МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1976

УДК 539.384/385

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ И КОЛЬЦА

Е. Л. НАХМЕЙН, Б. М. НУЛЛЕР

(Ленинград)

Излагается метод решения основной смешанной периодической задачи для упругой полосы. В каждой граничной точке периода допускается смена как одного, так и двух типов условий, число точек раздела в периоде произвольно. Полученное решение может быть обобщено на случай многослойной полосы (или кольца) при смешанных условиях, поставленных на ее одной или обеих гранях. Метод базируется на построенном в п. 1 точном решении основной смешанной периодической задачи для упругой полуплоскости (или на известном решении соответствующей задачи для круга [1]) и на свойствах систем однородных решений. При помощи этого решения в п. 2 задача для полосы сводится к нормальной системе Пуанкаре – Коха с матричными элементами, убывающими экспоненциально по номерам строк и столбцов. Описан способ определения характера особенностей у нормальных и касательных напряжений в точках раздела типов граничных условий. В качестве иллюстраций решены задачи для полуплоскости (в элементарных функциях) и для полосы, защемленной по нижней грани, при наличии в периоде одного прямолинейного штампа и при условии полного сцепления контактных поверхностей.

1. Рассмотрим основную смешанную периодическую задачу для упругой полуплоскости $y\leqslant 0$. Обозначим через L_1 совокупность отрезков $[a_k, b_k]$ действительной оси $y=0$ $(-\pi\leqslant a_1<b_1<a_2<\ldots<b_N<\pi)$, через L_2 – дополнение L_1 до отрезка $[-\pi, \pi]$.

Пусть на L_1 заданы граничные значения перемещений

$$u^-+iv^-=g(x)+c(x) \tag{1.1}$$
$$g(x)=g_1(x)+ig_2(x), \qquad c(x)=c_1(x)+ic_2(x)$$

где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – действительные функции, удовлетворяющие условию Гельдера, $c(x)=c_k$ на $[a_k, b_k]$ – комплексная кусочно-постоянная функция, определяемая условиями погружения штампов, индексы плюс и минус обозначают граничные значения функций при $y\to 0$ соответственно из верхней и нижней полуплоскости. На L_2 значения внешних нормальных $P(x)=-\sigma_y^-(x, 0)$ и касательных $T(x)=\tau_{xy}^-(x, 0)$ напряжений заданы в виде

$$P(x)+iT(x)=2\mu f(x), \qquad f(x)=f_1(x)+if_2(x) \tag{1.2}$$

где μ – модуль сдвига, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – действительные функции, удовлетворяющие условию Гельдера на L_2. Граничные условия (1.1), (1.2) периодически с периодом 2π продолжены на всю действительную ось.

В случае плоской деформации имеем [1]

$$\sigma_x+\sigma_y=4\operatorname{Re}\Phi(z), \qquad 2\mu\varepsilon=(\varkappa+1)\operatorname{Im}\Phi(z) \tag{1.3}$$

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=\Phi(z)-\Phi(\bar z)+(z-\bar z)\overline{\Phi'(z)} \tag{1.4}$$

$$2\mu(u'+iv')=\varkappa\Phi(z)+\Phi(\bar z)-(z-\bar z)\overline{\Phi'(z)} \tag{1.5}$$

где $\varkappa=3-4\nu$, ν – коэффициент Пуассона.

Условия (1.1), (1.2) и формулы (1.4), (1.5) приводят к следующей краевой задаче Римана: найти периодическую с периодом 2π кусочно-регулярную функцию $\Phi(z)$, ограниченную на бесконечности и удовлетворяющую краевому условию

$$\Phi^+(x)=G(x)\Phi^-(x)+2\mu h(x), \quad x\in[-\pi,\ \pi] \tag{1.6}$$

$$G(x)=\begin{cases} -\varkappa, & x\in L_1\\ 1, & x\in L_2,\end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} g'(x), & x\in L_1\\ f(x), & x\in L_2\end{cases}$$

Согласно результатам [2, 3], где задача Римана рассматривается для более общих, чем периодические, автоморфных функций, каноническое решение $X(z)$ однородной задачи (1.6) в классе функций, обращающихся в бесконечность интегрируемого порядка на концах отрезка $[a_k,\ b_k]$, определяется формулой

$$X(z)=\left(\prod_{k=1}^{N}\sin\frac{z-b_k}{2}\right)^{-1}e^{\Gamma(z)}$$

В данном случае в силу (1.6) имеем

$$\Gamma(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\ln G(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-z}{2}d\tau=\ln\prod_{k=1}^{N}\left[\frac{\sin{}^1/_2(z-b_k)}{\sin{}^1/_2(z-a_k)}\right]^{1/2-i\gamma}$$

Здесь берется главное значение логарифма и положительное значение корня при $z=\pi$, $\gamma={}^1/_2\pi^{-1}\ln\varkappa$.

