МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1976

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ ЭЛАСТИКИ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Л. А. ШАПОВАЛОВ

(Москва)

Расширение возможностей численного решения нелинейных задач с помощью ЭВМ стимулирует интерес к уточнению уравнений теории тонких оболочек при больших перемещениях. Этому вопросу посвящено значительное число исследований, отраженных в книгах и статьях обзорного характера [1–7]. Однако получение самых общих уравнений без каких-либо ограничений приводит к неоправданному их усложнению.

Характерной особенностью деформаций гибких упругих оболочек является относительная малость удлинений и сдвигов срединной поверхности при значительных углах поворота нормали.

В работе [8] предложены общие уравнения геометрически нелинейной теории тонких оболочек в квадратичном приближении и в предположении, что тангенциальные деформации срединной поверхности имеют порядок квадратов угла поворота нормали, а углы поворота малы по сравнению с единицей.

Представляет интерес получение таких уравнений, когда предположения о малости деформаций срединной поверхности остаются в силе, а ограничения на величины углов поворота нормали снимаются. Эти «неквадратичные» уравнения можно называть уравнениями эластики тонкой оболочки. Их получению и посвящена данная работа.

Уравнения эластики оболочки достаточно полно описывают закритическое состояние оболочек и поведение тонкостенных систем в нелинейных задачах устойчивости.

При осесимметричной деформации предлагаемые уравнения совпадают с известными уравнениями Э. Рейсснера для оболочек вращения [9]. В квадратичном приближении они согласуются с простейшим вариантом геометрически нелинейной теории оболочек [8].

Изложению приближенной неквадратичной теории оболочек предшествует исследование точных геометрических соотношений для деформированной срединной поверхности. Анализируется связь между различными формулировками гипотезы прямых нормалей в нелинейной теории оболочек.

1. Пусть α_1, α_2, z — правая система координат на срединной поверхности оболочки, отнесенной к линиям кривизны и заданной векторной функцией $\mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2)$; R_1, R_2, A_1, A_2 — главные радиусы кривизны и параметры Ламе поверхности.

Геометрические характеристики, относящиеся к деформированному состоянию оболочки, условимся отмечать звездочкой. Единичные векторы деформированной срединной поверхности представим в форме

$$\mathbf{e}_1{}^* = \frac{1}{A_1{}^*}\frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \alpha_1} = \cos\Phi_{11}\mathbf{e}_1 + \cos\Phi_{12}\mathbf{e}_2 + \cos\Phi_{13}\mathbf{n}$$

$$\mathbf{n}^* = (\mathbf{e}_1{}^* \times \mathbf{e}_2{}^*) / |\mathbf{e}_1{}^* \times \mathbf{e}_2{}^*| = (1/\sin\chi_{12})(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{n})$$

$$\cos\Phi_{11} = A_1(1+\varepsilon_1)/A_1{}^*, \qquad \cos\Phi_{12} = A_1\omega_1/A_1{}^*, \qquad \cos\Phi_{13} = -A_1\theta_1/A_1{}^*$$

$$a_1 = \cos\Phi_{12}\cos\Phi_{23} - \cos\Phi_{22}\cos\Phi_{13}, \qquad a_2 = \cos\Phi_{21}\cos\Phi_{13} - \cos\Phi_{11}\cos\Phi_{23}$$

$$a_3 = \cos\Phi_{11}\cos\Phi_{22} - \cos\Phi_{12}\cos\Phi_{21}, \quad A_1^* = A_1[(1+\varepsilon_1)^2 + \omega_1^2 + \theta_1^2]^{1/2}$$
$$\cos\chi_{12} = \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2^*, \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{n} \quad (1 \rightleftarrows 2) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}$ — единичные векторы, направленные по касательным к линиям α_1, α_2 и по внешней нормали к начальной поверхности; $\mathbf{U}$ — вектор смещения; χ_{12} — угол между направлениями единичных векторов $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$; Φ_{ik} ($i=1, 2$; $k=1, 2, 3$) — углы между направлениями ортов исходной и деформированной поверхности; ε_i, ω_i, θ_i — общепринятые обозначения тангенциальных деформаций и поворотов в линейном приближении [10].

Коэффициенты первой и второй квадратичных форм деформированной срединной поверхности имеют вид [11]:

$$g_{11}^* = \left(\frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \alpha_1}\right)^2 = A_1^{*2}, \quad g_{12}^* = \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \alpha_2} = A_1^* A_2^* \cos\chi_{12} \tag{1.2}$$

$$b_{11}^* = -\frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}^*}{\partial \alpha_1} = A_1^* \mathbf{n}^* \frac{\partial \mathbf{e}_1^*}{\partial \alpha_1}, \quad b_{12}^* = -\frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}^*}{\partial \alpha_2} = A_1^* \mathbf{n}^* \frac{\partial \mathbf{e}_1^*}{\partial \alpha_2} \quad (1 \rightleftarrows 2)$$

Пользуясь выражениями (1.1), (1.2), получим

$$b_{11}^* = -\frac{A_1^*}{\sin\chi_{12}}\left[(a_2\cos\Phi_{11} - a_1\cos\Phi_{12})\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + (a_3\cos\Phi_{11} - a_1\cos\Phi_{13})\frac{A_1}{R_1} + f_{11}\right]$$

$$b_{12}^* = -\frac{A_1^*}{\sin\chi_{12}}\left[(a_1\cos\Phi_{12} - a_2\cos\Phi_{11})\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + (a_3\cos\Phi_{12} - a_2\cos\Phi_{13})\frac{A_2}{R_2} + f_{12}\right]$$

$$f_{11} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial \cos\Phi_{11}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \cos\Phi_{12}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \cos\Phi_{13}}{\partial \alpha_1} \\ \cos\Phi_{11} & \cos\Phi_{12} & \cos\Phi_{13} \\ \cos\Phi_{21} & \cos\Phi_{22} & \cos\Phi_{23} \end{vmatrix}, \quad f_{12} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial \cos\Phi_{11}}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \cos\Phi_{12}}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \cos\Phi_{13}}{\partial \alpha_2} \\ \cos\Phi_{11} & \cos\Phi_{12} & \cos\Phi_{13} \\ \cos\Phi_{21} & \cos\Phi_{22} & \cos\Phi_{23} \end{vmatrix} \quad (1 \rightleftarrows 2) \tag{1.3}$$

Формулы (1.2) и (1.3) для коэффициентов двух основных квадратичных форм полностью определяют геометрические свойства деформированной поверхности оболочки.

