МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1976

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ТОНКИХ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ОСЦИЛЛЯЦИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

В. М. КОРНЕВ

(Новосибирск)

Предлагаются два способа асимптотического интегрирования. Первый способ связан с модификацией традиционных подходов [1]. Для получения краевых условий вырожденной задачи исходные краевые условия выписываются в каноническом виде (порядок следования условий совпадает с их важностью). Указаны итерационные процессы построения решения задачи асимптотического интегрирования уравнений тонких выпуклых оболочек вращения при произвольных краевых условиях.

Второй способ получения вырожденной задачи не накладывает каких-либо ограничений на вид исходных краевых условий, при этом способе требуется построение фундаментальной системы решений для краевых эффектов (погранслоев). Исходное уравнение сначала распадается на два уравнения: на уравнение для основной части решения и на уравнение для краевых эффектов. Выкладки при применении второго способа достаточно громоздки. Второй способ формулировки вырожденных задач связан с идеями работ [2, 3].

Разработка качественного анализа напряженного состояния имеет длительную историю [4]. Считается, что целесообразно безмоментное напряженное состояние и краевые эффекты определять раздельно. Общая теория такого расчленения хорошо разработана, когда изменяемость основного (безмоментного) состояния мала [4]. Эти результаты подтверждены теоремами о краевых задачах обыкновенных дифференциальных уравнений при сингулярном возмущении для произвольных краевых условий [5, 6]. Напомним, что малый параметр, входящий в уравнения теории оболочек, характеризует тонкостенность конструкции.

Данная работа посвящена развитию традиционного подхода для оболочек вращения, когда отсутствуют ограничения на изменяемость напряженно-деформированного состояния по окружной координате. В отличие от [7–9] изучаются задачи с нетривиальными граничными условиями. Работы [10, 11] по фактическому построению решения краевой задачи нельзя признать удовлетворительными (см. теоремы из [12, 13]).

Если исходные краевые условия допускают запись в каноническом виде [5, 6, 12, 13,], то можно указать для каждого элементарного состояния краевые условия. Приведенные ниже итерационные процессы построения решения задачи асимптотического интегрирования уравнений тонких выпуклых оболочек вращения при произвольных краевых условиях учитывают три типа возмущений. В упомянутой задаче построена двухпараметрическая асимптотика по двум параметрам, один из которых характеризует тонкостенность оболочки, а другой – осцилляцию напряженно-деформированного состояния по окружной координате.

При построении асимптотических разложений использовались известные оценки порядка корней «характеристического» уравнения [9]. Выявление асимптотической погрешности решения, построенного по первому способу, связано с оценкой остаточного члена разложений для каждого шага итерационного процесса. Эта оценка проводится, как обычно [5], при этом используются фундаментальные системы решений исходного уравнения [14, 15].

Второй способ связан с громоздкими выкладками (какие-либо ограничения на вид исходных граничных условий отсутствуют), так как сначала исходное уравнение срезающим преобразованием [16] расщепляется на два уравнения, первое из которых есть уравнение вырожденной задачи, а второе – уравнение краевого эффекта. Для последнего уравнения выписывается общее представление решения, после чего путем алгебраических преобразований [17] получаются краевые условия для вырожденного уравнения.

Отметим, что оба способа уже применялись в задачах устойчивости и колебаний [18].

1. Рассматривается задача о расчленении напряженно-деформированного состояния оболочки при заданных растягивающих усилиях в срединной поверхности

$$D\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\Phi+N_1\varkappa_1+N_2\varkappa_2+Eh\nabla_k^2\nabla_k^2\Phi=p \tag{1.1}$$
$$w=\nabla^2\nabla^2\Phi, \quad F=Eh\nabla_k^2\Phi, \quad D=Eh^3/12(1-\nu^2)$$
$$\nabla^2\Phi=a_1^{-2}\Phi_{\alpha\alpha}+a_2^{-2}\Phi_{\beta\beta}, \quad \nabla_k^2\Phi=a_1^{-2}k_2\Phi_{\alpha\alpha}+a_2^{-2}k_1\Phi_{\beta\beta}$$
$$\varkappa_1=-a_1^{-2}w_{\alpha\alpha}, \quad \varkappa_2=-a_2^{-2}w_{\beta\beta}$$

Здесь Φ — разрешающая функция; w, F — нормальный прогиб и функция напряжений; $-N_1$, $-N_2$ — заданные растягивающие усилия; p — поверхностная нагрузка; $k_1(\alpha)$, $k_2(\alpha)$ — главные кривизны; $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности; α, β — продольная и окружная координаты.

Система уравнений теории пологих оболочек относительно функций w и F сводится к одному разрешающему уравнению (1.1) с достаточной точностью для произвольных выпуклых оболочек вращения при значительной осцилляции напряженно-деформированного состояния и для оболочек со слабо изменяемой геометрией при произвольной осцилляции. Пусть на торце оболочки заданы следующие краевые условия:

$$L_j\Phi=\varphi_j \quad {\scriptstyle (j=1,\,2,\,3,\,4)} \quad \alpha=\alpha_0; \quad {\scriptstyle (j=5,\,6,\,7,\,8)} \quad \alpha=\alpha_1 \tag{1.2}$$

Вводим безразмерные координаты: α заменяем на Rx, где $R=\alpha_1-\alpha_0$. В уравнении (1.1) имеются малые множители при старших производных, а именно: при старшем эллиптическом операторе восьмого порядка — множитель ε^4, при младшем эллиптическом операторе четвертого порядка — множитель $\varepsilon^0\equiv1$ ($\varepsilon=(h/R)^{1/2}$).