Из двух последних равенств следует

$$X(z)=\prod_{k=1}^{N}\left(\sin\frac{z-a_k}{2}\right)^{-1/2+i\gamma}\left(\sin\frac{z-b_k}{2}\right)^{-1/2-i\gamma} \tag{1.7}$$

Так как, согласно (1.7)

$$X(z+2\pi)=(-1)^N X(z) \tag{1.8}$$

при построении общего решения неоднородной задачи (1.6) необходимо различать случаи четного и нечетного N.

Перепишем условие (1.6) в виде

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)}-\frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)}=\frac{2\mu h(x)}{X^+(x)}, \quad x\in[-\pi,\pi] \tag{1.9}$$

Следуя работе [3], рассмотрим функцию

$$2\mu\Psi(z)=[\Phi(z)-2\mu\Phi_0(z)]X^{-1}(z) \tag{1.10}$$

где удовлетворяющая условию (1.9) кусочно-регулярная функция $\Phi_0(z)$ при нечетном N выражается формулой

$$\Phi_0(z)=\frac{X(z)}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{h(\tau)}{X^+(\tau)}\sin^{-1}\frac{\tau-z}{2}d\tau \tag{1.11}$$

Функция $\Psi(z)$ регулярна в конечной части плоскости z и удовлетворяет условию $\Psi(z+2\pi)=-\Psi(z)$. Отсюда и из условия ограниченности функции $\Phi(z)$ на бесконечности следует

$$\Psi(z)=\sum_{k=1}^{1/2(N+1)}\left\{C_{k1}\cos\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)z-\delta\right]+C_{k2}\sin\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)z-\delta\right]\right\}$$

$$\delta=\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[\gamma(b_k-a_k)-\frac{i}{2}(a_k+b_k)\right] \tag{1.12}$$

где C_{k1} и C_{k2} — произвольные постоянные. Точно так при четном N

$$\Phi_0(z)=\frac{X(z)}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{h(\tau)}{X^+(\tau)}\operatorname{ctg}\frac{\tau-z}{2}\,d\tau$$

$$\Psi(z)=\sum_{k=1}^{1/2N}\left\{C_{k1}\cos(kz-\delta)+C_{k2}\sin(kz-\delta)\right\}+C_{01} \tag{1.13}$$

Общее решение краевой задачи (1.6) в силу (1.10) примет вид

$$\Phi(z)=2\mu[\Phi_0(z)+X(z)\Psi(z)] \tag{1.14}$$

Выпишем напряжения на L_2 и производные перемещений на L_1

$$P(x)+iT(x)=2\mu\varkappa^{-1}[(\varkappa+1)\Phi_0^+(x)+(\varkappa+1)X^+(x)\Psi(x)-g'(x)] \tag{1.15}$$

$$(u'+iv')(x)=(\varkappa+1)[\Phi_0^+(x)+X^+(x)\Psi(x)]-\varkappa f(x) \tag{1.16}$$

Интегрируя (1.16) и учитывая непрерывность перемещений в точках b_k, в промежутке (b_k, a_{k+1}) получим

$$(u^-+iv^-)(x)=\int_{b_k}^{x}(u'+iv')(t)\,dt+g(b_k)+c_k \tag{1.17}$$

Условия непрерывности перемещений в точках $a_{k+1}(k=1,\ldots, N;$ $N>1)$ определяют связь между постоянными c_k

$$c_{k+1}=c_k+\int_{b_k}^{a_{k+1}}(u'+iv')(t)\,dt+g(b_k)-g(a_{k+1}) \quad {\scriptstyle (k=1,\ldots,N-1)} \tag{1.18}$$