Тем не менее, при рассмотрении приближенных нелинейных теорий выражения для коэффициентов второй квадратичной формы в виде (1.3) оказываются недостаточно удобными для вычислений и не допускают непосредственных упрощений, связанных с различным порядком малости удлинений, сдвигов и поворотов.

Для получения возможности подобных упрощений выделим в формулах (1.3) члены, порядок которых определяется деформациями сдвига. С этой целью, пользуясь определением единичных векторов (1.1), путем тождественных преобразований отдельных слагаемых в равенствах (1.3), найдем

$$f_{11} = (c_{11} - d_{11}\cos\chi_{12}) / \cos\Phi_{11}, \quad f_{12} = (c_{12} - d_{12}\cos\chi_{12}) / \cos\Phi_{11}$$

$$c_{11} = \cos\Phi_{23}\frac{\partial \cos\Phi_{12}}{\partial \alpha_1} - \cos\Phi_{22}\frac{\partial \cos\Phi_{13}}{\partial \alpha_1}$$

$$d_{11} = \cos\Phi_{13}\frac{\partial \cos\Phi_{12}}{\partial \alpha_1} - \cos\Phi_{12}\frac{\partial \cos\Phi_{13}}{\partial \alpha_1}$$

$$c_{12}=\cos\Phi_{23}\frac{\partial\cos\Phi_{12}}{\partial\alpha_2}-\cos\Phi_{22}\frac{\partial\cos\Phi_{13}}{\partial\alpha_2}$$

$$d_{12}=\cos\Phi_{13}\frac{\partial\cos\Phi_{12}}{\partial\alpha_2}-\cos\Phi_{12}\frac{\partial\cos\Phi_{13}}{\partial\alpha_2}$$

$$a_2\cos\Phi_{11}-a_1\cos\Phi_{12}=\cos\Phi_{13}\cos\chi_{12}-\cos\Phi_{23}$$

$$a_3\cos\Phi_{11}-a_1\cos\Phi_{13}=-\cos\Phi_{12}\cos\chi_{12}+\cos\Phi_{22}$$

$$a_3\cos\Phi_{12}-a_2\cos\Phi_{13}=\cos\Phi_{11}\cos\chi_{12}-\cos\Phi_{21} \tag{1.4}$$

Соотношения (1.4) позволяют выделить в формулах (1.3) слагаемые, содержащие в качестве множителей деформации сдвига, и придать окончательным результатам вид

$$b_{11}^*=\frac{A_1^*}{\sin\chi_{12}}\left\{\cos\Phi_{23}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{\cos\Phi_{11}}\frac{\partial\cos\Phi_{12}}{\partial\alpha_1}\right)-\right.$$
$$-\cos\Phi_{22}\left(\frac{A_1}{R_1}-\frac{1}{\cos\Phi_{11}}\frac{\partial\cos\Phi_{13}}{\partial\alpha_1}\right)+$$
$$+\cos\chi_{12}\left[\cos\Phi_{12}\left(\frac{A_1}{R_1}-\frac{1}{\cos\Phi_{11}}\frac{\partial\cos\Phi_{13}}{\partial\alpha_1}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\cos\Phi_{13}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{\cos\Phi_{11}}\frac{\partial\cos\Phi_{12}}{\partial\alpha_1}\right)\right]\right\}$$

$$b_{12}^*=\frac{A_1^*}{\sin\chi_{12}}\left\{-\cos\Phi_{23}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{\cos\Phi_{11}}\frac{\partial\cos\Phi_{12}}{\partial\alpha_2}\right)+\right.$$
$$+\frac{A_2}{R_2}\cos\Phi_{21}+\frac{\cos\Phi_{22}}{\cos\Phi_{11}}\frac{\partial\cos\Phi_{13}}{\partial\alpha_2}+\cos\chi_{12}\left[-\frac{A_2}{R_2}\cos\Phi_{11}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\cos\Phi_{12}}{\cos\Phi_{11}}\frac{\partial\cos\Phi_{13}}{\partial\alpha_2}+\cos\Phi_{13}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{\cos\Phi_{11}}\frac{\partial\cos\Phi_{12}}{\partial\alpha_2}\right)\right]\right\}. \quad (1\rightleftarrows 2) \tag{1.5}$$

Формулы (1.5) являются точными. Они существенно упрощаются для тех случаев, когда при вычислении коэффициентов второй квадратичной формы допустимо считать деформации сдвига малыми и вместо функций $\sin\chi_{12}$ и $\cos\chi_{12}$ рассматривать их приближенные значения.

Удлинения и угол сдвига E_i, Γ_{ik} $(i, k=1, 2)$, компоненты тангенциальной деформации e_{ik}, геометрические кривизны $1/R_i^*$ и кручение $1/R_{ik}^*$ деформированной срединной поверхности выражаются через коэффициенты основных квадратичных форм [12]:

$$\mathrm{E}_1=(g_{11}^*/g_{11})^{1/2}-1=(1+2e_{11})^{1/2}-1=(A_1^*-A_1)A^{-1}$$
$$\Gamma_{12}=\pi/2-\chi_{12},\quad \cos\chi_{12}=g_{12}(g_{11}g_{22})^{-1/2}=e_{12}[(1+\mathrm{E}_1)(1+\mathrm{E}_2)]^{-1}$$
$$1/R_1^*=-b_{11}^*(A_1^*)^{-2};\quad 1/R_{12}^*=-b_{12}^*(A_1^*A_2^*)^{-1}\quad (1\rightleftarrows 2) \tag{1.6}$$

2. Следуя [13], введем в рассмотрение вспомогательную ортогональную координатную систему α_ν, α_t, z на срединной поверхности F, связанную с граничным контуром оболочки Γ.

Будем считать, что граничный контур является одной из линий семейства $\alpha_\nu=\mathrm{const}$. Касательные к линиям α_ν и α_1 образуют угол γ.

