

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ
ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ

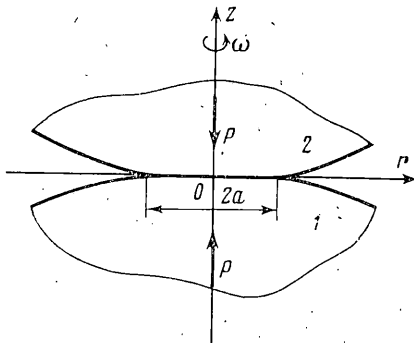
М. Б. ГЕНЕРАЛОВ, Б. А. КУДРЯВЦЕВ, В. З. ПАРТОН

(Москва)

Рассматривается контактная осесимметричная задача термоупругости для двух полубесконечных тел, из которых одно вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью. Предполагается, что радиусы кривизны этих тел велики по сравнению с размерами площадки контакта, в связи с чем каждое из тел рассматривается как полупространство с прямолинейной границей. Вращение одного тела относительно другого сопровождается выделением тепла на поверхности контакта и приводит к возникновению температурных напряжений в каждом из тел. Поставленная задача состоит в определении напряженного состояния контактирующих элементов и температурного поля. Плоская задача термоупругости с учетом тепловыделения на поверхности контакта двух соприкасающихся плоскостей, движущихся с постоянной скоростью одно относительно другого, была рассмотрена в [1].

1. Пусть упругие полубесконечные тела, отнесенные к цилиндрической системе координат (r, θ, z) , соприкасаются по площадке $0 \leq r \leq a$ и вращаются с относительной угловой скоростью ω (фиг. 1). При этом силы трения, подчиняющиеся закону Кулона, приводят к возникновению тепловых источников, распределенных по площадке контакта.

Будем полагать, что теплоотдача со свободной поверхности находящихся в контакте тел отсутствует и все тепло, возникающее на площадке



Фиг. 1

контакта, поглощается соприкасающимися телами. Кроме того, предполагается, что касательные напряжения τ_{rz} равны нулю всюду на границе $z=0$, и единственным источником тепла на площадке контакта являются напряжения $\tau_{z\theta}$, которые пропорциональны нормальным напряжениям σ_z , действующим на поверхностях контакта. В такой постановке задача сводится в первую очередь к определению осесимметричных составляющих $u_r(r, z)$, $u_z(r, z)$ вектора перемещений в полупространствах $z > 0$ и $z < 0$ и функции температуры $T(r, z)$ из условий теплового и механического контакта. Компонента $u_\theta(r, z)$ вектора смещений затем находится из решения известной задачи о кручении полупространства с заданными касательными напряжениями, распределенными по круговой площадке на границе полупространства.

С помощью интегрального преобразования Ханкеля представим смещения u_r , u_z и температуру T для полубесконечных тел 1 и 2 (фиг. 1)

С помощью интегрального преобразования Ханкеля представим смещения u_r , u_z и температуру T для полубесконечных тел 1 и 2 (фиг. 1)

в виде

$$u_r^\pm(r, z) = \int_0^\infty [C_1^\pm(\xi) \pm C_2^\pm(\xi) \xi z] e^{\pm \xi z} J_1(\xi r) d\xi + \\ + \alpha^\pm (1 + \nu^\pm) \int_0^\infty \frac{1}{\xi} A^\pm(\xi) e^{\pm \xi z} J_1(\xi r) d\xi \quad (1.1)$$

$$u_z^\pm(r, z) = \int_0^\infty [-C_1^\pm(\xi) + C_2^\pm(\xi) (3 - 4\nu^\pm \mp \xi z)] e^{\pm \xi z} J_0(\xi r) d\xi + \\ + \alpha^\pm (1 + \nu^\pm) \int_0^\infty \frac{1}{\xi} A^\pm(\xi) e^{\pm \xi z} J_0(\xi r) d\xi \quad (1.2)$$

$$T^\pm(r, z) = \int_0^\infty A^\pm(\xi) e^{\pm \xi z} J_0(\xi r) d\xi \quad (1.3)$$

Здесь и ниже знаки плюс и минус относятся соответственно к телам 1 (нижнее полупространство) и 2 (верхнее полупространство), ν , μ , α — коэффициент Пуассона, модуль сдвига и коэффициент линейного расширения материала.