Одна из постоянных, для определенности c_1, в процессе решения задачи остается произвольной. Она характеризует перемещение полуплоскости как жесткого тела. Входящие в общее решение (1.14) $N+1$ произвольных комплексных постоянных C_{k1}, C_{k2} находятся из дополнительных условий. Если задан главный вектор X_0, Y_0 усилий, приложенных к отрезку $[-\pi, \pi]$, и штампы жестко сцеплены между собой, то можно считать $c_1=c_2=\ldots=c_N$ $(N>1)$. Тогда для вычисления C_{k1} и C_{k2} $(k<{}^1/_2N)$ в силу (1.14), (1.18) получим систему уравнений

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}}(u'+iv')(t)\,dt=g(a_{k+1})-g(b_k) \quad {\scriptstyle (k=1\ldots,N-1)} \tag{1.19}$$

Коэффициенты при функциях $\cos(^1/_2Nz-\delta)$ и $\sin(^1/_2Nz-\delta)$ можно получить, учитывая величины проникающих на бесконечность напряжений

$$\sigma_y^\infty = {}^1/_2\pi^{-1}Y_0, \qquad \tau_{xy}^\infty = {}^1/_2\pi^{-1}X_0 \tag{1.20}$$

и задавая произвольно напряжение σ_x^∞ и вращение ε^∞ при $z\to -i\infty$. Задание двух последних эквивалентно условию квазипериодичности или периодичности перемещений. Нетрудно показать, что для выбранной ветви канонического решения $X(z)$ имеют место асимптотические оценки $(z\to\pm i\infty)$

$$X(z) = (\mp 2i)^N \exp(\pm{}^1/_2Nzi \mp i\delta) + O\{\exp[\pm{}^1/_2 zi(N-1)]\} \tag{1.21}$$

Отсюда в силу (1.3), (1.4) получим при N нечетном и четном

$$iC_{p1} = C_{q2} = (2i)^{-N}(i\sigma_y^\infty + \tau_{xy}^\infty), \qquad p = {}^1/_2(N+1), \qquad q = {}^1/_2N$$
$$C_{p2} = iC_{q1} = {}^1/_4(2i)^{1-N}[\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty + 8\mu(\varkappa+1)^{-1}\varepsilon^\infty i] \tag{1.22}$$

Если известны главные векторы X_k, Y_k внешних сил, приложенных к каждому штампу

$$\int_{a_k}^{b_k} [P(t) + iT(t)]\,dt = -Y_k + iX_k \qquad (k=1,\ldots,N) \tag{1.23}$$

то значения C_{k1} и C_{k2} находятся из (1.23) и из условия периодичности (квазипериодичности) перемещений. Постоянные $c_2, \ldots, c_N$ можно найти из (1.17). В частности, при $N=1$, $f(x)=0$, полагая $a_1=-a$, $b_1=a$, получим

$$\Phi(z) = \frac{\mu X(z)}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{g'(t)\,dt}{\sin{}^1/_2(t-z)X^+(t)} +$$
$$+X(z)\{[{}^1/_4(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty + 2i\tau_{xy}^\infty) + 2i\mu(\varkappa+1)^{-1}\varepsilon^\infty]\sin({}^1/_2z - ia\gamma) - \tag{1.24}$$
$$-{}^1/_2(\tau_{xy}^\infty + i\sigma_y^\infty)\cos({}^1/_2z - ia\gamma)\}$$
$$X(z) = [\sin{}^1/_2(z+a)]^{-1/2+i\gamma}[\sin{}^1/_2(z-a)]^{-1/2-i\gamma}$$

Таким образом, задача о давлении на полуплоскость периодической системы прямолинейных штампов ($g'(x)\equiv 0$) решена в элементарных функциях. Заметим, что, если $f(x)$ и $g(x)$ — тригонометрические полиномы, одинаковые на всех отрезках, составляющих L_1, то $\Phi(z)$ также выражается в элементарных функциях (см. (3.9)).