Орты основной и вспомогательной координатных систем связаны формулами

$$\mathbf{e}_\nu=\mathbf{e}_1\cos\gamma+\mathbf{e}_2\sin\gamma,\quad \mathbf{e}_t=-\mathbf{e}_1\sin\gamma+\mathbf{e}_2\cos\gamma,\quad \mathbf{n}=(\mathbf{e}_\nu\times\mathbf{e}_t)/|\mathbf{e}_\nu\times\mathbf{e}_t| \tag{2.1}$$

На деформированной поверхности оболочки в координатах α_ν, α_t имеем

$$\mathbf{e}_\nu{}^* = (A_\nu / A_\nu{}^*)\,\partial\mathbf{R}^* / \partial s_\nu = \cos\Phi_{\nu\nu}\mathbf{e}_\nu + \cos\Phi_{\nu t}\mathbf{e}_t + \cos\Phi_{\nu n}\mathbf{n}$$

$$\mathbf{n}^* = (\mathbf{e}_\nu{}^* \times \mathbf{e}_t{}^*) / |\mathbf{e}_\nu{}^* \times \mathbf{e}_t{}^*| = (1 / \sin\chi_{\nu t})\,(a_\nu\mathbf{e}_\nu + a_t\mathbf{e}_t + a_n\mathbf{n})$$

$$\cos\Phi_{\nu\nu} = A_\nu(1+\varepsilon_\nu) / A_\nu{}^*, \qquad \cos\Phi_{\nu t} = A_\nu\omega_\nu / A_\nu{}^*, \qquad \cos\Phi_{\nu n} = -A_\nu\theta_\nu / A_\nu{}^*$$

$$a_\nu = \cos\Phi_{\nu t}\cos\Phi_{tn} - \cos\Phi_{tt}\cos\Phi_{\nu n}, \qquad a_t = \cos\Phi_{t\nu}\cos\Phi_{\nu n} - \cos\Phi_{\nu\nu}\cos\Phi_{tn}$$

$$a_n = \cos\Phi_{\nu\nu}\cos\Phi_{tt} - \cos\Phi_{t\nu}\cos\Phi_{\nu t}, \qquad A_\nu{}^* = A_\nu[(1+\varepsilon_\nu)^2 + \omega_\nu{}^2 + \theta_\nu{}^2]^{1/2}$$

$$\cos\chi_{\nu t} = \mathbf{e}_\nu{}^* \cdot \mathbf{e}_t{}^*, \qquad \mathbf{U} = u_\nu\mathbf{e}_\nu + u_t\mathbf{e}_t + w\mathbf{n}$$

$$u_\nu = u\cos\gamma + v\sin\gamma, \qquad u_t = -u\sin\gamma + v\cos\gamma \quad (\nu \rightleftarrows t) \tag{2.2}$$

где s_ν, s_t — длины дуг координатных линий α_ν, α_t.

При вычислении ортов $\mathbf{e}_\nu{}^*$, $\mathbf{e}_t{}^*$ использовались формулы дифференцирования единичных векторов e_ν, e_t в ортогональной несопряженной системе координат [13]. Деформации и повороты ε_ν, $\omega_\nu, \ldots, \theta_t$ имеют вид

$$\varepsilon_\nu = \frac{\partial u_\nu}{\partial s_\nu} + \varkappa_\nu u_t + \frac{w}{R_\nu}, \qquad \omega_\nu = \frac{\partial u_t}{\partial s_\nu} - \varkappa_\nu u_\nu - \frac{w}{R_{\nu t}}, \qquad \theta_\nu = -\frac{\partial w}{\partial s_\nu} + \frac{u_\nu}{R_\nu} + \frac{u_t}{R_{\nu t}}$$

$$\varkappa_\nu = -\frac{\partial\gamma}{\partial s_\nu} - \frac{\sin\gamma}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + \frac{\cos\gamma}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}, \qquad \varkappa_t = \frac{\partial\gamma}{\partial s_t} + \frac{\cos\gamma}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + \frac{\sin\gamma}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}$$

$$1/R_\nu = \cos^2\gamma / R_1 + \sin^2\gamma / R_2, \qquad 1/R_{\nu t} = (1/R_1 - 1/R_2)\sin\gamma\cos\gamma$$

$$\frac{\partial}{\partial s_\nu} = \frac{\cos\gamma}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\sin\gamma}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}, \qquad \frac{\partial}{\partial s_t} = -\frac{\sin\gamma}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\cos\gamma}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2} \quad (\nu \rightleftarrows t) \tag{2.3}$$

Пользуясь определением единичных векторов $\mathbf{e}_\nu{}^*$, $\mathbf{e}_t{}^*$, $\mathbf{n}$ (2.2) и рассматривая повороты характерных волокон оболочки, совпадающих до деформации с направлениями ортов $\mathbf{e}_\nu$, $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{n}$, определим вектор упругого вращения [12]:

$$\boldsymbol{\Theta} = \Psi'_{\nu n}\mathbf{e}_\nu + \Psi'_{tn}\mathbf{e}_t + {}^1/_2(\Psi'_{n\nu} + \Psi'_{nt})\,\mathbf{n}$$

$$\operatorname{tg}\Psi'_{\nu n} = -a_t / a_n, \qquad \operatorname{tg}\Psi'_{tn} = a_\nu / a_n, \qquad \operatorname{tg}\Psi'_{n\nu} = \cos\Phi_{\nu t} / \cos\Phi_{\nu\nu}$$

$$\operatorname{tg}\Psi'_{nt} = -\cos\Phi_{t\nu} / \cos\Phi_{tt} \tag{2.4}$$

Здесь Ψ'_{rs} (r, $s = \nu$, t, n) — угол поворота относительно направления $\mathbf{e}_r$ волокна, первоначально параллельного орту $\mathbf{e}_s$.

Для получения вектора упругого вращения в линиях кривизны необходимо в выражениях (2.2) — (2.4) положить $\gamma = 0$. При этом

$$\boldsymbol{\Theta} = \Psi'_{13}\mathbf{e}_1 + \Psi'_{23}\mathbf{e}_2 + {}^1/_2(\Psi'_{31} + \Psi'_{32})\,\mathbf{n}$$

$$\operatorname{tg}\Psi'_{13} = -a_2 / a_3, \qquad \operatorname{tg}\Psi'_{23} = a_1 / a_3, \qquad \operatorname{tg}\Psi'_{31} = \cos\Phi_{12} / \cos\Phi_{11}$$

$$\operatorname{tg}\Psi'_{32} = -\cos\Phi_{21} / \cos\Phi_{22}$$

Тот же результат можно получить и из общих формул нелинейной теории упругости, если, рассматривая оболочку как трехмерное тело, вычислить углы поворота соответствующих волокон на срединной поверхности, положив $z = 0$ [14].

В силу зависимостей (2.1) компоненты вектора упругого вращения в основной и вспомогательной системах координат связаны формулами перехода

$$\Psi'_{\nu n} = \Psi'_{13}\cos\gamma + \Psi'_{23}\sin\gamma, \qquad \Psi'_{tn} = -\Psi'_{13}\sin\gamma + \Psi'_{23}\cos\gamma$$

$$\Psi'_{\nu n} + \Psi'_{tn} = \Psi'_{31} + \Psi'_{32} \tag{2.5}$$

Соотношения п. 1, 2 определяют основные геометрические свойства деформированной срединной поверхности оболочки.

