

$$T = \frac{(I-I_3)I_3}{I(2-I_3I^{-1})^2} \left\{ \frac{4-7I_3I^{-1}+I_3^2I^{-2}}{2[1-C_1 \exp(-2\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} \kappa t)]} - \left[1 - \frac{1}{2} (4-7I_3I^{-1}+I_3^2I^{-2}) \right] \ln[1-C_1 \exp(-2\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} \kappa t)] \right\} \quad (2.5)$$

Окончательным движением будет вращение вокруг оси наибольшего момента инерции.

Автор благодарит Ф. Л. Черноушко за постановку задачи и ценные советы, А. А. Каспарьянца — за полезные обсуждения.

Поступила 9 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноушко Ф. Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
2. Черноушко Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.
3. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1974.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 1. Механика. М., «Наука», 1973.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1974.

УДК 534.1

ЧЕТНЫЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

М. В. ЗАКРЖЕВСКИЙ, Р. И. КОРОЛЕВА

(Даугавпилс)

Вопрос о существовании периодических четных субгармонических колебаний в симметричных системах является дискуссионным. В работах [1,2] принято, что в симметричных нелинейных системах при гармонической вынуждающей силе не могут существовать четные субгармонические режимы. В работах [3-5] указывается на возможность существования таких колебаний на основании приближенных теоретических исследований или экспериментальных наблюдений [6-8]. Очевидно правильное разрешение этого спорного вопроса можно получить, если будут известны точные решения, соответствующие четным субгармоническим колебаниям.

В данной работе рассматриваются точные решения четных субгармонических режимов для колебательной системы с одной степенью свободы с натягом и с кусочно-линейной упругой характеристикой с тремя кусками. Проведено исследование устойчивости этих режимов методом точечных отображений с использованием цифровой вычислительной машины, а также на аналоговой вычислительной машине. Построены области притяжения субгармонических режимов порядка $1/2$. На аналоговой вычислительной машине исследованы также системы с зазором и с упругой характеристикой $f(x) = x + \alpha x^3$ с целью отыскания четных субгармоник и оценки их устойчивости при линейном трении.

1. Уравнение рассматриваемой колебательной системы имеет вид

$$x'' + R(x, x') + f(x) = H(t) = h \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1.1)$$

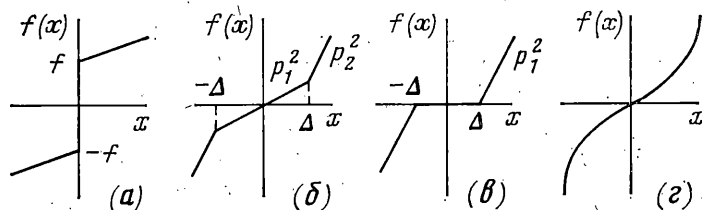
Здесь x — координата колеблющейся единичной массы, $R(x, x')$ — диссипативная сила, $f(x)$ — нелинейная восстанавливающая сила, $H(t)$ — вынуждающая сила, h , ω , φ_0 — амплитуда, частота и фаза вынуждающей силы.

В работе предложены следующие утверждения.

1. В системе без диссипации с симметричной нелинейной восстанавливающей силой $f(x)$ и при симметричной вынуждающей силе $H(t)$ имеют место четные субгармонические режимы в соответствующих частотных диапазонах, причём на каждой

частоте имеется минимум четыре режима (два симметричных относительно полпериода, но несимметричных по перемещению, и два нечетных относительно полпериода, но симметричных по перемещению).

2. Четные субгармонические колебания, не обладающие свойствами симметрии относительно полпериода в системе без диссипации с симметричной восстанавливающей и вынуждающей силой, являются неустойчивыми; четные субгармонические колебания, симметричные относительно полпериода и несимметричные по перемещению, могут быть устойчивыми.



Фиг. 1

3. В системе с малой диссипацией имеет место некоторое искажение законов движения четных субгармонических колебаний по сравнению с законами в системе без диссипации, но число этих режимов сохраняется.

4. В колебательных системах с различными симметричной и несимметричной упругими характеристиками восстанавливающей силы при симметричной вынуждающей силе четные субгармонические колебания могут иметь одинаковую форму закона движения.