Далее рассмотрим задачи, в которых эллиптический оператор шестого порядка либо отсутствует, либо имеет множитель ε^2; растягивающие усилия в срединной поверхности поставлены в соответствии с тонкостенностью конструкции (другие случаи здесь не рассматриваются). Допустим задача (1.1), (1.2) допускает разделение переменных $\Phi(x, \beta)=X(x)\sin m\beta$ ($\Phi(x, \beta)=X(x)\cos m\beta$), причем

$$m=c\varepsilon^{-\gamma} \quad (0\leqslant\gamma<\infty,\ c=\text{const}) \tag{1.3}$$

Итак, осцилляция по окружной координате ставится в соответствие с тонкостенностью оболочки (осесимметричные задачи здесь не рассматриваются). Окончательно имеем двухточечную задачу для обыкновенного диффренциального уравнения восьмого порядка с переменными коэффициентами

$$a_4X^{(8)}+a_3X^{(6)}+a_2X^{(4)}+a_1X''+a_0X=p_m$$
$$L_jX=\varphi_{mj} \quad {\scriptstyle (j=1,\,2,\,3,\,4)} \quad x=0; \quad {\scriptstyle (j=5,\,6,\,7,\,8)} \quad x=1 \tag{1.4}$$

Допустим, что изменяемость функций $p_m=p_m(x)$ порядка единицы. Задача (1.4) имеет три типа возмущений: уравнение содержит члены за малыми параметрами как при младших, так и при старших производных и, наконец, краевые условия зависят от малого параметра ε в неположительной степени.

Коэффициенты уравнения (1.4) предполагаются голоморфными функциями. Исследуем порядки (относительно малого параметра ε) возмущающих членов в уравнении (1.4) и корней соответствующего характеристического уравнения.

Рассмотрим четыре случая: 1) осцилляция порядка единицы ($\gamma=0$); 2) небольшая осцилляция ($0<\gamma<1$); 3) средняя осцилляция ($\gamma=1$);

4) значительная осцилляция ($\gamma>1$). При этом анализе воспользуемся результатами из [9].

Порядок возмущающих членов и порядок корней характеристического уравнения в каждом из случаев следующий [9]: 1) $O(\varepsilon)$; четыре корня порядка ε^{-1} и четыре корня порядка единицы; 2) $O(\varepsilon)$, $O(\varepsilon^{\gamma})$, $O(\varepsilon^{1-\gamma})$; четыре корня порядка ε^{-1} и четыре корня порядка $\varepsilon^{-\gamma}$; 3) $O(\varepsilon)$; восемь корней порядка ε^{-1}; 4) $O(\varepsilon^{\gamma})$, $O(\varepsilon^{\gamma-1})$; восемь корней порядка $\varepsilon^{-\gamma}$. Причем в первом и втором случаях два корня имеют большую отрицательную и два корня большую положительную действительную часть порядка ε^{-1}, а в третьем и четвертом случаях таких корней четыре.

Выше приведен порядок возмущающих членов в уравнении (1.4) с точностью до целочисленного сомножителя в показателе малого параметра (см. п.3). Условия регулярности вырождения во всех четырех случаях выполнены [9]; число краевых условий задачи (1.4) согласовано с числом корней, имеющих большую отрицательную и положительную действительную части: в первом случае $4>2$, во втором, третьем и четвертом случаях $4=4$ (первое число в неравенстве и равенстве соответствует числу краевых условий при $x=0$ или $x=1$ задачи (1.4), второе число в неравенстве и равенстве есть число упомянутых корней).

Итак, решение задачи (1.4) можно представить в виде

$$X=X_0+X_*+X_{**} \tag{1.5}$$

Здесь X_0 — решение вырожденного уравнения; X_*, X_{**} — краевые эффекты около точек $x=0$, 1, причем для второго случая $X_*=W_1+W_2$, $X_{**}=W_3+W_4$, где краевые эффекты W_1, W_3 и W_2, W_4 порождаются соответственно корнями характеристического уравнения порядка ε^{-1} и $\varepsilon^{-\gamma}$.

В трех последних случаях решение вырожденного уравнения будет $X_0=p_m/a_0$. Составляющие решения X_0, X_* и X_{**} являются конкретными элементарными состояниями, для которых необходимо сформулировать краевые задачи.

2. Перейдем к формулировке дифференциальных уравнений и краевых условий для решений X_0, X_* и X_{**}. Предварительно разберем первый способ, когда исходные краевые условия задачи (1.4) допускают запись в каноническом виде.

В общем случае краевые условия полной задачи (1.4) содержат нецелые степени малого параметра. Поэтому преобразуем исходные краевые условия [12, 13]. Назовем краевые условия при $x=0$ записанными в каноническом виде, если они разрешены относительно членов, характеризующихся максимумом параметра μ, и расположены так, что при переходе от j граничного условия к $(j+1)$ характеристический параметр увеличивается

$$L_j{}^*X=\varepsilon^q\frac{d^nX(0)}{dx^n}+\sum_{i=0}^{n^*-1}b_{ij}{}^*\frac{d^iX(0)}{dx^i}=\varphi_j{}^* \qquad (j=1,2,3,4)$$

$$\mu=n-q,\quad 0\leqslant\mu(1)<\mu(2)<\mu(3)<\mu(4),\quad n^*=\min n \tag{2.1}$$

Здесь и далее $\mu=\mu(j)$, $n=n(j)$, $q=q(j)$ — функции целочисленных аргументов. Краевые условия (2.1) эквивалентны исходным краевым условиям. В соотношениях (2.1) нет малых параметров в отрицательных степенях; малый параметр ε не является общим множителем выражений $L_j{}^*X=\varphi_j{}^*$.