Компоненты напряжений в телах 1 и 2 представляются в следующем виде:

$$\sigma_z^\pm(r, z) = 2\mu^\pm \int_0^\infty [-C_1^\pm(\xi) + C_2^\pm(\xi) (2 - 2\nu^\pm \mp \xi z)] e^{\pm \xi z} J_0(\xi r) \xi d\xi \quad (1.4)$$

$$\tau_{rz}^\pm(r, z) = 2\mu^\pm \int_0^\infty [C_1^\pm(\xi) - C_2^\pm(\xi) (1 - 2\nu^\pm \mp \xi z)] e^{\pm \xi z} J_1(\xi r) \xi d\xi \quad (1.5)$$

Используя условие $\tau_{rz}^\pm(r, 0) = 0$, находим

$$C_1^\pm(\xi) = C_2^\pm(\xi) (1 - 2\nu^\pm) \quad (1.6)$$

С учетом (1.6), (1.2) — (1.4) определим нормальные смещения, напряжения и температуру на границе полупространства

$$u_z^\pm(r, 0) = 2(1 - \nu^\pm) \int_0^\infty C_2^\pm(\xi) J_0(\xi r) d\xi + \alpha^\pm (1 + \nu^\pm) \int_0^\infty \frac{1}{\xi} A^\pm(\xi) J_0(\xi r) d\xi \quad (1.7)$$

$$\sigma_z^\pm(r, 0) = 2\mu^\pm \int_0^\infty \xi C_2^\pm(\xi) J_0(\xi r) d\xi \quad (1.8)$$

$$T^\pm(r, 0) = \int_0^\infty A^\pm(\xi) J_0(\xi r) d\xi \quad (1.9)$$

Пусть R — радиус кривизны соприкасающихся тел до деформации, тогда если уравнение поверхностей, ограничивающих тела 1 и 2 до деформации, имеет вид $z = \mp r^2/2R$, то имеет место отношение [2]

$$u_z^+(r, 0) + u_z^-(r, 0) = -(\delta^+ + \delta^-) + r^2/R \quad (1.10)$$

Здесь δ^+ , δ^- — жесткие перемещения соприкасающихся тел. Из этого равенства следует

$$(\partial u_z^+/\partial r + \partial u_z^-/\partial r)_{z=0} = 2r/R \quad (1.11)$$

Полагая, что контакт тел происходит по круговой площадке $0 \leq r < a$ и учитывая, что

$$\begin{aligned} \sigma_z^+(r, 0) &= \sigma_z^-(r, 0) = \sigma_z(r, 0) & (0 \leq r < a) \\ \sigma_z^+(r, 0) &= \sigma_z^-(r, 0) = 0 & (r > a) \end{aligned} \quad (1.12)$$

получим равенство $2\mu^+ C_2^+(\xi) = 2\mu^- C_2^-(\xi)$. Следовательно

$$C_2^+(\xi) = C(\xi)/2\mu^+, \quad C_2^-(\xi) = C(\xi)/2\mu^- \quad (1.13)$$

Перейдем к установлению краевых условий теплового контакта. Очевидно, температуры тел 1 и 2 в области соприкосновения равны

$$T^+(r, 0) = T^-(r, 0) \quad (0 \leq r < a) \quad (1.14)$$

Если обозначить q^+ и q^- интенсивности тепловых потоков в теле 1 и 2 соответственно, то

$$q^+ = -\lambda^+ \left. \frac{\partial T^+}{\partial z} \right|_{\substack{z=0 \\ r < a}}, \quad q^- = \lambda^- \left. \frac{\partial T^-}{\partial z} \right|_{\substack{z=0 \\ r < a}}$$

где λ^\pm — коэффициенты теплопроводности тел 1 и 2.

На площадке контакта сумма тепловых потоков, идущих в тела 1 и 2, равна интенсивности теплообразования за счет сил трения

$$q^+ + q^- = (\omega r/J) \tau_{z\theta}(r, 0) \quad (0 \leq r < a) \quad (1.15)$$

где в соответствии с законом Кулона (k — коэффициент трения) $\tau_{z\theta}(r, 0) = k\sigma_z(r, 0)$, J — механический эквивалент тепла.

Таким образом, равенство (1.15) принимает вид

$$\left(-\lambda^+ \frac{\partial T^+}{\partial z} + \lambda^- \frac{\partial T^-}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\omega k}{J} r \sigma_z(r, 0) \quad (0 \leq r < a) \quad (1.16)$$

С учетом (1.14) и равенства

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial T^-}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (r > a) \quad (1.17)$$

получаем $A^+(\xi) = A^-(\xi) = A(\xi)$.