Для доказательства этих утверждений проводятся следующие исследования. В системе без диссипации с натягом (фиг. 1, а) и с кусочно-линейной характеристикой с тремя кусками (фиг. 1, б) четные субгармонические колебания определяются точными аналитическими методами.

Для системы с кусочно-линейной упругой характеристикой с тремя кусками исследуется устойчивость в большом четных субгармонических режимов методом точечных отображений [9] с учетом диссипации в виде линейного трения или ударного демпфирования на стыках упругой характеристики. Эти исследования проводятся с использованием цифровой вычислительной машины «Минск-32».

Проводятся также исследования на аналоговой вычислительной машине с целью отыскания субгармонических режимов четного порядка в системе с зазором (фиг. 1, в), а также в системе с упругой характеристикой $f(x) = x + \alpha x^3$ (фиг. 1, г) и анализ их устойчивости.

2. Рассмотрим точные решения субгармонических колебаний в системе без диссипации с натягом и их устойчивость. Примем в уравнении (1.1)

$$R(x, x^*) = 0, \quad f(x) = f \operatorname{sign} x + p_1^2 x \tag{2.1}$$

Для получения решения $x(t)$, по форме соответствующего фиг. 2, а, воспользуемся методом припасовывания [10].

Решение (1.1) на отдельных участках имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= C_{11} \cos p_1 t + C_{12} \sin p_1 t - B + D \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (x_1 \geq 0, 0 \leq t \leq t_1) \\ x_2 &= C_{21} \cos p_1 t + C_{22} \sin p_1 t + B + D \sin(\omega t + \omega t_1 + \varphi_0) \quad (x_2 \leq 0, 0 \leq t \leq t_2) \\ B &= f/p_1^2, \quad D = h(p_1^2 - \omega^2) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Для определения неизвестных параметров $C_{i,j}$ в (2.2), используя условия припасовывания и периодичности $x_1(0) = 0, x_1(t_1) = 0, x_2(0) = 0, x_1(t_1) = x_2(0), x_2(t_2) = 0, x_2^*(t_2) = x_1^*(0), t_1 + t_2 = T = kT_\omega$ ($k = 2, 4, 6, \dots$), получаем

$$\begin{aligned} \sin \frac{\omega t_1}{2} \cos \left(\frac{\omega t_1}{2} + \varphi_0 \right) &= 0, \quad \sin \varphi_0 = \frac{B \sin \frac{1}{2} p_1 (2t_1 - T)}{D \sin \frac{1}{2} p_1 T} \\ C_{11} &= B \left[1 + \frac{\sin \frac{1}{2} p_1 (t_2 - t_1)}{\sin \frac{1}{2} p_1 T} \right], \quad C_{12} = C_{11} \operatorname{tg} \frac{p_1 t_1}{2} \\ C_{21} &= -C_{11} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} p_1 t_1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} p_1 t_2}, \quad C_{22} = C_{11} \operatorname{tg} \frac{p_1 t_1}{2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Первые соотношения (2.3) позволяют определить φ_0 и t_1 , а по остальным соотношениям находятся все неизвестные коэффициенты в законе движения (2.2).

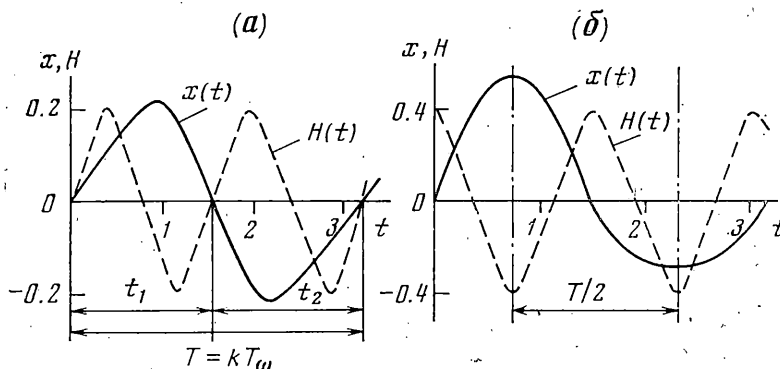
Как следует из (2.3), если $\sin \frac{1}{2}\omega t_1 \neq 0$, то

$$\frac{1}{2}\omega t_1 + \varphi_0 = \frac{1}{2}\pi(2m-1) \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (2.4)$$

Подставив значение φ_0 из (2.4) во второе равенство (2.3), получаем уравнение относительно t_1

$$\pm \cos \frac{\omega t_1}{2} = \frac{B \sin \frac{1}{2}p_1(2t_1 - T)}{D \sin \frac{1}{2}p_1 T} \quad (2.5)$$

Для случая четных субгармонических колебаний уравнение (2.5) имеет четыре корня, удовлетворяющих задаче.