3. При изучении деформированного состояния реальной тонкой оболочки конечной толщины в рамках двумерной модели будем пользоваться кинематической гипотезой Кирхгофа — Лява. Проанализируем две различные формулировки этой гипотезы, не ограничиваясь предположениями о малости удлинений и сдвигов.

Первоначально сформулируем гипотезу Кирхгофа — Лява в форме векторных равенств [15]

$$\mathbf{R}_z=\mathbf{R}+z\mathbf{n},\qquad \mathbf{R}_z^*=\mathbf{R}^*+z\mathbf{n}^* \tag{3.1}$$

где z — расстояние рассматриваемой точки от срединной поверхности.

Равенства (3.1) равносильны утверждению, что фиксированный отрезок внешней нормали в результате деформации не изменяет своей длины, а лишь поворачивается как твердое тело, оставаясь нормальным к деформированной поверхности.

Согласно определению (3.1), для квадрата длины линейного элемента поверхности z=const, ограничиваясь линейным приближением относительно координаты z, найдем

$$(d\mathbf{R}_z^*)^2-(d\mathbf{R}_z)^2=2\varepsilon_{11}H_1^2d\alpha_1^2+2\varepsilon_{12}H_1H_2d\alpha_1d\alpha_2+2\varepsilon_{22}H_2^2d\alpha_2^2$$

$$\varepsilon_{11}=e_{11}+zk_{11},\qquad \varepsilon_{12}=e_{12}+2zk_{12},\qquad H_1=A_1(1+z/R_1)$$

$$e_{11}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{A_1^*}{A_1}\right)^2-1\right],\quad e_{12}=\frac{A_1^*A_2^*}{A_1A_2}\cos\chi_{12},\quad k_{11}=\left(\frac{A_1^*}{A_1}\right)^2\left(\frac{1}{R_1^*}-\frac{1}{R_1}\right)$$

$$k_{12}=A_1^*A_2^*A_1^{-1}A_2^{-1}[1/R_{12}^*-{}^1/_2(1/R_1+1/R_2)\cos\chi_{12}]\quad (1\rightleftarrows 2) \tag{3.2}$$

Здесь ε_{ik} (i, k=1, 2) — деформации волокон, отстоящих на расстоянии z от срединной поверхности; e_{ik}, k_{ik} — тангенциальные деформации и изменения кривизн и кручения.

Из формул (3.2) следует, что параметры k_{11}, k_{22}, k_{12} совпадают с изменениями геометрических кривизн и кручения срединной поверхности $1/R_1^*-1/R_1$, $1/R_2^*-1/R_2$, $1/R_{12}^*-1/R_{12}$ лишь при малых удлинениях и сдвигах, когда можно приближенно считать $A_1^*\approx A_1$, $A_2^*\approx A_2$, $\cos\chi_{12}\approx 0$.

Следуя [14], рассмотрим вторую формулировку гипотезы Кирхгофа — Лява, положив для компонентов нелинейного тензора деформации

$$\varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=\varepsilon_{33}=0 \tag{3.3}$$

Исходя из общих геометрических соотношений нелинейной теории упругости, будем разыскивать решение системы (3.3) в форме: $u_z=u+z\theta$, $v_z=v+z\psi$, $w_z=w+z\chi$, где u_z, v_z, w_z — компоненты вектора смещения на поверхности z=const; θ, ψ, χ — неизвестные функции координат α_1, α_2.

Система уравнений (3.3) имеет решение

$$\theta=a_1(\sin\chi_{12})^{-1},\qquad \psi=a_2(\sin\chi_{12})^{-1},\qquad 1+\chi=a_3(\sin\chi_{12})^{-1} \tag{3.4}$$

В результате подстановки (3.4) в формулы для тангенциальных компонентов деформации трехмерного тела и последующего приведения полученных выражений к виду, содержащему направляющие косинусы $\cos\Phi_{ik}$, пользуясь формулами п. 1, найдем

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_1+\frac{1}{2}(\varepsilon_1^2+\omega_1^2+\theta_1^2)-z\left(\frac{A_1^*}{A_1}\right)^2\left(\frac{b_{11}^*}{A_1^{*2}}+\frac{1}{R_1}\right)=e_{11}+zk_{11} \tag{3.5}$$

$$\varepsilon_{12}=\omega_1(1+\varepsilon_2)+\omega_2(1+\varepsilon_1)+\theta_1\theta_2-\frac{z}{A_1A_2}\left[2b_{12}^*+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\cos\chi_{12}\right]=e_{12}+2zk_{12}$$

Сравнивая (3.2) и (3.5) с учетом (1.1), убеждаемся в совпадении обоих выражений для тангенциальных деформаций оболочки.

Таким образом, непосредственные вычисления показывают, что в задачах нелинейной теории тонких оболочек обе математические формулировки гипотезы Кирхгофа — Лява эквивалентны и приводят к одинаковым результатам для деформаций и кривизн срединной поверхности независимо от порядка величин удлинений, сдвигов и поворотов.

4. Рассмотрим приближенные геометрические соотношения нелинейной теории оболочек.

Из уравнений (1.5), (1.6) и (3.2), раскладывая направляющие косинусы $\cos\Phi_{ik}$ по степеням компонентов ε_i, ω_i, θ_i и сохраняя члены не выше второго порядка малости, получим известный вариант формул для деформаций, кривизн и кручения [16].

Квадратичный вариант работы [16], формально точный в заданном приближении, не учитывает различного вклада удлинений, сдвигов и поворотов при описании деформированного состояния гибких оболочек [3].

В данной работе при рассмотрении соотношений неквадратичной теории будем учитывать различия в порядках тангенциальных деформаций и поворотов срединной поверхности и на этой основе строить приближенные геометрические зависимости.

Для анализа возможных упрощений деформаций оболочки примем в качестве основных характеристик деформированной поверхности, наряду с коэффициентами квадратичных форм $g_{ik}{}^*$, $b_{ik}{}^*$, эквивалентные им параметры

$$E_1,\ E_2,\ \cos\Phi_{12},\ \cos\Phi_{21},\ \cos\Phi_{13},\ \cos\Phi_{23} \tag{4.1}$$

Использование величин (4.1) оказывается удобным при построении различных приближенных теорий оболочек на основе нелинейных геометрических соотношений (3.2), (3.5).

Так, например, в случае, когда параметры (4.1) одного порядка $E_1\sim E_2\sim\cos\Phi_{12}\sim\cos\Phi_{21}\sim\cos\Phi_{13}\sim\cos\Phi_{23}\sim\varepsilon$, $\varepsilon\ll 1$ соотношения (3.2) переходят в формулы линейной теории оболочек [10].