Если провести растяжение масштаба $x=\varepsilon t$, как в [1], то перед определяющими членами в (2.1) появляются множители ε^{q-n}; процесс растяжения масштаба поясняет введение в рассмотрение характеристического параметра μ. Аналогично поступаем и с краевыми условиями при $x=1$.

Сформулированное правило применяется в первом и третьем случаях. Для четвертого случая сначала необходимо ввести новый малый параметр $\delta=\varepsilon^\gamma$ ($\gamma>1$); после введения параметра δ корни характеристического уравнения будут иметь порядок δ^{-1}. К преобразованным краевым условиям применим сформулированное правило. Тогда определяющий член в краевых условиях примет вид $\delta^q d^n X(0)/dx^n$ и, следовательно, $\mu=n-q$.

Канонический вид краевых условий для второго случая получается в два этапа, так как у каждого торца имеются краевые эффекты с разной скоростью затухания. Сначала исходные краевые условия выпишем в первом каноническом ниде (см. (2.1))

$$L_j{}^*W_1=\varepsilon^q\frac{d^nW_1(\mathrm{o})}{dx^n}+\sum_{i=0}^{n^*-1}b_{ij}{}^*\frac{d^iW_1(\mathrm{o})}{dx^i}=\varphi_j{}^*-L_j{}^*X_0-$$

$$-\varepsilon^{\gamma\mu_{2i}}\left[\frac{\varepsilon^q}{\varepsilon^{\gamma n}}\frac{d^nX_*^{(2)}(\mathrm{o})}{dt_2{}^n}+\sum_{i=0}^{n^*-1}b_{ij}{}^*\varepsilon^{-\gamma i}\frac{d^iX_*^{(2)}(\mathrm{o})}{dt_2{}^i}\right]\tag{2.2}$$

$$\mu=n-q,\quad 0\leqslant\mu_1(1)<\ldots<\mu_1(4),\quad \mu_1(j)=\mu_{1j},\quad n^*=\min n\quad (j=1,\ldots,4)$$

Первые два условия из (3.2) представим во втором каноническом виде

$$L_j{}^{**}W_2=\delta^q\frac{d^nW_2(\mathrm{o})}{dx^n}+\sum_{i=0}^{n^\circ-1}b_{ij}{}^{**}\frac{d^iW_2(\mathrm{o})}{dx^i}=\varphi_j{}^{**}-L_j{}^{**}X_0-$$

$$-\varepsilon^{\mu_{13}}\left[\frac{\varepsilon^{\gamma q}}{\varepsilon^n}\frac{d^nX_*^{(1)}(\mathrm{o})}{dt_1{}^n}+\sum_{i=0}^{n^\circ-1}b_{ij}{}^{**}\varepsilon^{-i}\frac{d^iX_*^{(1)}(\mathrm{o})}{dt_1{}^i}\right]\tag{2.3}$$

$$\mu_2=n-q,\quad 0\leqslant\mu_2(1)<\mu_2(2),\quad \mu_2(j)=\mu_{2j},\quad n^\circ=\min n,\quad W_1=\varepsilon^{\mu_{13}}X_*{}^{(1)}$$

$$W_2=\delta^{\mu_{2i}}X_*{}^{(2)},\quad \delta=\varepsilon^\gamma$$

В условиях (2.2), (2.3) нет малых параметров ε, δ в отрицательных степенях (эти параметры не являются общими множителями). В квадратных скобках краевых условий (2.2), (2.3) стоят те же операторы $L_j{}^*$ и $L_j{}^{**}$, но с учетом растяжения масштабов [1] $x=\varepsilon^\gamma t_2$ и $x=\varepsilon t_1$ (все производные в правых частях (2.2), (2.3) после введения новых масштабов имеют порядок единицы).

Окончательно канонический вид исходных условий во втором случае будет следующим: оба условия (2.3) в том же порядке, а за ними третье и четвертое условия из (2.2). Сформулированное правило преобразования исходных краевых условий к каноническому виду является достаточно сложным. Поэтому, вероятно, во втором случае удобнее пользоваться более общим подходом, когда используется информация о фундаментальной системе решений для краевого эффекта (см. п. 4). Аналогично поступим и с краевыми условиями при $x=1$ (порядок следования краевых условий соответствует их важности).

Когда $\gamma=0$, т. е. $m=\mathrm{const}$, исходные краевые условия всегда могут быть записаны в каноническом виде, причем первые два условия соответствуют условиям безмоментной теории оболочек, а последующие два условия — условиям моментной теории [4]. При $\gamma\neq0$ порядок следования условий безмоментных и моментных теорий нарушается (см. примеры, приведенные в [18]).

При $\gamma>0$ исходные краевые условия иногда нельзя записать в форме (2.1) или (2.2), (2.3). Это указывает на то, что среди исходных краевых условий нельзя определить порядок, который устанавливал бы непосредственную связь между номером краевого условия и важностью этого условия (более общий подход приводится ниже в п. 4 и в [18]).