Фиг. 2

Первая пара корней соответствует значениям

$$t_1 = t_2 = \frac{1}{2}T \quad \text{при } \varphi_0 = 0 \text{ или } \varphi_0 = \pi \quad (2.6)$$

Закон движения (2.2) при этом принимает вид

$$x_1 = B \left(\frac{\cos p_1(t - \frac{1}{4}T)}{\cos \frac{1}{4}p_1 T} - 1 \right) + D \sin \omega t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{T}{2} \right) \quad (2.7)$$

$$x_2 = -B \left(\frac{\cos p_1(t - \frac{1}{4}T)}{\cos \frac{1}{4}p_1 T} - 1 \right) + D \sin \omega t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{T}{2} \right)$$

Из решения (2.7) видно, что $x_1(t)$ и $x_2(t)$ несимметричны. На фиг. 2, а изображен пример закона движения (2.7) для системы с параметрами $\varphi_0 = 0$, $p_1^2 = 1$, $f = 1$, $\omega = 4$, $h = 1.328$.

Уравнение (2.5) имеет еще два корня t_1 , сумма значений которых равна T . Например, для системы с приведенными значениями параметров $t_1 = \frac{17}{36}\pi$ при $\varphi_0 = \frac{20}{36}\pi$ и $t_1 = \frac{19}{36}\pi$ при $\varphi_0 = -\frac{20}{36}\pi$.

Заметим, что законы движения, соответствующие этим значениям корней, совпадают с точностью до знака при сдвиге начала отсчета времени на $t = \frac{1}{2}T$ и имеют по две оси симметрии, расстояние между которыми равно половине периода субгармонического режима. Эти оси симметрии совпадают с осями симметрии вынуждающей силы. Закон движения $x(t)$ для первого значения корня показан на фиг. 2, б и имеет вид

$$x_1 = 1.0872 \cos t + 0.9962 \sin t - 0.08855 \sin(4t + \frac{20}{36}\pi) - 1 \quad (0 \leq t \leq \frac{17}{36}\pi)$$

$$x_2 = -0.9129 \cos t - 0.9962 \sin t - 0.08855 \sin(4t + \frac{16}{36}\pi) + 1 \quad (0 \leq t \leq \frac{19}{36}\pi) \quad (2.8)$$

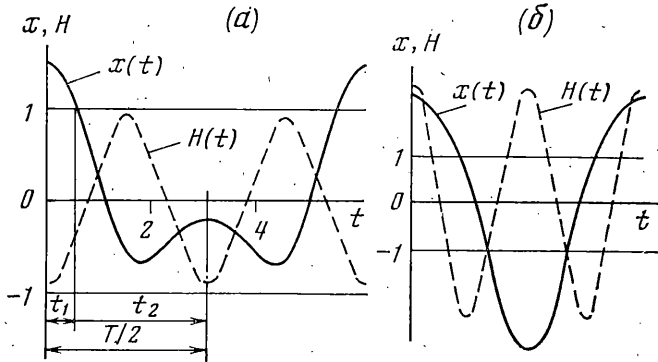
Исследования устойчивости четных субгармонических колебаний в системе с натягом, проведенные на аналоговой вычислительной машине, показали, что законы $x(t)$, симметричные по перемещению (фиг. 2, а), являются неустойчивыми. Форма закона движения с двумя осями симметрии за период (фиг. 2, б) является устойчивой. Устойчивость субгармонического закона движения (2.8) порядка $\frac{1}{2}$ не нарушается, если поглощение энергии вследствие диссипации не превышает за период 2.5% от максимальной энергии колеблющейся массы.