Если удлинения и сдвиги малы по сравнению с поворотами $E_1\sim E_2\sim\cos\Phi_{12}\sim\cos\Phi_{21}\sim\varepsilon^2$, $\cos\Phi_{13}\sim\cos\Phi_{23}\sim\varepsilon$, $\varepsilon\ll 1$ и вычисления производятся с точностью до ε^2, эти соотношения совпадают с уравнениями простейшего варианта геометрически нелинейной теории оболочек [8].

Переходя к выводу приближенных геометрических соотношений, описывающих эластику тонкой оболочки, будем считать удлинения, сдвиги и повороты элемента оболочки малыми по сравнению с единицей и с поворотами нормали относительно касательных к координатным линиям. На величины поворотов относительно касательных к координатным линиям не будем накладывать ограничений.

В терминах (4.1) принимаемые допущения имеют вид

$$E_i\sim\cos\Phi_{ik}\sim\cos\Phi_{ki},\quad \cos\Phi_{i3}\gg\cos\Phi_{ik},\quad E_i\ll 1,\quad \cos\Phi_{ik}\ll 1 \quad {\scriptstyle (i,\,k=1;\,2;\ i\neq k)} \tag{4.2}$$

Из соотношений (4.2) и равенств (1.1), (1.6) следуют приближенные формулы

$$\cos^2\Phi_{ii}+\cos^2\Phi_{i3}\approx 1,\quad \Phi_{ii}+\Phi_{i3}\approx\pi/2,\quad \partial\Phi_{ii}/\partial\alpha_k\approx-\partial\Phi_{i3}/\partial\alpha_k$$
$$\cos\Phi_{ii}\approx\sin\Phi_{i3},\quad \cos\Phi_{i3}\approx\sin\Phi_{ii} \tag{4.3}$$

В дальнейшем, оценивая вклад отдельных слагаемых при упрощении точных формул, будем считать $\cos^2\Phi_{i3}\sim\cos\Phi_{ik}$ $(i\neq k)$, $\cos\Phi_{ii}\sim 1$ и сохранять в окончательных результатах величины порядка не выше $\cos\Phi_{ik}$ $(i\neq k)$.

В итоге подобных упрощений из формул (1.5), (1.6) и (3.2), пренебрегая для тонких оболочек отношением z/R_i по сравнению с единицей, найдем

$$\varepsilon_{11}=E_1+zK_1,\quad \varepsilon_{12}=\Omega+2z\mathrm{T},\quad E_1=e_{11}=E_1=(A_1^*-A_1)A_1^{-1}$$

$$\Omega=e_{12}=\cos\chi_{12}=\cos\Phi_{12}+\cos\Phi_{21}+\cos\Phi_{13}\cos\Phi_{23},\quad \sin\chi_{12}=1$$

$$K_1=\frac{A_1^*}{A_1}\left(\frac{\cos\Phi_{22}}{A_1}\frac{\partial\Phi_{13}}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\cos\Phi_{23}\right)+\frac{\cos\Phi_{22}-1}{R_1}$$

$$2\mathrm{T}=\frac{A_1^*}{A_1}\left(-\frac{1}{A_2}\frac{\cos\Phi_{22}}{\cos\Phi_{11}}\frac{\partial\cos\Phi_{13}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\cos\Phi_{23}+\frac{\cos\Phi_{12}}{R_2}\right)+$$

$$+\frac{A_2^*}{A_2}\left(-\frac{1}{A_1}\frac{\cos\Phi_{11}}{\cos\Phi_{22}}\frac{\partial\cos\Phi_{23}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\cos\Phi_{13}+\frac{\cos\Phi_{21}}{R_1}\right)\qquad(4.4)$$

Для симметризации кручения срединной поверхности Т воспользуемся тождествами

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{\partial\mathbf{R}^*}{\partial\alpha_2}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{\partial\mathbf{R}^*}{\partial\alpha_1}\right)$$

$$\frac{A_1^*A_2}{R_2}\cos\Phi_{12}-\frac{\partial A_1^*\cos\Phi_{13}}{\partial\alpha_2}+\frac{A_2^*A_1}{R_1}\cos\Phi_{21}-\frac{\partial A_2^*\cos\Phi_{23}}{\partial\alpha_1}=0\qquad(4.5)$$

Складывая для этого (4.4) с (4.5) и полагая согласно (4.2), (4.3) $(1+\cos\Phi_{11}/\cos\Phi_{22})\partial\cos\Phi_{23}/\partial\alpha_1\approx-(\cos\Phi_{11}+\cos\Phi_{22})\partial\Phi_{23}/\partial\alpha_1$, в результате преобразований найдем

$$\mathrm{T}=\mathrm{T}_1+\frac{\Omega_2}{R_1}=\mathrm{T}_2+\frac{\Omega_1}{R_2},\quad \Omega=\Omega_1+\Omega_2,\quad \Omega_1=\cos\Phi_{12}+\frac{1}{2}\cos\Phi_{13}\cos\Phi_{23}$$

$$2\mathrm{T}_1=\frac{A_2^*}{A_1A_2}(\cos\Phi_{11}+\cos\Phi_{22})\frac{\partial\Phi_{23}}{\partial\alpha_1}+\left(\frac{A_2^*}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_1^*}{\partial\alpha_2}\right)\frac{\cos\Phi_{13}}{A_1A_2}-$$

$$-\frac{\cos\Phi_{13}\cos\Phi_{23}}{R_1}-\frac{A_1^*}{A_1A_2}(\cos\Phi_{11}-\cos\Phi_{22})\frac{\partial\Phi_{13}}{\partial\alpha_2}+$$

$$+\left(\frac{A_1^*}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial A_2^*}{\partial\alpha_1}\right)\frac{\cos\Phi_{23}}{A_1A_2}+\frac{2\cos\Phi_{21}}{R_1}\left(\frac{A_2^*}{A_2}-1\right)\quad(1\rightleftarrows2)\qquad(4.6)$$

Восемь параметров E_i, Ω_i, K_i, T_i ($i=1, 2$) представляют энергетические компоненты деформации, на которых совершают работу соответствующие внутренние усилия и моменты в оболочке [8].

Дальнейшие упрощения и преобразования формул (4.4), (4.6) при малых удлинениях и сдвигах связаны с отождествлением параметров Ламе до и после деформации и с заменой величин Φ_{i3} углами Φ_{ii} ($i=1, 2$) в соответствии с формулами (4.3). Тождество $\mathrm{T}_1+\Omega_2/R_1=\mathrm{T}_2+\Omega_1/R_2$ при этом удовлетворяется приближенно.