Отметим, что краевые условия (2.1) или (2.2), (2.3) содержат малые параметры. Задача (1.4), вообще говоря, содержит три типа возмущений: возмущения в краевых условиях (см. условия (2.1) или условия (2.3), (2.2) при $j=3, 4$); возмущения дифференциального оператора, причем среди последних имеются возмущения в основной части оператора и возмущения, повышающие порядок дифференциального оператора. При построении итерационного процесса необходимо учитывать все три типа возмущений. В [7–9] не рассматриваются возмущения в краевых условиях.

Определим вырожденную задачу для первого случая

$$a_2^\circ X_0^{(4)}+a_1^\circ X_0''+a_0^\circ X_0=p_m, \qquad L_j^{*\circ} X_0=\varphi_j^{*\circ} \quad {\scriptstyle (j=1,2)} \quad x=0; \quad {\scriptstyle (j=5,6)} \quad x=1 \tag{2.4}$$

Здесь коэффициенты a_0°, a_1° и a_2° не содержат членов с малыми множителями.

В уравнении (1.4) опустим члены с малыми множителями при старших и младших производных; в общем случае $a_i \neq a_i^\circ$ ($i=0, 1, 2$). В краевых условиях (2.1) опустим по два условия при $x=0$ и 1, так как характеристическое уравнение имеет по два больших корня с соответствующими знаками действительных частей; в оставшихся условиях вычеркиваем все второстепенные члены с малыми множителями.

Для второго, третьего и четвертого случаев решение вырожденной задачи тривиально $X_0=p_m/a_0$.

Пусть вырожденная задача (2.4) имеет, и притом единственное, решение (соответствующий определитель отличен от нуля). Покажем, что из разрешимости вырожденной задачи (2.4) следует разрешимость полной задачи, когда: все действительные корни характеристического уравнения, порождающие краевой эффект, различны; аналогичные корни характеристического уравнения имеют вид $\pm(b_0 \pm i b_1)/\varepsilon$ ($b_0=\mathrm{const}$, $b_1=\mathrm{const}$). Последний случай наиболее типичен. Из разрешимости полной задачи следует оценка остаточного члена при построении итерационного процесса. В [6, 13] предполагалось, что полная и вырожденная задачи имеют решение и притом единственное.

Воспользуемся фундаментальной системой решений уравнения (1.4). Для второго случая фундаментальная система решений получена в [15], а для всех остальных в — [14]. Формально эти фундаментальные системы имеют вид (1.5), где каждое из трех слагаемых в первом случае представляет суммы

$$X_0=\sum_i X_{0i}, \qquad X_*=\sum_i X_{*i}, \qquad X_{**}=\sum_i X_{**i} \tag{2.5}$$

Слагаемые в каждой из сумм являются аналитическими функциями малого параметра.

Подставляя соотношения (1.5) и (2.5) в краевые условия (2.1), получим систему алгебраических уравнений, основная часть определителя этих уравнений имеет вид (некоторые второстепенные члены в уравнениях опущены, так как считается, что краевые эффекты не взаимодействуют)

$$\Delta=\begin{vmatrix} L_j^*X_{00} & 0 & 0 \\ L_j^*X_{00} & L_j^*X_{*0} & 0 \\ L_j^*X_{00} & 0 & L_j^*X_{**0} \end{vmatrix}=|L_j^*X_{00}\|L_j^*X_{*0}\|L_j^*X_{**0}| \tag{2.6}$$

В первой строке определителя (2.6) параметр $j=1$, 2, 5, 6, во второй — $j=3$, 4, в третьей — $j=7$, 8. Определитель $\Delta\neq0$, так как определитель $|L_j^*X_{00}|\neq0$ по условию, а два последних определителя для достаточно малых $\varepsilon>0$ не равны нулю по построению.

Если считать, что краевые эффекты не взаимодействуют, определители, аналогичные (2.6), имеют вид

для третьего и четвертого случаев

$$\Delta=\begin{vmatrix} L_j^*X_{*0} & 0 \\ 0 & L_j^*X_{**0} \end{vmatrix}=|L_j^*X_{*0}\|L_j^*X_{**0}| \tag{2.7}$$

для второго случая

$$\Delta=\begin{vmatrix} L_j^{**}W_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_j^*W_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_j^{**}W_{40} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_j^*W_{30} \end{vmatrix}=$$

$$=|L_j^{**}W_{20}\|L_j^*W_{10}\|L_j^{**}W_{40}\|L_j^*W_{30}| \tag{2.8}$$

Здесь X_{*0}, X_{**0} — краевые эффекты, соответствующие корням порядка $\varepsilon^{-\gamma}(\gamma\geqslant1)$; W_{10}, W_{30} — краевые эффекты, соответствующие корням порядка ε^{-1}; W_{20}, W_{40} — краевые эффекты, соответствующие корням порядка $\varepsilon^{-\gamma}$ $(\gamma<1)$; нуль указывает на то, что все краевые эффекты являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (эти дифференциальные уравнения получаются после «замораживания» коэффициентов при $x=0$ и 1 в исходном уравнении (1.4) [6]; в определителе (2.7) параметр j пробегает значения: в первой строке — $j=1$, 2, 3, 4, во второй — $j=5$, 6, 7, 8; в определителе (2.8): в первой строке — $j=1$, 2, во второй — $j=3$, 4, в третьей — $j=5$, 6, в четвертой — $j=7$, 8.