2. Рассмотрим основную смешанную периодическую задачу для упругой полосы $-\infty<x<\infty$, $-l\leqslant y\leqslant 0$, заделанной по нижней кромке $y=-l$. В обозначениях п. 1 ее граничные условия имеют вид

$$u^- + iv^- = g(x) + c(x) \qquad (y=0,\ x\in L_1) \tag{2.1}$$

$$P(x) + iT(x) = 2\mu f(x) \qquad (y=0,\ x\in L_2) \tag{2.2}$$

$$u = v = 0 \qquad (y=-l) \tag{2.3}$$

главный вектор X_0, Y_0 сил, приложенных ко всему отрезку $[-\pi, \pi]$, выражается формулой

$$X_0 = X + 2\mu\int_{L_2} f_1(x)\,dx, \qquad Y_0 = Y + 2\mu\int_{L_2} f_2(x)\,dx \tag{2.4}$$

где X, Y — главный вектор сил, приложенных к L_1.

Решение будем искать в виде рядов

$$u=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u^k(x,y),\quad v=\sum_{k=-\infty}^{\infty}v^k(x,y) \tag{2.5}$$

члены которых — периодические с периодом 2π функции — составим из двух типов однородных решений для упругой полосы $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, $-\infty<y<\infty$, соответствующих граничным условиям $\tau_{xy}=u=0$ и $\sigma_x=v=0$ при $x=-\pi,\ \pi$.

Из формул Папковича — Нейбера

$$u=4\varkappa_1F_1-\frac{\partial}{\partial x}(xF_1+yF_2+F_3)$$

$$v=4\varkappa_1F_2-\frac{\partial}{\partial y}(xF_1+yF_2+F_3),\quad \varkappa_1=1-\nu$$

полагая в них $F_1=0$

$$F_2=(A_{k1}\sin kx+A_{k3}\cos kx)\,e^{k(l+y)},\qquad F_3=(A_{k2}\sin kx+A_{k4}\cos kx)\,e^{k(l+y)}$$

где A_{ks} — произвольные постоянные, $k=\pm1,\ \pm2,\ldots$, получим

$$u^k(x,y)=[-(A_{k1}y+A_{k2})\cos kx+(A_{k3}y+A_{k4})\sin kx]\,ke^{k(l+y)} \tag{2.6}$$
$$v^k(x,y)=-\{[A_{k1}(ky-\varkappa)+kA_{k2}]\sin kx+[A_{k3}(ky-\varkappa)+kA_{k4}]\cos kx\}\,e^{k(l+y)}$$

Нетрудно проверить, что элементы системы (2.6) самоуравновешены. Решение, удовлетворяющее условию (2.3), с главным вектором, отличным от нуля, имеет вид ($\varkappa_2=1-2\nu$)

$$u^\circ(x,y)=X_0(2\pi\mu)^{-1}(l+y),\qquad v^\circ(x,y)=Y_0(4\pi\mu\varkappa_1)^{-1}\varkappa_2(l+y) \tag{2.7}$$

Подставим ряды (2.5)—(2.7) в условие (2.3). Используя ортогональность систем тригонометрических функций в промежутке $[-\pi,\ \pi]$, выразим каждый коэффициент A_{ks} с отрицательным номером k через пару коэффициентов A_{ks} с тем же, но положительным номером k. Тогда получим

$$(u+iv)(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}(u^k+iv^k)(x,y)-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{4}A_{ks}e^{-k(l+y)}\rho_{ks}(x,y) \tag{2.8}$$

$$\rho_{ks}(x,y)=p_{ks}(y)\cos kx+q_{ks}(y)\sin kx,\quad p_{k1}(y)=-q_{k3}=-2\varkappa^{-1}k^2l(l+y)-ky$$
$$p_{k3}(y)=q_{k1}(y)=-p_{k1}(y)\,i+(2kl+\varkappa)\,i$$
$$p_{k2}(y)=-q_{k4}(y)=2\varkappa^{-1}k^2(y+l)-k,\qquad p_{k4}(y)=q_{k2}(y)=-p_{k2}(y)\,i-2ki$$