Полагая $A_i^*\approx A_i$ и пользуясь равенствами (4.3), получим

$$K_1=-\frac{\cos\Phi_{22}}{A_1}\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\sin\Phi_{22}+\frac{\cos\Phi_{22}-1}{R_1}$$

$$2\mathrm{T}=-\frac{\cos\Phi_{22}}{A_2}\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial\alpha_2}+\frac{\sin\Phi_{22}}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}+\frac{\cos\Phi_{12}}{R_2}-$$

$$
-\frac{\cos\Phi_{11}}{A_1}\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial\alpha_1}+\frac{\sin\Phi_{11}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}+\frac{\cos\Phi_{21}}{R_1}
$$

$$
2\mathrm{T}_1=-\frac{(\cos\Phi_{11}+\cos\Phi_{22})}{A_1}\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial\alpha_1}+\frac{2\sin\Phi_{11}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}-\frac{\sin\Phi_{11}\sin\Phi_{22}}{R_1}+
$$

$$
+\frac{(\cos\Phi_{11}-\cos\Phi_{22})}{A_2}\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial\alpha_2}\quad{}_{(1\rightleftarrows 2)}\tag{4.7}
$$

Формулами (4.4) для деформаций срединной поверхности и выражениями (4.7) для кривизн и кручения представлены основные геометрические соотношения предлагаемой неквадратичной теории оболочек при малых удлинениях, сдвигах и конечных поворотах.

Возвращаясь к равенствам п. 2, упростим выражения для вектора вращения при допущениях (4.2). Учитывая (2.4), (2.5) и полагая $\cos\Phi_{t\nu}\cos\Phi_{\nu n}\ll\cos\Phi_{\nu\nu}\cos\Phi_{tn}$, $\cos\Phi_{\nu t}\cos\Phi_{tn}\ll\cos\Phi_{tt}\cos\Phi_{\nu n}$, $\cos\Phi_{\nu t}\cos\Phi_{t\nu}\ll\ll\cos\Phi_{\nu\nu}\cos\Phi_{tt}$, найдем

$$
\begin{gathered}
\Psi_{\nu n}=\Phi_{tt},\quad \Psi_{tn}=-\Phi_{\nu\nu},\quad {}^1/_2(\Psi_{n\nu}+\Psi_{nt})=\Phi_{nn},\\
\Psi_{13}=\Phi_{22},\quad \Psi_{23}=-\Phi_{11},\quad {}^1/_2(\Psi_{31}+\Psi_{32})=\Phi_{33}\\
\Theta=\mathbf{\Phi}=\Phi_{tt}\mathbf{e}_\nu-\Phi_{\nu\nu}\mathbf{e}_t+\Phi_{nn}\mathbf{n}=\Phi_{22}\mathbf{e}_1-\Phi_{11}\mathbf{e}_2+\Phi_{23}\mathbf{n}\\
\Phi_{tt}=\Phi_{22}\cos\gamma-\Phi_{11}\sin\gamma,\quad \Phi_{\nu\nu}=\Phi_{22}\sin\gamma+\Phi_{11}\cos\gamma
\end{gathered}\tag{4.8}
$$

В квадратичном приближении при оценках

$$
\varepsilon_i\sim\omega_i\sim\varepsilon^2,\quad \theta_i\sim\varepsilon\quad (i=1,\,2)\tag{4.9}
$$

вытекающих из допущений (4.2), геометрические зависимости (4.4), (4.7), (4.8) переходят в формулы простейшего варианта нелинейной теории оболочек [8].

5. Для получения статических уравнений эластики оболочки воспользуемся методом возможных перемещений. Вариационный метод позволяет с принятой точностью реализовать в уравнениях статики допущения, положенные в основу геометрических соотношений (4.4), (4.7).

Следуя работе [8], представим вариационное уравнение Лагранжа для тонкой оболочки при малых удлинениях и сдвигах в форме

$$
\begin{gathered}
\delta\Pi=\delta W-\delta A=0,\quad \delta W=\iint\limits_{(F)}(T_1\delta E_1+T_2\delta E_2+T_{12}\delta\Omega_1+\\
+T_{21}\delta\Omega_2+M_1\delta K_1+M_2\delta K_2+M_{12}\delta\mathrm{T}_1+M_{21}\delta\mathrm{T}_2)A_1A_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2=\\
=\iint\limits_{(F)}(T_1\delta E_1+T_2\delta E_2+S\delta\Omega+M_1\delta K_1+M_2\delta K_2+2H\delta\mathrm{T})A_1A_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2\\
\delta A=\iint\limits_{(F)}\mathbf{P}\delta\mathbf{U}A_1A_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2+\int\limits_{(\Gamma)}(\mathbf{T}\delta\mathbf{U}+\mathbf{M}\delta\mathbf{\Phi})\,ds_t\\
\mathbf{P}=p_1\mathbf{e}_1+p_2\mathbf{e}_2+p_n\mathbf{n},\quad \mathbf{T}=T_\nu\mathbf{e}_\nu+T_t\mathbf{e}_t+T_n\mathbf{n},\quad \mathbf{M}=-M_t\mathbf{e}_\nu+M_\nu\mathbf{e}_t\\
S=T_{12}-M_{21}/R_2=T_{21}-M_{12}/R_1,\quad H=M_{12}=M_{21}
\end{gathered}\tag{5.1}
$$

Здесь W, A — упругий потенциал и работа внешних сил; T_i, T_{ik}, M_i, M_{ik} (i, $k=1$, 2; $i\neq k$) — внутренние усилия, отнесенные к недеформированной поверхности; $\mathbf{P}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{M}$ — векторы поверхностной нагрузки, погонных усилий и моментов на граничном контуре; контур Γ предполагается гладким.

Из условия существования упругого потенциала в форме (5.1), соотношения упругости, связывающие внутренние усилия в оболочке с деформациями срединной поверхности, имеют вид [8]:

$$T_1=\frac{Eh}{1-\nu^2}(E_1+\nu E_2),\quad T_{12}=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\Omega+\frac{h^2}{6R_2}\mathrm{T}\right),\quad S=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\Omega$$

$$M_1=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(K_1+\nu K_2),\quad M_{12}=\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\mathrm{T},\quad H=\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\mathrm{T}\qquad (1\rightleftarrows 2)$$

При вычислении вариаций компонентов деформации, кривизн, кручения и поворотов, входящих в уравнение (5.1), будем исходить из приближенных равенств (4.3) и соотношений (4.4), (4.7).