Определитель (2.8) отличен от нуля, если каждый из четырех определителей второго порядка отличен от нуля. Каждый из упомянутых определителей отличен от нуля: 1) эти определители — обобщенные определители Вандермонда (действительные корни, порождающие краевой эффект, различны); 2) для задач теории оболочек ни в одной из строк или столбцов определителей второго порядка оба элемента одновременно не обращаются в нуль (корни, порождающие краевые эффекты, — $\pm(b_0\pm ib_1)/\varepsilon$ и $\pm(b_2\pm ib_3)/\varepsilon$).

Определитель (2.7) отличен от нуля, если оба определителя четвертого порядка отличны от нуля.

При построении асимптотических разложений считается, что все Δ из (2.6) — (2.8) не равны нулю.

3. Следуя [6, 9], построим асимптотические разложения решений задач (1.4) для различных случаев.

Случай 1. Асимптотическое разложение решения задачи (1.4) имеет вид

$$X_\varepsilon=\sum_{k\geqslant0}\varepsilon^kX_{0k}+\varepsilon^{n_3}\sum_{k\geqslant0}\varepsilon^kX_{*k}+\varepsilon^{n_7}\sum_{k\geqslant0}\varepsilon^kX_{**k} \tag{3.1}$$

где n_3 — порядок старшей производной в третьем граничном условии при $x=0$ (см. (2.1)), т. е. $n_3=n(3)$ $(x=0)$; аналогично $n_7=n(7)$ $(x=1)$.

На каждом шаге итерационного процесса отыскивается основная (гладкая) часть решения X_{0k} и краевые эффекты X_{*k}, X_{**k}.

Остаточный член Z разложения оценим, как обычно [6, 9]. В разложении (3.1) найдем все приближения до определенного порядка ε^N. Обозначим частичную сумму в разложении (3.1) через $X_{\varepsilon N}$, тогда $Z=\max|X-X_{\varepsilon N}|\leqslant c\varepsilon^{N+1}$, $c=\text{const}$.

Сходимость основной части решения X_{00} к решению задачи (1.4) — неравномерная [1].

Случай 3. Асимптотическое разложение решения задачи (1.4) имеет вид

$$X_\varepsilon=X_0+\varepsilon^{\mu_1}\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k X_{*k}+\varepsilon^{\mu_5}\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k X_{**k},\quad X_0=\frac{p_m}{a_0},\quad \mu_1=\mu(1),\quad \mu_5=\mu(5) \tag{3.2}$$

Отметим, что при возмущающих членах в краевых условиях и исходном уравнении стоят малые параметры в целочисленных степенях. Разложение (3.2) очень напоминает разложение (3.1). Именно этот случай исследовался в [12, 13]. Оценка остаточного члена Z в этом случае очевидна [6, 9]: $Z=\max|X-X_{\varepsilon N}|\leqslant c\varepsilon^{N+1}$, $c=\text{const}$, где $X_{\varepsilon N}$ — частичная сумма в разложении (3.2).

Случай 4. Асимптотическое разложение решения задачи (1.4) имеет вид

$$\begin{gathered}X_\varepsilon=X_0+\delta^{\mu_1}\sum_{k_0\geqslant 0}\delta^{k_*}X_{*k}+\delta^{\mu_5}\sum_{k_0\geqslant 0}\delta^{k_*}X_{**k},\\ X_0=\frac{p_m}{a_0},\quad k_*=k_1+k_2\frac{\gamma-1}{\gamma}+\sum_{im}k_{im}\nu_{im}\\ k_0=k_1+k_2+\sum_{im}k_{im}\geqslant 0,\qquad k=k_1k_2\prod_{im}k_{im},\qquad \delta=\varepsilon^\gamma,\qquad \gamma>1\end{gathered} \tag{3.3}$$

где k_1, k_2, k_{im} — целочисленные неотрицательные параметры, для k использована условная запись; $\mu_1=\mu(1)$, $\mu_5=\mu(5)$ — характеристические параметры (см. (2.1)); ν_{im} — степени малых параметров δ при возмущающих членах в краевых условиях

$$\frac{d^nX_*(\text{o})}{dt^n}+\delta^{n-q-\mu_1}\sum_{i=0}^{n^*-1}b_{ij}{}^*\delta^{-i}\frac{d^iX_*(\text{o})}{dt^i}=\delta^{n-q-\mu_1}\varphi_j^\circ\qquad (j=1,2,3,4) \tag{3.4}$$

Здесь в φ_j° учитываются члены, связанные с X_0. В соотношениях (3.4) проведено растяжение масштаба $x=\varepsilon^\gamma t$ [1]. Аналогичное соотношение справедливо и для краевых условий при $x=1$ ($j=5, 6, 7, 8$). Первые два члена последовательности k_* в разложении (3.3) соответствуют возмущающим членам уравнения (1.4); последний член этой последовательности соответствует возмущающим членам краевых условий (3.4).

Приведем краевые условия при $x=0$ для нулевого члена X_{*0} в разложении (3.3)

$$\frac{d^{n_1}X_{*0}(\text{o})}{dt^{n_1}}=\varphi_1^\circ,\qquad \frac{d^nX_{*0}(\text{o})}{dt^n}=0\qquad (j=2,3,4)$$

$$n_1=n(1),\qquad n(1)-q(1)-\mu(1)=0;\qquad n-q-\mu(1)>0$$

Эти условия получены из (3.4). Следующие приближения строятся обычным образом (см. ниже). Разложение (3.3) очень напоминает разложение [9]. Различие двух сравниваемых разложений связано с наличием третьего члена в последовательности k_* (3.3).