Подставим выражения (2.8) в граничные условия (2.1), (2.2) и запишем их в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}(u^k+iv^k)(x,0)=g(x)+c(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}A_{ks}e^{-kl}\rho_{ks}(x,0),\qquad x\in L_1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-\sigma_y{}^k+i\tau_{xy}{}^k)(x,0)=2\mu f(x)+2\mu\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{4}A_{ks}e^{-kl}\gamma_{ks}(x),\qquad x\in L_2 \tag{2.9}$$

$$\gamma_{ks}(x)=p_{ks}\cos kx+q_{ks}\sin kx \tag{2.10}$$
$$q_{k1}=p_{k3}=2\varkappa^{-1}lk^2(2\varkappa_1+kl)+2k\varkappa_1,\qquad iq_{k4}=p_{k2}=iq_{k2}+2ik^2\varkappa^{-1}$$
$$iq_{k3}=p_{k1}=i(q_{k1}-2\varkappa^{-1}lk^2-k),\qquad q_{k2}=p_{k4}=-2\varkappa^{-1}k^2(2\varkappa_1+kl)+k^2$$

В силу полноты системы тригонометрических функций первый ряд в правой части формулы (2.8) дает решение периодической задачи для упругой полуплоскости $y \leqslant 0$ при произвольных, в том числе и смешанных условиях на ее границе $y=0$. Поэтому правые части равенств (2.9), (2.10) целесообразно считать заданными граничными функциями задачи (1.1), (1.2), определяющими перемещения всей границы полуплоскости. По теореме единственности Кирхгофа эти перемещения совпадают с перемещениями, выражающимися левыми частями (2.8) при $y=0$, что и позволяет найти коэффициенты A_{ks}. При этом, согласно (2.7), будем иметь

$$\sigma_x^{\infty}=Y_0\nu(2\pi\varkappa_1)^{-1}, \qquad \varepsilon^{\infty}=-X_0(4\pi\mu)^{-1} \tag{2.11}$$

Положим в (1.1), (1.2) функции $g(x)$, $2\mu f(x)$ равными в том же порядке правым частям (2.9), (2.10). Решив сформулированную задачу для полуплоскости, получим согласно (1.5), (1.10), (1.4) граничные значения перемещений и напряжений во всем промежутке $[-\pi, \pi]$

$$u^-+iv^- = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{4} A_{nt}L_{nt}(x)e^{-nl}+L(x)+c_1 \tag{2.12}$$

$$P(x)+iT(x)=2\mu\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{4} A_{nt}M_{nt}(x)e^{-nl}+M(x) \tag{2.13}$$

Приравняем ряд (2.12) левой части условия (2.9) при $x\in[-\pi, \pi]$. Обе части полученного равенства умножим на $\sin kx$ и $\cos kx$ и, учитывая (2.6), проинтегрируем от $-\pi$ до π. В силу ортогональности тригонометрических функций при $k\geqslant 1$ получим бесконечную систему алгебраических уравнений ($s=1, 2, 3, 4$; $k=1, 2, \ldots$)

$$A_{ks}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{4} m_{nt}^{ks}\, e^{-(k+n)l}A_{nt}=d_{ks}e^{-kl} \tag{2.14}$$

а при $k=0$ из условия равенства граничных перемещений — значение постоянной

$$c_1=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{4} m_{nt}e^{-nl}A_{nt}+d \tag{2.15}$$

Коэффициенты m_{nt}^{ks} и d_{ks} имеют алгебраический рост по k и n, поэтому внедиагональные матричные элементы системы (2.14) экспоненциально убывают по номерам строк и столбцов, и она относится к типу нормальных систем Пуанкаре — Коха [4]. Можно показать, что нормальное решение этой системы существует, единственно, находится по правилу Крамера и определяется асимптотикой

$$A_{ks}=O(d_{ks}e^{-kl}) \tag{2.16}$$

Эта оценка показывает, что ряды (2.8) абсолютно сходятся при $y<0$, однако общий член ряда убывает, как e^{ky}. Таким образом в окрестности границы $y=0$ сходимость ухудшается, а на самой границе полосы вовсе не имеет места.