Предварительно найдем формулы для вспомогательных величин δA_i^*, $\delta\Phi_{ii}$, $\delta\cos\Phi_{ik}$ ($i, k=1,2$; $i\neq k$).

Согласно (1.1), (2.2), (4.3), с учетом принятых допущений, имеем

$$\delta(A_i^*\cos\Phi_{ii})=A_i\delta\varepsilon_i,\quad \delta(A_i^*\cos\Phi_{ij})\approx\delta(A_i^*\sin\Phi_{ii})=-A_i\delta\theta_i$$

$$\delta A_i^*=A_i(\cos\Phi_{ii}\delta\varepsilon_i-\sin\Phi_{ii}\delta\theta_i)\qquad (i=1,2;\ j=3)$$

$$\delta\Phi_{ii}=-\sin\Phi_{ii}\delta\varepsilon_i-\cos\Phi_{ii}\delta\theta_i\qquad (i=\nu,t;\ j=n)\tag{5.2}$$

Варьируя функцию $\cos\Phi_{ik}$ и отождествляя затем параметры A_i^* и A_i, найдем

$$\delta\cos\Phi_{ik}=\delta\omega_i-\cos\Phi_{ik}\delta\varepsilon_i+\sin\Phi_{ii}\cos\Phi_{ik}\delta\theta_i\tag{5.3}$$

Далее, в результате прямого варьирования выражений (4.4), (4.7), пользуясь формулами (5.2), (5.3) и сохраняя точность, принятую при выводе формул п. 4, получим

$$\delta E_1=\cos\Phi_{11}\delta\varepsilon_1-\sin\Phi_{11}\delta\theta_1,\quad \delta\Omega=\delta\omega+\sin\Phi_{22}\delta\Phi_{11}+\sin\Phi_{11}\delta\Phi_{22}$$

$$\delta K_1=-\frac{\cos\Phi_{22}}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\delta\Phi_{11}-\left(\frac{\cos\Phi_{22}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}+\frac{\sin\Phi_{11}}{R_1}\right)\delta\Phi_{22}$$

$$2\delta T=-\frac{\cos\Phi_{22}}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\delta\Phi_{11}+\frac{\cos\Phi_{22}}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\delta\Phi_{22}+\frac{\delta\omega_1}{R_2}-\tag{5.4}$$

$$-\frac{\cos\Phi_{11}}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\delta\Phi_{22}+\frac{\cos\Phi_{11}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\delta\Phi_{11}+\frac{\delta\omega_2}{R_1}\qquad (1\rightleftarrows 2)$$

Формулы (5.4) являются исходными для преобразования функционала полной энергии (5.1).

Принимая во внимание зависимости (5.4) и учитывая при варьировании в контурных интегралах, что из пяти вариаций δu_ν, δu_t, δw, $\delta\Phi_{\nu\nu}$, $\delta\Phi_{tt}$ только первые четыре вариации являются независимыми, представим вариационное уравнение (5.1) в форме

$$\iint\limits_{(F)}[-(L_1+A_1A_2p_1)\delta u-(L_2+A_1A_2p_2)\delta v+A_1A_2(L_3-p_n)\delta w]d\alpha_1\,d\alpha_2+$$

$$+\int\limits_{(\Gamma)}[(q_\nu-Q_\nu)\delta u_\nu+(q_t-Q_t)\delta u_t+(q_n-Q_n)\delta w-(m_\nu-M_\nu)\delta\Phi_{\nu\nu}]\,ds_t=0\tag{5.5}$$

$$L_1=\frac{\partial A_2F_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2S}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}F_2+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{A_1H}{R_1}+\frac{1}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}H+\frac{A_1A_2}{R_1}N_1$$

$$L_3=\frac{F_1}{R_1}+\frac{F_2}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_2N_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial A_1N_2}{\partial\alpha_2}\right)\qquad (1\rightleftarrows 2)$$

$$F_1=T_1\cos\Phi_{11}-\left(Q_1+S\sin\Phi_{22}-\frac{M_2\sin\Phi_{11}}{R_2}\right)\sin\Phi_{11}$$

$$N_1=T_1\sin\Phi_{11}+\left(Q_1+S\sin\Phi_{22}-\frac{M_2\sin\Phi_{11}}{R_2}\right)\cos\Phi_{11}$$

$$Q_1=\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_2M_1\cos\Phi_{22}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial A_1H\cos\Phi_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}H\cos\Phi_{11}-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_2\cos\Phi_{11}\right)$$

$$q_\nu=F_1\cos^2\gamma+S\sin 2\gamma+F_2\sin^2\gamma+\frac{H\sin 2\gamma}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\mu\left(\frac{\cos\Phi_{tt}}{R_{\nu t}}-\varkappa_t\sin\Phi_{tt}\right)$$

$$q_t=\frac{(F_2-F_1)\sin 2\gamma}{2}+S\cos 2\gamma+H\left(\frac{\cos^2\gamma}{R_2}-\frac{\sin^2\gamma}{R_1}\right)+\frac{\mu\cos\Phi_{tt}}{R_t}-\frac{\partial}{\partial s_t}\mu\sin\Phi_{tt}$$

$$q_n=N_1\cos\gamma+N_2\sin\gamma+\frac{\mu\sin\Phi_{tt}}{R_t}+\frac{\partial}{\partial s_t}\mu\cos\Phi_{tt}$$

$$m_\nu=M_1\cos\Phi_{22}\cos^2\gamma+H(\cos\Phi_{11}+\cos\Phi_{22})\sin\gamma\cos\gamma+M_2\cos\Phi_{11}\sin^2\gamma$$

$$\mu=(M_2\cos\Phi_{11}-M_1\cos\Phi_{22})\sin\gamma\cos\gamma+H(\cos\Phi_{11}\cos^2\gamma-\cos\Phi_{22}\sin^2\gamma)$$

$$Q_\nu=T_\nu+M_t\left(\varkappa_t\sin\Phi_{tt}-\frac{\cos\Phi_{tt}}{R_{\nu t}}\right),\qquad Q_t=T_t+\frac{M_t\cos\Phi_{tt}}{R_t}-\frac{\partial}{\partial s_t}M_t\sin\Phi_{tt}$$

$$Q_n=T_n+\frac{M_t\sin\Phi_{tt}}{R_t}+\frac{\partial}{\partial s_t}M_t\cos\Phi_{tt}$$

Величины Φ_{tt}, $\varkappa_t$, R_t, $R_{\nu t}$ вычисляются по формулам п. 2.