Упорядочим последовательность k_* из (3.3) (при переходе от предыдущего члена к последующему члену значение его обязательно увеличивается). Введем новое обозначение для полученной последовательности $K(N)$, причем $K(N+1)>K(N)$, N пробегает целочисленные неотрицательные значения. Пусть выполнено N приближений, тогда оценка для остаточного члена Z будет иметь вид

$$Z=\max|X-X_{\varepsilon N}|\leqslant c\delta^{K(N+1)}, \quad c=\mathrm{const} \tag{3.5}$$

Здесь $X_{\varepsilon N}$ – частичная сумма в разложении (3.3), а функция $K(N+1)$ была определена выше для целочисленных значений N. Оценка (3.5) напоминает оценки для остаточных членов в первом и третьем случаях, если принять во внимание, что в тех случаях $K(N)\equiv N$.

Случай 2. Асимптотическое разложение решения задачи (1.4) имеет вид

$$X_\varepsilon=X_0+\varepsilon^{\gamma\mu_{21}}\sum_{k_0\geqslant 0}\varepsilon^{k_*}X_{*k}^{(2)}+\varepsilon^{\mu_{13}}\sum_{k_0\geqslant 0}\varepsilon^{k_*}X_{*k}^{(2)}+\varepsilon^{\gamma\mu_{25}}\sum_{k_0\geqslant 0}\varepsilon^{k_*}X_{**k}^{(1)}+\varepsilon^{\mu_{17}}\sum_{k_0\geqslant 0}\varepsilon^{k_*}X_{**k}^{(1)};$$

$$X_0=\frac{p_m}{a_0}\quad k_*=k_1+k_2\gamma+\sum_{im}k_{im}\nu_{im},\quad k_0=k_1+k_2+\sum_{im}k_{im}\geqslant 0,\quad k=k_1k_2\prod_{im}k_{im} \tag{3.6}$$

где k_1, k_2, k_{im} – целочисленные неотрицательные параметры; для k использована условная запись; остальные обозначения (кроме ν_{im}) совпадают с обозначениями из (2.2), (2.3); ν_{im} – степени малых параметров ε при возмущающих членах в краевых условиях

$$\frac{d^nX_*^{(2)}(0)}{dt_2^{\,n}}+\varepsilon^{\gamma(n-q-\mu_{21})}\sum_{i=0}^{n^\circ-1}b_{ij}^{**}\varepsilon^{-\gamma i}\frac{d^iX_*^{(2)}(0)}{dt_2^{\,i}}=$$

$$=\varepsilon^{\gamma(n-q-\mu_{21})}\left\{\varphi_j^{**}-L_j^{**}X_0-\varepsilon^{\mu_{13}}\left[\frac{\varepsilon^{\gamma q}}{\varepsilon^n}\frac{d^nX_*^{(1)}(0)}{dt_1^{\,n}}+\sum_{i=0}^{n^0-1}b_{ij}^{**}\varepsilon^{-i}\frac{d^iX_*^{(1)}(0)}{dt_1^{\,i}}\right]\right\}\quad (j=1,2) \tag{3.7}$$

$$\frac{d^nX_*^{(1)}(0)}{dt_1^{\,n}}+\varepsilon^{n-q-\mu_{13}}\sum_{i=0}^{n^*-1}b_{ij}^{*}\varepsilon^{-i}\frac{d^iX_*^{(1)}(0)}{dt_1^{\,i}}=$$

$$=\varepsilon^{n-q-\mu_{13}}\left\{\varphi_j^{*}-L_j^{*}X_0-\varepsilon^{\gamma\mu_{21}}\left[\frac{\varepsilon^{q}}{\varepsilon^{\gamma n}}\frac{d^nX_*^{(2)}(0)}{dt_2^{\,n}}+\sum_{i=0}^{n^*-1}b_{ij}^{*}\varepsilon^{-\gamma i}\frac{d^iX_*^{(2)}(0)}{dt_2^{\,i}}\right]\right\}\quad (j=3,4)$$

$$t_1=x/\varepsilon,\qquad t_2=x/\varepsilon^\gamma$$

Аналогичные соотношения справедливы и для краевых условий при $x=1$. Первые два числа последовательности k_* в разложении (3.6) соответствуют возмущающим членам уравнения (1.4); последний член этой последовательности соответствует возмущающим членам краевых условий (3.7). Упорядочим последовательность из (3.6) точно так, как и в четвертом случае. В новой последовательности $K(N+1)>K(N)$, когда N пробегает целочисленные неотрицательные значения.

Приведем краевые условия при $x=0$ для нулевых членов $X_{*0}^{(1)}$, $X_{*0}^{(2)}$ в разложении (3.6)

$$\frac{d^{n_1}X_{*0}^{(2)}}{dt_2^{n_1}}=\varphi_1^\circ, \quad \frac{d^{n_2}X_{*0}^{(2)}}{dt_2^{n_2}}=0, \quad \frac{d^{n_3}X_{*0}^{(1)}}{dt_1^{n_3}}=\varphi_3^\circ, \quad \frac{d^{n_4}X_{*0}}{dt_1^{n_4}}=0$$

$$n_i=n(i), \quad n(1)-q(1)-\mu_{21}=0, \quad n(2)-q(2)-\mu_{21}>0$$
$$n(3)-q(3)-\mu_{13}=0, \quad n(4)-q(4)-\mu_{13}>0 \qquad (3.8)$$

Здесь в φ_1° учитывается X_0 а в φ_3° учитывается X_0 и $X_{*0}^{(2)}$. Первые два условия из (3.8) позволяют отыскать медленно затухающий краевой эффект $X_{*0}^{(2)}$ а вторые два условия в (3.8) — быстро затухающий краевой эффект $X_{*0}^{(1)}$. Следующие приближения строятся, как обычно. Разложение (3.6) напоминает разложение (52) из [9].