Отметим, что обнаруженная симметрия устойчивых четных субгармонических колебаний позволяет упростить их поиск аналитически, а также на аналоговых и цифровых вычислительных машинах методом припасовывания или методом пристрелки. При этом начало отсчета времени выбирается на одной из осей симметрии при соответствующей фазе вынуждающей силы $\varphi_0 = 1/2\pi$ или $\varphi_0 = 3/2\pi$. В этом случае для отбрасываемого субгармонического режима в системе без диссипации значения скорости $\dot{x}^*(t)$ при $t=0$ и $t=T/2 = kT_0/2$ должны быть равны нулю.

3. Аналитическая зависимость упругой характеристики для системы без диссипации с кусочно-линейной упругой характеристикой из трех кусков имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} p_1^2 x & \text{при } -\Delta \leq x \leq \Delta \\ (p_1^2 - p_2^2)\Delta \operatorname{sign} x + p_2^2 x & \text{при } |x| \geq \Delta \end{cases} \quad (3.1)$$

Найдем точные решения четных субгармоник и исследуем их устойчивость.



Фиг. 3

Как следует из рассмотрения предыдущей системы с натягом, устойчивым четным субгармоническим режимам соответствует форма закона движения, изображенная на фиг. 2, б. Поэтому прежде всего найдем решения указанной формы, т. е. такие, чтобы закон движения $x(t)$ и вынуждающая сила имели общие оси симметрии с расстоянием между ними, равным $1/2T$. К тому же потребуем, чтобы кривая $x(t)$ пересекала прямую $x = \Delta$ один раз за полпериода и не имела пересечений с прямой $x = -\Delta$.

Решение уравнения (1.1) с упругой характеристикой (3.1) на отдельных участках имеет вид

$$x_2 = C_{21} \cos p_2 t + C_{22} \sin p_2 t + B_2 + D_2 \cos \omega t \quad (0 \leq t \leq t_1, \quad x_2 > \Delta)$$

$$x_1 = C_{11} \cos p_1 t + C_{12} \sin p_1 t + D_1 \cos \omega(t + t_1) \quad (0 \leq t \leq t_2, \quad x_1 \leq \Delta)$$

$$D_{1,2} = h / (p_{1,2}^2 - \omega^2), \quad B_2 = \Delta(1 - p_1^2/p_2^2) \quad (3.2)$$

Из условий припасовывания и периодичности $x_2^*(0) = 0$, $x_2(t_1) = \Delta$, $x_1(0) = \Delta$, $\dot{x}_1(t_2) = 0$, $x_2^*(t_1) = x_1^*(0)$, $t_1 + t_2 = 1/2T$ с учетом (3.2) получаем

$$\begin{aligned} C_{11} = \Delta - D_1 \cos \omega t_1, \quad C_{12} = C_{11} \operatorname{tg} p_1 t_2, \quad C_{21} = [p_1^2 p_2^{-2} \Delta - D_2 \cos \omega t_1] \cos^{-1} p_2 t_1, \quad C_{22} = 0 \\ - p_2 [p_1^2 p_2^{-2} \Delta - D_2 \cos \omega t_1] \operatorname{tg} p_2 t_1 + (D_1 - D_2) \omega \sin \omega t_1 - \\ - p_1 (\Delta - D_1 \cos \omega t_1) \operatorname{tg} [(\pi/\omega)k - t_1] = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Определив из последнего соотношения значение t_1 при заданных параметрах системы и вынуждающей силы (или значение h_1 при известном t_1), по остальным соотношениям находим все параметры закона движения.

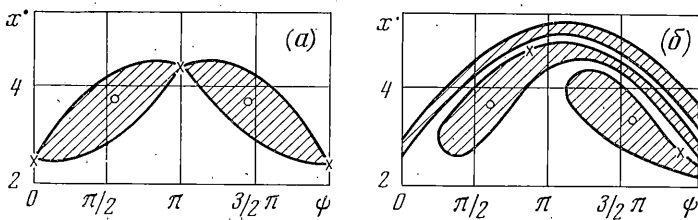
Приведем пример четного субгармонического режима порядка $1/2$, полученного при использовании (3.2) для системы с параметрами $p_1^2 = 1$, $p_2^2 = 2$, $|\Delta| = 1$, $h = -2$, $\omega = 2.1$, $\varphi_0 = 3/2\pi$. Для этих значений в соответствии с последним равенством (3.3) $t_1 = 0.486$ и закон движения (3.2) имеет вид (фиг. 3, а)

$$x_2 = 0.0836 \cos \sqrt{2}t + 0.83 \cos 2.1t + 0.5, \quad x_1 = 0.692 \cos t - 0.51 \sin t + 0.586 \cos 2.1(t + t_1) \quad (3.4)$$