Чтобы выделить в явном виде особенности, возникающие на границе, и улучшить сходимость в ее окрестности, следует вновь воспользоваться тем обстоятельством, что первый ряд (2.8) представляет собой перемещение полуплоскости, на границе которой перемещения и напряжения —

функции $g(x)$ и $2\mu f(x)$ — выражаются правыми частями равенства (2.9), (2.10). После замены расходящейся части рядов (2.8) указанным решением из п. 1 получаются ряды, k-й член которых в силу асимптотики (2.16) убывает, как $e^{-k(2l+y)}$. При этом особенности в напряжениях под краем штампа $x=d$, $y=0$ носят осциллирующий характер, определяются только решением задачи для полуплоскости и, согласно результатам п. 1, выражаются формулой

$$P(x)+iT(x)=(K_1+iK_2)\,|x-d|^{\pm i\gamma-1/2}$$

Здесь верхний знак в показателе степени относится к случаю $d=a_k$, нижний — к случаю $d=b_k$. Коэффициенты интенсивности K_1 и K_2 зависят от решения системы (2.14), представляют собой экспоненциально сходящиеся ряды и могут быть вычислены по формулам п. 1.

Сделаем несколько обобщающих замечаний.

Для сокращения выкладок выше рассмотрен случай поступательного перемещения штампов. Их повороты нетрудно учесть, обобщив соответствующее решение для N штампов [1] на случай периодической задачи.

В силу тех же соображений предлагаемый метод применим и для случаев, когда на участках контакта частично имеет место проскальзывание или когда между штампами и полосой отсутствует трение. К подобным задачам сводится рассмотрение деформации упругой плоскости, ослабленной всевозможными двоякопериодическими системами трещин.

Если упругая область, на которую давят штампы, склеена или составлена из n полос с различными упругими характеристиками, то решение следует искать в виде рядов (2.5) с коэффициентами A^r_{ks} отдельно для каждой r-й полосы. В этом случае коэффициенты A^1_{ks} с отрицательным номером k в рядах для первой полосы, соприкасающейся непосредственно со штампами, и все A_{ks}^r при $r>1$ выражаются через A^1_{ks} при $k>0$ с помощью условий сопряжения и граничных условий для n-й полосы. В остальном ход решения задачи не меняется.

Если n-слойная полоса испытывает двустороннее давление системы штампов, различных по структуре, но с одинаковым периодом, то ее следует предварительно расчленить при $n=1$ на две, при $n>1$ на n полос и изложенную выше методику применить к крайним полосам. Ясно, что тогда в нормальной системе (2.14) s и t будут изменяться от единицы до восьми.

Наконец, метод применим к задачам для многослойного упругого кольца, с границами которого спаяны периодические системы штампов. В этом случае вместо задачи для полуплоскости следует воспользоваться решением соответствующей смешанной задачи для круга [1], а решение для кольца искать в рядах по системам однородных решений задачи о клине, построенным в работе [5].

3. Изучим более подробно задачу о давлении на закрепленную снизу упругую полосу периодической системы полностью сцепленных с ней одинаковых прямолинейных штампов. Эта задача определяется условиями (2.1)—(2.3) при $N=1$, $g(x)\equiv f(x)\equiv 0$ и, следовательно, решается в форме (2.8).

Решение задачи (1.1), (1.2) с функциями $g(x)$ и $2\mu f(x)$, равными соответственно правым частям выражений (2.9) и (2.10), построим в виде суммы $\Phi(z)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z)$ решений основной задачи с условием (1.2) на всем промежутке $[-\pi, \pi]$ и смешанной задачи (1.1), (1.2), в которой функция $g(x)$ заменена функцией $g_1(x)=g(x)-g_0(x)$. Здесь $g_0(x)$ — перемещения границы L_1 в первой задаче. Ее решение

$$\Phi_1(z)=\frac{\mu}{\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)\,de^{it}}{e^{it}-e^{iz}} \tag{3.1}$$

согласно (2.10), представляет собой суперпозицию интегралов

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(\beta_1\cos kt+\beta_2\sin kt)\,de^{it}}{e^{it}-e^{iz}}=\begin{cases}{}^1/_2e^{ikz}(\beta_1-i\beta_2), & \operatorname{Im} z>0\\ -{}^1/_2e^{-ikz}(\beta_1+i\beta_2), & \operatorname{Im} z<0\end{cases} \tag{3.2}$$

при различных постоянных β_1 и β_2. Равенство (3.2) получено путем преобразования $\tau=e^{it}$, отображающего отрезок $[-\pi, \pi]$ в единичную окружность, и применения теоремы Коши.