Краевые условия (1.14), (1.16), (1.17) приводят к системе парных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \psi \frac{d}{dr} \int_0^\infty C(\xi) J_0(\xi r) d\xi - [\alpha^+(1+\nu^+) + \alpha^-(1+\nu^-)] \int_0^\infty A(\xi) J_1(\xi r) d\xi &= \frac{2r}{R} \\ \psi &= \frac{(1-\nu^+)}{\mu^+} + \frac{(1-\nu^-)}{\mu^-} \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$-(\lambda^+ + \lambda^-) \int_0^\infty \xi A(\xi) J_0(\xi r) d\xi - \frac{\omega k}{J} r \int_0^\infty \xi C(\xi) J_0(\xi r) d\xi = 0, \quad (0 \leq r < a) \quad (1.19)$$

$$\int_0^\infty \xi C(\xi) J_0(\xi r) d\xi = 0, \quad \int_0^\infty \xi A(\xi) J_0(\xi r) d\xi = 0 \quad (r > a) \quad (1.20)$$

2. Для решения системы парных уравнений (1.18)–(1.20) полагаем

$$C(\xi) = \int_0^a \varphi(t) \cos \xi t dt, \quad A(\xi) = \int_0^a f(t) \cos \xi t dt \quad (2.1)$$

где функции $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $f(t)$, $f'(t)$ предполагаются непрерывными в промежутке $0 \leq t \leq a$. Тогда для нормальных напряжений и тепловых потоков на площадке контакта получим

$$\sigma_z(r, 0)|_{r < a} = \frac{\varphi(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \quad (2.2)$$

$$q^\pm(r, 0)|_{r < a} = -\lambda^\pm \left[\frac{f(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{f'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right] \quad (2.3)$$

$$\sigma_z(r, 0) = 0, \quad q^\pm(r, 0) = 0 \quad (r > a) \quad (2.4)$$

Из условия ограниченности контактных напряжений и тепловых потоков при $r = a$ следует

$$\varphi(a) = f(a) = 0 \quad (2.5)$$

Подставим (2.1) в (1.18) и (1.19). После перемены порядка интегрирования и использования формул

$$\int_0^\infty J_0(\xi r) \cos \xi t d\xi = \begin{cases} 0 & (r < t) \\ (r^2 - t^2)^{-1/2} & (r > t) \end{cases}$$

$$\int_0^\infty J_1(\xi r) \cos \xi t d\xi = \begin{cases} 1/r & (t < r) \\ 1/r - t/r(t^2 - r^2)^{-1/2} & (t > r) \end{cases}$$

получим уравнения

$$\psi \frac{d}{dr} r \int_0^r \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} - [\alpha^+(1 + \nu^+) + \alpha^-(1 + \nu^-)] \left[\frac{1}{r} \int_0^a f(t) dt - \frac{1}{r} \int_r^a \frac{f(t) t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right] = \frac{2r}{R} \quad (2.6)$$

$$(\lambda^+ + \lambda^-) \int_r^a \frac{f'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} + \frac{\omega k}{J} r \int_r^a \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} = 0 \quad (0 \leq r < a) \quad (2.7)$$

Умножая (2.6) на r и дифференцируя по r , получим

$$\psi \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} r \int_0^r \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} + [\alpha^+(1 + \nu^+) + \alpha^-(1 + \nu^-)] r \int_r^a \frac{f'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \frac{4r}{R} \quad (2.8)$$

Из равенств (2.7) и (2.8) можно исключить функцию $f(t)$. Тогда

$$\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} r \int_0^r \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} - gr^2 \int_r^a \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \frac{4r}{R\psi} \quad (2.9)$$

$$g = \frac{\omega k [\alpha^+(1 + \nu^+) + \alpha^-(1 + \nu^-)]}{J (\lambda^+ + \lambda^-) \psi}$$

Из уравнения (2.7) находим

$$f(t) = \frac{2\omega k}{\pi J(\lambda^+ + \lambda^-)} \int_t^a \varphi'(\tau) \tau E \left(\sqrt{1 - \frac{t^2}{\tau^2}} \right) d\tau \quad (2.10)$$

Здесь $E(x)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Таким образом, задача свелась к определению функции $\varphi(t)$ из уравнения (2.9), которое можно представить в виде

$$\int_0^r \frac{\varphi''(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} + \frac{\varphi'(0)}{r} - gr \int_r^a \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \frac{4}{R\psi} \quad (2.11)$$