Пусть выполнено N приближений, тогда оценка для остаточного члена Z будет иметь вид: $Z=\max|X-X_{\varepsilon N}|\leqslant c\varepsilon^{K(N+1)}$, $c=\text{const}$, где $X_{\varepsilon N}$ — частичная сумма в разложении (3.6).

Частичные суммы $X_{\varepsilon N}$ и $X_{\varepsilon N+1}$ во втором и четвертом случаях могут весьма существенно различаться при $K(N+1)\approx K(N)$, $K(N+1)>K(N)$; случай — наиболее типичный и опасный, так как оценки (3.5) и (3.9) справедливы и при $N=0$. Поэтому при мало отличающихся характеристических параметрах желательно пользоваться более общим подходом (см. п. 4).

В первом и третьем случаях функции $K(N+1)=N+1$, поэтому частичные суммы $X_{\varepsilon N}$ и $X_{\varepsilon N+1}$ мало отличаются при малых $\varepsilon>0$.

4. Выше отмечалось, что исходные краевые условия не всегда могут быть записаны в каноническом виде. Следовательно, для вырожденного уравнения во втором случае нельзя сформулировать соответствующие краевые условия, когда используются модификации классических подходов [12, 13]. В случае, когда исходные краевые условия не могут быть записаны в каноническом виде, существует подход, позволяющий формулировать вырожденную задачу. Однако в отличие от классических методов расчленения решения исходной задачи в этом случае потребуется значительно большая информация о структуре решения исходного уравнения (1.4) [17].

Заметим, что при классических подходах используется информация о порядке корней характеристического уравнения (условия регулярности вырождения выполнены). На первом этапе используется та же информация. Поскольку корни характеристического уравнения во втором случае распадаются на две группы, воспользуемся срезывающим преобразованием [16] (теоремой о расщеплении). Тогда уравнение (1.4) сводится к системе, которая имеет блочно-диагональный вид. Каждому из блоков соответствует своя группа корней [16]. Далее рассматривается простейший случай, когда каждая из подсистем допускает сведение к одному уравнению.

Итак, исходное уравнение (1.4) сведено к системе двух уравнений, а решение исходного уравнения можно представить в виде

$$X=f_1(x)(W_2+W_4)+f_2(x)(W_1+W_3), \quad f_1(x)=O(1), \quad f_2(x)=O(1) \qquad (4.1)$$

Здесь $f_1(x)$, $f_2(x)$ — голоморфные функции, причем для оболочек с почти постоянными радиусами кривизн эти функции равны единице

($f_1=f_2=1$); остальные обозначения совпадают с обозначениями из (1.5).

Функции W_2+W_4 и W_1+W_3 являются решениями уравнений четвертого порядка

$$A(W_2+W_4)=0,\quad A_1(W_1+W_3)=0\quad (0\leqslant x\leqslant 1)\tag{4.2}$$

Причем эти решения имеют характер краевого эффекта (погранслоя); обозначения в (4.1), (4.2) совпадают с обозначениями из (1.5); W_1, W_3 — быстро затухающие краевые эффекты, W_2, W_4 — медленно затухающие краевые эффекты; в исходном уравнении (1.4) все $p_m\equiv 0$, следовательно, $X_0\equiv 0$.

Операторы A и A_1 в уравнениях (4.2) получены после применения срезывающего преобразования (эти операторы в общем случае содержат возмущающие члены.)

После подстановки в исходные краевые условия (1.4) решения (4.1) получим

$$L_{j0}(W_2+W_4)+L_{j1}(W_1+W_3)=\varphi_{mj}\ {\scriptstyle (j=1,\dots,4)},\quad x=0\ {\scriptstyle (j=5,\dots,8)}\quad x=1\tag{4.3}$$

Таким образом, исходная задача сводится к задаче (4.2), (4.3) для системы двух уравнений, последнее из которых имеет очень простую аналитическую структуру. Основные члены фундаментальной системы решений второго уравнения в (4.2) имеют вид [14–16]

$$W_{10}=C_3\exp(-b_{30}x)+C_4\exp(-b_{40}x),$$
$$W_{30}=C_7\exp[b_{31}(x-1)]+C_8\exp[b_{41}(x-1)]\tag{4.4}$$

где C_3, C_4, C_7, C_8 — произвольные постоянные; b_3, b_4 — корни характеристического уравнения, порождающие быстро затухающие краевые эффекты, причем нуль или единица соответствуют левому или правому краю оболочки ($b_3\neq b_4$ при $0\leqslant x\leqslant 1$).

Когда большие корни характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными, краевые эффекты записываются в несколько ином виде, напоминающем обычный краевой эффект.