Подставив (3.1) в (1.5), учитывая (2.10) и (3.2), получим

$$g_1'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{4}A_{ks}e^{-kl}[P_{ks}^1\cos kx+P_{ks}^2\sin kx] \tag{3.3}$$

$$P_{ks}^1=kq_{ks}(0)+{}^1/_2[(\varkappa-1)p_{ks}+i(\varkappa+1)q_{ks}]$$

$$P_{ks}^2=-kp_{ks}(0)+{}^1/_2[(\varkappa-1)q_{ks}-i(\varkappa+1)p_{ks}]$$

Второе решение $\Phi_2(z)$ выражается правой частью формулы (1.24), где

$$g'(x)=g_1'(x),\qquad C_{11}=-{}^1/_4\pi^{-1}(X+iY),\qquad C_{12}=-{}^1/_2\pi^{-1}(1+\varkappa)^{-1}\varkappa_2(Y-iX) \tag{3.4}$$

Для вычисления интеграла (1.24) воспользуемся соотношением

$$X(z)=2ie^{-a\gamma}e^{{}^1/_2iz}X_1(e^{iz}),\qquad X_1(e^{iz})=(e^{iz}-e^{-ia})^{-{}^1/_2+i\gamma}(e^{iz}-e^{ia})^{-{}^1/_2-i\gamma} \tag{3.5}$$

$$\sin{}^1/_2(t-z)={}^1/_2i(e^{iz}-e^{it})e^{-{}^1/_2(t+z)} \tag{3.6}$$

и введем преобразования $\tau=e^{it}$, $w=e^{iz}$. Тогда отрезок $[-a, a]$ перейдет в дугу $\bar{\alpha}\alpha$ $(\alpha=e^{ia})$ единичной окружности, и будут справедливы равенства

$$\int_{-a}^{a}\frac{(\beta_1\cos kt+\beta_2\sin kt)\,dt}{\pi X^+(t)\sin{}^1/_2(t-z)}=e^{a\gamma}w^{{}^1/_2}\left[\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{i}\right)F_k(w)+\right.$$

$$\left.+\left(\beta_1-\frac{\beta_2}{i}\right)F_{-k}(w)\right]\qquad (k=1,2,\ldots)$$

$$F_k(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\bar{\alpha}}^{\alpha}\frac{\tau^{k-1}\,d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau-w)}\qquad (k=\pm1,\pm2,\ldots) \tag{3.7}$$

Функция $X_1(w)$ является каноническим решением краевой задачи $X_1^+(\tau)+\varkappa X_1^-(\tau)=0$ на дуге $\bar{\alpha}\alpha$, функция $X_1^+(\tau)$ — ее предельное значение при $w\to\tau$ внутри окружности. При $|w|\to\infty$ $X_1(w)=w^{-1}+O(w^{-2})$.

Функцию $X^{-1}(w)$ представим рядами

$$\frac{1}{X(w)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kD_k(\alpha)w^{1-k}(|w|>1),\qquad D_k(\alpha)=\sum_{n=0}^{k}C_1^nC_2^{k-n}\alpha^{k-2n}$$

$$\frac{1}{X(w)}=-e^{-2a\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kD_k(\alpha^{-1})w^k(|w|<1)$$

$$C_j^n=(n!)^{-1}\gamma_j(\gamma_j-1)\ldots(\gamma_j-n+1),\qquad \gamma_1={}^1/_2-i\gamma,\qquad \gamma_2=\bar{\gamma}_1$$

Теперь, пользуясь приемом § 110 [1] функции $F_k(w)$ можно вычислить в виде конечных сумм

$$F_k(w)=\frac{1}{1+\varkappa}\left[\frac{w^{k-1}}{X_1(w)}-\sum_{n=0}(-1)^nD_n(\alpha)w^{k-n}\right]\qquad (k=1,2,\ldots)$$

$$F_{-k}(w)=\frac{1}{1+\varkappa}\left[\frac{w^{-k-1}}{X_1(w)}+e^{-2a\gamma}\sum_{n=0}(-1)^nD_n(\alpha^{-1})w^{n-k-1}\right] \tag{3.8}$$

