a=5h$ и $a=10h$, в третьем и четвертом столбцах — значения $\sigma_x^{(2)}/q$ для $a=5h$, $a=10h$. В двух последних столбцах даны значения wE/qh для $a=5h$ и $a=10h$.

Как и для свободно опертой пластины, внутреннее напряженное состояние с достаточной точностью определяется вторым приближением. В зоне краевого эффекта (краевой эффект затухает от заделки на расстоянии, равном половине толщины пластины), как это видно из таблицы, сходимость процесса приближений для $\sigma_x^{(2)}$ зависит от отношения a/h (с увеличением a/h сходимость улучшается). И если для $a=10h$ можно ограничиться третьим приближением, то для получения надлежащей точности для $a=5h$ необходимо решение задачи в четвертом приближении. Отметим, что уточнения в $\sigma_x^{(2)}$ по сравнению с классической теорией пластин тем больше, чем меньше отношение a/h.

Полученные здесь результаты для напряжений в заделке находятся в качественном соответствии с [6], где рассмотрена заделанная по краям балка-стенка с $a/h=1$, 1.5 (поперечная нагрузка q приложена к верхнему краю балки-стенки).

В работе [7] методом асимптотического разложения общего интеграла для плиты (полученного на основе символического метода А. И. Лурье) решена задача об изгибе по цилиндрической поверхности заделанной пластины с $a/h=3$, 10. Уточнения в $\sigma_x^{(1)}$ по сравнению с классической теорией соответственно составили 12.3% и 1.35%. Эти уточнения из-за медленной сходимости процесса приближений были получены лишь в четвертом приближении (отметим, что для $a/h=10$ уточнение в $\sigma_x^{(1)}$ во втором приближении энергоасимптотического метода составляет 1.79% по сравнению с классическим решением). Результаты для $\sigma_x^{(2)}$ в работе [7] не приводятся, так как, по мнению ее автора, четвертое приближение метода не гарантирует надлежащей точности определения напряжений в зоне потенциального краевого эффекта.

Приведенные примеры показывают вполне удовлетворительную сходимость процесса последовательных приближений, основанного на энергетических соображениях. Полученные уравнения изгиба могут быть использованы при рассмотрении пластин средней толщины с высоким показателем изменяемости напряженно-деформированного состояния (концентрация напряжений, действие локальных нагрузок, краевые эффекты).

Поступила 31 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. *Reissner E.* On a variational theorem in elasticity. J. Math. and Phys., 1950, vol. 29, No. 2.
3. *Reissner E.* On bending of elastic plates. Quart. Appl. Math., 1947, vol. 5, No. 1.
4. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М., «Наука», 1967.
5. *Понятовский В. В.* К теории пластин средней толщины. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
6. *Длугач М. И.* Метод сеток в смешанной плоской задаче теории упругости. Киев, «Наукова думка», 1964.
7. *Нигул У. К.* О приближенном учете краевых эффектов типа Сен-Венана в краевых задачах статики плит. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.