При независимых в области F вариациях δu, δv, δw и независимых вариациях δu_ν, δu_t, δw, $\delta\Phi_{\nu\nu}$ на контуре Γ из вариационного уравнения Лагранжа (5.5) следуют уравнения равновесия и силовые граничные условия

$$L_1+A_1A_2p_1=0,\quad L_2+A_1A_2p_2=0,\quad L_3-p_n=0 \tag{5.6}$$
$$q_\nu-Q_\nu=0,\quad q_t-Q_t=0,\quad q_n-Q_n=0,\quad m_\nu-M_\nu=0$$

Уравнения равновесия (5.6) соответствуют проектированию главного вектора элемента оболочки на оси, связанные с недеформированной срединной поверхностью. В квадратичном приближении при оценках (4.9) эти уравнения отличаются от уравнений, полученных в работе [8], несущественными слагаемыми.

В частном случае, при осесимметричной деформации оболочки вращения, совмещая линию α_1 с направлением меридиана и полагая $\gamma=0$, из уравнений (5.6) найдем

$$L_1^\circ=\frac{\partial A_2F_1}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}F_2+\frac{A_1A_2}{R_1}N_1+A_1A_2p_1=0,$$

$$L_3^\circ=\frac{F_1}{R_1}+\frac{F_2}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2N_1}{\partial\alpha_1}-p_n=0$$

$$F_1=T_1\cos\Phi_{11}-Q\sin\Phi_{11},\quad N_1=T_1\sin\Phi_{11}+Q\cos\Phi_{11},\quad Q=Q_1-M_2\sin\Phi_{11}/R_2$$

$$Q=\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_2M_1}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_2\cos\Phi_{11}-\frac{A_1A_2M_2\sin\Phi_{11}}{R_2}\right),\quad F_2=T_2 \tag{5.7}$$

Рассматривая вместо равенств (5.7) их линейные комбинации и вводя специальные обозначения, получим

$$L_1^\circ\sin\Phi_0-L_3^\circ\cos\Phi_0=0,\qquad L_1^\circ\cos\Phi_0+L_3^\circ\sin\Phi_0=0$$
$$[r_0(N_\xi\sin\Phi+Q\cos\Phi)]'+\alpha_0r_0p_v=0,\qquad [r_0(N_\xi\cos\Phi-Q\sin\Phi)]'+$$
$$+\alpha_0(r_0p_h-N_\theta)=0,\qquad Q=(1/\alpha_0r_0)[(r_0M_\xi)'-\alpha_0M_\theta\cos\Phi],$$
$$\alpha_1=\xi,\quad \alpha_2=\theta,\quad T_1=N_\xi,\quad T_2=N_\theta,\quad M_1=M_\xi,\quad M_2=M_\theta,\quad (\ )'=\partial/\partial\xi$$

$$A_1=\alpha_0,\quad A_1^*=\alpha,\quad \Phi_{11}=\Phi-\Phi_0,\quad \frac{1}{R_1}=-\frac{1}{\rho_0}=-\frac{\Phi_0'}{\alpha_0},$$

$$p_h=p_1\cos\Phi_0-p_n\sin\Phi_0,\tag{5.8}$$

$$A_2=r_0,\quad A_2^*=r,\quad \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}=\alpha_0\cos\Phi_0,\quad \frac{1}{R_2}=-\frac{\sin\Phi_0}{r_0},\quad p_v=p_1\sin\Phi_0+p_n\cos\Phi_0$$

Здесь Φ_0, Φ — углы наклона исходного и деформированного меридиана к плоскости, нормальной оси вращения оболочки.

Выражения для деформаций и кривизн (4.4), (4.7) при осесимметричной деформации, соответствующие уравнениям (5.8), имеют вид

$$E_1=\alpha\alpha_0^{-1}-1,\quad E_2=rr_0^{-1}-1,\quad K_1=\alpha_0^{-1}(\Phi_0'-\Phi'),\quad K_2=r_0^{-1}(\sin\Phi_0-\sin\Phi)\tag{5.9}$$

Нелинейные уравнения теории оболочек вращения в форме (5.8), (5.9) совпадают с известными уравнениями Э. Рейсснера [9], полученными в предположении малости удлинений.

В случае произвольных удлинений изменения кривизн в обозначениях (5.8), (5.9) вычисляются по формулам (1.6), (3.2). При этом

$$K_1=k_{11}=\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2\left[\frac{\Phi_0'-\Phi}{\alpha}+\frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{\alpha_0}{\alpha}\right)\right]$$

$$K_2=k_{22}=\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\left(\frac{\sin\Phi_0}{r_0}-\frac{\sin\Phi}{r}\right)\tag{5.10}$$

Соотношения (5.9) следуют из формул (5.10), если в них пренебречь различиями между параметрами Ламе для исходного и деформированного состояния оболочки.

Поступила 14 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость круговых цилиндрических оболочек. В сб.: Итоги науки. Механика твердых деформируемых тел, 1967. М., ВИНИТИ, 1969.
2. *Hutchinson J. W., Koiter W. T.* Postbuckling theory. Appl. Mech. Revs., 1970, vol. 23, No. 12. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. М., «Мир», 1971, № 4.)
3. *Новожилов В. В., Толоконников Л. А., Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости. В сб.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3. М., «Наука», 1972.
4. *Алумяэ Н. А.* Теория упругих оболочек и пластинок. В сб.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3. М., «Наука», 1972.
5. *Галимов К. З., Суркин Р. Г.* О работах казанских ученых по теории пластин и оболочек, вып. 5. Изд-во Казанск. ун-та, 1967.
6. *Ворович И. И., Минакова Н. И.* Проблема устойчивости и численные методы в теории сферических оболочек. В сб.: Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел, т. 7. М., ВИНИТИ, 1973.
7. *Simmonds J. G., Danielson D. A.* Nonlinear shell theory with a finite rotation vector. Pt I, II. Proc. Konikl. akad. wet. B 1970, vol. 73, No. 5.
8. *Шаповалов Л. А.* Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек. Инж. ж. МТТ, 1968, № 1.
9. *Reissner E.* On axisymmetrical deformations of thin shells revolution. Proc. Sympos. Appl. Math., vol.3. New-York, Mc Graw-Hill, 1950.
10. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
11. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
12. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
13. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек, ч. 1. Изд-во ЛГУ, 1962.
14. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.– М., Гостехиздат, 1948.
15. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткнигоиздат, 1957.
16. *Tsao C. H.* Strein-displacement relations in large displacement theory of shells. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 11. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 11.)