Отсюда можно получить

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2} \varphi'(\tau) - g \left\{ \int_0^\tau \varphi'(t) \tau \left[K\left(\frac{t}{\tau}\right) - E\left(\frac{t}{\tau}\right) \right] dt + \right. \\ & \left. + \int_\tau^a \varphi'(t) t \left[K\left(\frac{\tau}{t}\right) - E\left(\frac{\tau}{t}\right) \right] dt \right\} = \frac{4\tau}{R\psi} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Учитывая соотношение [3]

$$\partial E(x) / \partial x = -[K(x) - E(x)] x^{-1}$$

преобразуем уравнение (2.12) к виду

$$\frac{\pi}{2} \varphi'(\tau) - g \left\{ \tau^2 \int_0^\tau \varphi'(t) \frac{\partial}{\partial \tau} E\left(\frac{t}{\tau}\right) dt - \tau \int_\tau^a \varphi'(t) t \frac{\partial}{\partial \tau} E\left(\frac{\tau}{t}\right) dt \right\} = \frac{4\tau}{R\psi} \quad (2.13)$$

На основании равенств

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \varphi'(t) \frac{d}{d\tau} E\left(\frac{t}{\tau}\right) dt = \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \varphi'(t) E\left(\frac{t}{\tau}\right) dt - \varphi'(\tau) \\ & \int_\tau^a \varphi'(t) t \frac{d}{d\tau} E\left(\frac{\tau}{t}\right) dt = \frac{d}{d\tau} \int_\tau^a \varphi'(t) t E\left(\frac{\tau}{t}\right) dt + \tau \varphi'(\tau) \end{aligned}$$

уравнение (2.13) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \varphi'(\tau) \left(\frac{\pi}{2} + 2g\tau^2 \right) - g \left\{ \tau^2 \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \varphi'(t) E\left(\frac{t}{\tau}\right) dt - \right. \\ & \left. - \tau \frac{d}{d\tau} \int_\tau^a \varphi'(t) t E\left(\frac{\tau}{t}\right) dt \right\} = \frac{4\tau}{R\psi} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Разделив (2.14) на τ и интегрируя по τ в пределах от 0 до $x < a$, получим

$$\int_0^x \frac{\varphi'(\tau)}{\tau} \left(\frac{\pi}{2} + 2g\tau^2 \right) d\tau - g \left\{ \int_0^x \varphi'(t) \left[x E\left(\frac{t}{x}\right) - \int_t^x E\left(\frac{t}{\tau}\right) d\tau \right] dt - \right.$$

$$-\int_x^a \varphi'(t) t E\left(\frac{x}{t}\right) dt - \frac{\pi}{2} \int_0^a \varphi(t) dt \Big\} = \frac{4x}{R\psi} \quad (2.15)$$

Для решения уравнения (2.15) воспользуемся приближенным равенством $E(z) \approx \frac{1}{2}\pi(1 - \frac{1}{4}z^2)$ ($0 \leq z < 1$) и, с учетом (2.5), очевидными соотношениями

$$\int_x^a \varphi'(t) t dt = - \int_0^x \varphi'(t) t dt - \int_0^a \varphi(t) dt$$

$$\int_x^a \frac{\varphi'(t)}{t} dt = - \int_0^x \frac{\varphi'(t)}{t} dt + \int_0^a \frac{\varphi'(t)}{t} dt$$

Тогда уравнение (2.15) принимает вид

$$\left(1 + \frac{g}{4} x^2\right) \int_0^x \frac{\varphi'(t)}{t} dt - g \left(\frac{9}{4} - \frac{4}{\pi}\right) \int_0^x \varphi'(t) t dt +$$

$$+ \frac{g}{2x} \int_0^x \varphi'(t) t^2 dt = \frac{g}{4} x^2 \int_0^a \frac{\varphi'(t)}{t} dt + \frac{8x}{\pi R\psi} \quad (2.16)$$

Полагая

$$\varphi'(t) = \sum_{h=1}^{\infty} c_h t^h \quad (2.17)$$

и подставляя этот ряд в уравнение (2.16), получим следующее выражение для коэффициентов c_h :

$$c_1 = \frac{8}{\pi R\psi}, \quad c_2 = \frac{g}{2} \sum_{h=1}^{\infty} c_h \frac{a^h}{k}$$

$$c_{h+2} = -g c_h \left[\frac{3(k+1)(k+2)}{4k(k+3)} - \frac{9}{4} + \frac{4}{\pi} \right] \quad (h=1, 2, 3, \dots) \quad (2.18)$$