Подставив (3.3) в (1.24) при помощи формул (3.7), (3.8), получим

$$\Phi_2(z)=\frac{2\mu}{1+\varkappa}\left\{g_1'(z)+X(z)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{4}A_{nt}e^{-nl}\sum_{p=0}^{n}[V_{nt}^{n-p}\cos\beta(p,z)+\right.$$

$$\left.+W_{nt}^{n-p}\sin\beta(p,z)]+X(z)[C_{11}\cos\beta(0,z)+C_{12}\sin\beta(0,z)]\right\} \qquad (3.9)$$

$$\beta(p,z)=(p+{}^1/_2)z-ia\gamma,\qquad V_{nt}{}^m=(-1)^m(P_{nt}{}^2D_n{}^++iP_{nt}{}^1D_n{}^-)$$

$$-W_{nt}{}^m=(-1)^m(P_{nt}{}^1D_n{}^+-iP_{nt}{}^2D_n{}^-),\qquad D_n{}^\pm={}^1/_4[D_n(\alpha)\pm D_n(\alpha^{-1})]$$

Сопоставление граничных напряжений, определяемых функцией $\Phi_1(z)+\Phi_2(z)$, с напряжением в форме (2.13) дает на L_1

$$M_{nt}(x)=P_{ks}{}^1\cos kx+P_{ks}{}^2\sin kx+\varkappa^{-1}X^+(x)\sum_{p=0}^{n}[V_{nt}^{n-p}\cos\beta(p,x)+$$

$$+W_{nt}^{n-p}\sin\beta(p,x)]$$

$$M(x)=\varkappa^{-1}(\varkappa+1)X^+(x)[C_{11}\cos\beta(0,x)+C_{12}\sin\beta(0,x)]$$

на L_2 имеем $M_{nt}(x)=P_{ks}{}^1\cos kx+P_{ks}{}^2\sin kx$, $M(x)\equiv 0$.

Таким образом, матричные элементы и свободные члены нормальной системы (2.14) выражаются конечными суммами

$$m_{nt}^{k3}+im_{nt}^{k1}=-\pi^{-1}k^{-1}M_{nt}^{k+},\qquad d_{k3}+id_{k1}=\pi^{-1}k^{-1}F_k{}^+$$

$$m_{nt}^{k2}-im_{nt}^{k2}=(2\pi k^2)^{-1}M_{nt}^{k-}-{}^1/_2k^{-1}\varkappa(m_{nt}^{k3}-im_{nt}^{k1})$$

$$d_{k4}-id_{k3}=-(2\pi k^2)^{-1}F_k{}^-+\varkappa(2k)^{-1}(d_{k3}-id_{k1})$$

$$M_{nt}^{k\pm}=\pi(p_{nt}\pm q_{nt})\delta_{kn}+\varkappa^{-1}\sum_{p=0}^{n}(W_{nt}^{p+}I_{p\pm k}+W_{nt}^{p-}I_{-p\pm k})$$

$$F_k{}^\pm=(Y-iX)(4\pi\mu\varkappa i)^{-1}(e^{a\gamma}I_{\pm k}+\varkappa e^{-a\gamma}I_{\pm k-1})$$

$$W_{nt}{}^{p\pm}={}^1/_4e^{\pm a\gamma}(-1)^{n-p}[P_{nt}{}^2\pm iP_{nt}{}^1]D_{n-p}(\alpha^{\pm1})$$

δ_{kn} — символ Кронекера, интегралы I_p вычисляются тем же приемом, что и выше ($p=0, 1,\ldots$)

$$I_{\pm p}=\pm\int_{-a}^{a}X^+(x)\exp\left[i\left(\frac{1}{2}\pm p\right)x\right]dx=\frac{4\pi i\varkappa(-1)^pB_p{}^\pm}{(1+\varkappa)e^{\pm a\gamma}}$$

$$B_p{}^\pm=\sum_{n=0}^{p}S_1{}^nS_2^{p-n}\alpha^{\pm(p-2n)},\qquad S_j{}^n=(n!)^{-1}(-\gamma_j)(-\gamma_j-1)\ldots(-\gamma_j-n+1)$$

Поступила 14 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
3. *Чибрикова Л. И.* О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1962, т. 122, кн. 3.
4. *Каган В. Ф.* Основания теории определителей. Одесса, Госиздат Украины. Одесск. отд., 1922.
5. *Нуллер Б. М., Чечик А. Л.* К расчету упругой круговой арки. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехн., 1970, т. 94.