Чтобы получить краевые условия для первого уравнения в (4.2), выражения (4.4) подставим в (4.3). При этом будем учитывать, что при $\varepsilon\to 0$ краевые эффекты не взаимодействуют. В результате имеем

$$L_j^*(W_2+W_4)=\varphi_{mj}^*\quad {\scriptstyle (j=1,\,2,\,5,\,6)}\tag{4.5}$$

Число краевых условий в (4.5) совпадает с порядком соответствующего уравнения в (4.2). Введем растяжение масштаба $x=\varepsilon^\nu t$, в условиях (4.5) для краевых эффектов W_2, W_4, отбрасывая второстепенные слагаемые, получим

$$L_j^{*0}(W_{20}+W_{40})=\varphi_{mj}^{*0}\quad {\scriptstyle (j=1,\,2,\,5,\,6)}\tag{4.6}$$

Опустим в операторе A слагаемые с малыми множителями

$$A_0(W_{20}+W_{40})=0\qquad (0\leqslant x\leqslant 1)\tag{4.7}$$

где оператор A_0 имеет тот же порядок, что и оператор A в (4.2).

Пусть вырожденная (укороченная) задача (4.6), (4.7) имеет решение и притом единственное $W_{20}+W_{40}$. Путь построения итерационного процесса для получения решения W_2+W_4 задачи (4.2), (4.5) традиционен (эта задача отличается от задачи (4.6), (4.7) наличием возмущающих членов в краевых условиях и в уравнении; возмущающие члены в уравнении не повышают порядок оператора A_0).

Однако с практической точки зрения желательно иметь точное решение задачи (4.2), (4.5) для W_2+W_4, поскольку асимптотический ряд может оказаться плохо сходящимся (см. оценку (3.9) для остаточного члена Z).

Единственность решения вырожденных (укороченных) задач (3.4) или (5.6), (5.7) требует особой проверки. В противном случае возможны ошибочные формулировки вырожденных задач [13, 19]. Именно по этой причине здесь не рассматриваются оболочки отрицательной гауссовой кривизны.

После решения задач (4.2), (4.5) или (4.6), (4.7) для W_2+W_4 очевиден способ вычисления постоянных C_3, C_4, C_7, C_8 из (4.4); если известно решение W_2+W_4, то они определяются из каких-либо четырех соотношений (4.3).

Существенное отличие предлагаемой методики получения краевых условий вырожденной задачи от классических подходов состоит в том, что для части решения исходной задачи (а именно для быстро затухающих краевых эффектов) строится фундаментальная система решений; затем, используя эту систему решений, получаются краевые условия вырожденной задачи (предварительно исходное уравнение расщепляется). На вид исходных краевых условий каких-либо ограничений не налагается.

Предлагаемую методику приходится использовать при изучении верхней части спектра собственных колебаний оболочек, так как для верхней части спектра основная часть решения быстро меняется по нормали к торцу оболочки вращения. Кроме преимуществ она имеет и недостатки. При ее применении приходится сталкиваться с громоздкими преобразованиями. Эти преобразования связаны с получением соотношений (4.1) – (4.5).

Поступила 28 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Freidrichs K. O.* Asymptotic phenomena in mathematical physics. Bull. Amer. Math. Soc., 1955, vol. 61, No. 6, p. 485–504.
2. *Болотин В. В.* Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
3. *Моисеев Н. Н.* О краевых задачах для ламинаризованных уравнений Навье – Стокса в случае, когда вязкость мала. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 3.
4. *Алумяэ Н. А.* Теория упругих оболочек и пластинок. В кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3. М., «Наука», 1972.
5. *Wasow W.* On the asymptotic solution of boundary value problems for ordinary differential equations containing a parameter. J. Math. and Phys., 1944, vol. 23, No. 3.
6. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I. Успехи матем. наук, 1960, т. 15, вып. 3.
7. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями, зависящими от параметра. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
8. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с исчезающей малой главной частью и осциллирующими граничными условиями. Тр. Всес. совещания по дифференциальным уравнениям. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1960.
9. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями. Успехи матем. наук, 1960, т. 15, вып. 4.
10. *Steele C. R.* Shells of revolution with edge loads of rapid circumferential variation. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 4. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1962, т. 29, № 4.)
11. *Петрова-Денева А.* Расчет оболочек вращения положительной кривизны на циклические нагрузки. Инж. ж., 1965, т. 5, № 5.
12. *O'Malley R. E., Keller J. B. Jr.*, Loss of boundary conditions in the asymptotic solution of linear ordinary differential equations, II Boundary value problems. Communs Pure and Appl. Math., 1968, vol. 21, No. 3.
13. *Корнев В. М.* К формулировке граничных условий упрощенных уравнений оболочек вращения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
14. *Noaillon P.* Dévéloppements asymptotiques dans les équations différentielles linéaires à parameter variable. Mém. Soc. roy. sci. Liège. Ser. III, 1912, vol. 9, № 15.
15. *Разумейко В. Г.* О фундаментальной системе решений обыкновенного линейного дифференциального уравнения с малым параметром. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 8.
16. *Вазов В.* Асимптотические разложение решений обыкновенных дифференциальных уравнений, М., «Мир», 1968.
17. *Вахромеев Ю. М., Корнев В. М.* Динамический краевой эффект в стержнях. Формулировка укороченных задач. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.
18. *Корнев В. М.* О структурных формулах при расчете цилиндрических оболочек на колебания и устойчивость. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 4.
19. *Корнев В. М.* Исправления к статье В. М. Корнева «К формулировке граничных условий упрощенных уравнений оболочек вращения». ПММ, 1970, т. 34, вып. 1; ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.