Из (2.18) находим ($g_1 = ga^2$ — безразмерный параметр)

$$c_2 = \frac{1}{2} g a c_1 \left[1 - \frac{1}{3} g_1 \left(\frac{4}{\pi} - \frac{9}{8} \right) + \frac{1}{5} g_1^2 \left(\frac{4}{\pi} - \frac{17}{12} \right) \left(\frac{4}{\pi} - \frac{9}{8} \right) + \dots \right] \left[\left(1 - \frac{1}{4} g_1 + \frac{1}{8} g_1^2 \left(\frac{4}{\pi} - \frac{27}{20} \right) - \frac{1}{12} g_1^3 \left(\frac{4}{\pi} - \frac{27}{20} \right) \left(\frac{4}{\pi} - \frac{81}{56} \right) + \dots \right)^{-1} \right]$$

$$c_3 = -g c_1 \left(\frac{4}{\pi} - \frac{9}{8} \right), \quad c_4 = -g c_2 \left(\frac{4}{\pi} - \frac{27}{20} \right), \dots$$

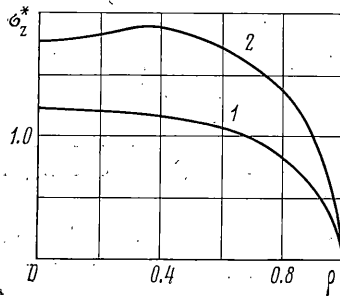
Для определения радиуса a площадки контакта воспользуемся равенством

$$P = -2\pi \int_0^a \sigma_z(r, 0) r dr \quad (2.19)$$

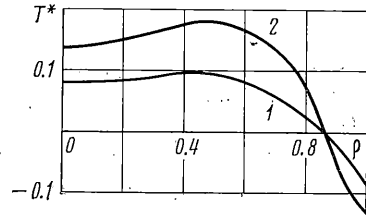
Подставляя в (2.19) выражение (2.2) и учитывая (2.17), получим

$$P = 2\pi \int_0^x \varphi'(t) t dt = 2\pi \sum_{h=1}^{\infty} c_h \frac{a^{h+2}}{k+2} \quad (2.20)$$

Здесь P — сила, действующая на контактирующие тела.



Фиг. 2



Фиг. 3

Ограничиваясь тремя членами в разложении (2.17), можно получить приближенные выражения в области $0 \leq r \leq a$ для контактных напряжений, где $\rho = r/a$

$$\frac{\sigma_z(r, 0)}{c_1 a} = -\sqrt{1-\rho^2} \left\{ 1 + \frac{c_2 a}{2c_1} \left[1 + \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \right) - \frac{g_1}{3} \left(\frac{4}{\pi} - \frac{9}{8} \right) (1+2\rho^2) + \dots \right] \right\} \quad (2.21)$$

Для определения температуры на площадке контакта обратимся к выражениям (1.9) и (2.1). Тогда после простых преобразований получим

$$T(r, 0) = \int_0^r \frac{f(t) dt}{\sqrt{r^2-t^2}} \quad (0 \leq r < a) \quad (2.22)$$

С учетом приближенного равенства $E(z) \approx 1/2\pi(1-1/4z^2)$ и соотношения (2.10) находим

$$f(t) \approx \frac{\omega k}{J(\lambda^+ + \lambda^-)} \left[\frac{3}{4} \int_t^a \varphi'(\tau) \tau d\tau + \frac{t^2}{4} \int_t^a \frac{\varphi'(\tau) d\tau}{\tau} \right] \quad (2.23)$$

Подстановка трех членов разложения (2.17) и (2.23) и использование формулы (2.22) приводит к следующему выражению для безразмерной температуры:

$$T^*(\rho) = T(r, 0) \frac{J(\lambda^+ + \lambda^-)}{\omega k c_1 a^3} \approx \left[\left(\frac{1}{16} - \frac{\rho^3}{3} \right) - g_1 \left(\frac{4}{\pi} - \frac{9}{8} \right) \left(\frac{3}{80} - \frac{28}{225} \rho^3 \right) + \frac{c_2 a}{c_1} \frac{3}{64} + \frac{c_2 a}{c_1 g_1} \frac{\pi}{8} \rho^2 \left(1 - \frac{15}{32} g_1 \rho^2 \right) + \dots \right]$$

На фиг. 2, 3 представлены зависимости безразмерного контактного напряжения $\sigma_z^*(\rho) = \sigma_z(\rho, 0)/c_1 a$ и безразмерной температуры $T^*(\rho) = JT(r, 0)/(\lambda^+ + \lambda^-)(\omega k c_1 a^3)^{-1}$ на площадке контакта от ρ при различных значениях контактно-термического параметра $g_1 = ga^2$. Кривые 1, 2 на фиг. 2, 3 соответствуют значениям $g_1 = 1$, $g_1 = 2$.

Поступила 14 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Коровчинский М. В. Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхностях соприкосновения. В сб.: Контактная прочность машиностроительных материалов. М., «Наука», 1964.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
3. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М., Гостехиздат, 1967.