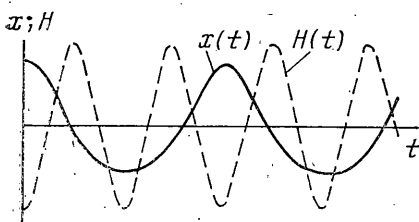
Исследования на аналоговой вычислительной машине показали, что решение (3.4) устойчиво. При этом заметим, что максимальные смещения массы от положения рав-

новесия не одинаковы. Так как закон движения несимметричен по перемещению, то такие субгармонические колебания порядка $1/2$ возможны и в несимметричной системе, что можно считать одним из доказательств возможности существования устойчивых четных субгармоник в симметричных системах. Это также свидетельствует о том, что несимметричная упругая характеристика не является основным фактором существования четных субгармоник, как отмечается в работах [1, 2].

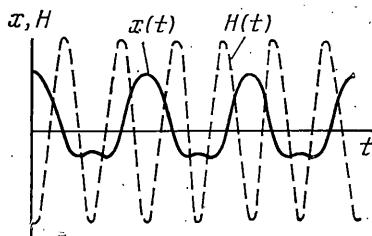
Решения уравнения (1.1) для системы (3.1) без ограничений на смещения, но по форме соответствующие фиг. 2, б и 3, а, отыскивались методом пристрелки на аналоговой вычислительной машине.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

В результате получены устойчивые четные субгармоники; для примера на фиг. 3, б изображена устойчивая субгармоника порядка $1/2$ со следующими параметрами системы: $p_1^2=1$, $p_2^2=2$, $|\Delta|=1$, $h=2$, $\omega=2.495$, $\varphi_0=1/2\pi$.

Для исследования устойчивости в большом и определения областей притяжения субгармонического режима порядка $1/2$ в системе с упругой характеристикой с тремя кусками применен метод точечных отображений [9].

Области притяжения строились на карте начальных условий $\psi=\omega t+\varphi_0$, $x^*(t_i)$ [11], соответствующей моментам времени, когда $x(t_i)=0$ при $x^*(t_i)>0$.

На фиг. 4 показаны некоторые результаты исследования системы с параметрами, соответствующими фиг. 3, б. Фиг. 4, а соответствует системе без диссипации, фиг. 4, б построена для системы с линейным трением, $R(x, x^*)=2nx^*$; $2n=0.001$. Области притяжения субгармонических режимов $1/2$ на фиг. 4 заштрихованы. Такие же результаты получены при учете только ударного демпфирования на стыках упругой характеристики с коэффициентом восстановления скорости 0.999. Устойчивым четным субгармоническим режимам соответствуют отмеченные кружками неподвижные точки типа центр (форма закона движения соответствует фиг. 2, б), неустойчивым — отмеченные крестиками седловые точки с формой закона движения, изображенной на фиг. 2, а.

4. Исследования субгармонических колебаний порядка $1/2$ в системе (1.1) с зазором и в системе с упругой характеристикой типа $f(x)=x+\alpha x^3$ проводились на аналоговой вычислительной машине. В результате обнаружены все четыре субгармонических режима порядка $1/2$, о которых шла речь выше.

В качестве примера на фиг. 5 показан закон движения устойчивого субгармонического режима порядка $1/2$ для системы с зазором при $2n=0$, $p_1^2=1$, $|\Delta|=1$, $h=4$, $\omega=1.8$, $\varphi_0=3/2\pi$. Такой же устойчивый процесс со сдвигом по фазе на π наблюдается при фазе $\varphi_0=1/2\pi$. Потеря энергии порядка 10% за период за счет вязкого трения не нарушает их устойчивости.

На фиг. 6 приведена одна из осциллограмм устойчивого закона движения четной субгармоники в системе (1.1) с упругой характеристикой $f(x)=x+\alpha x^3$, которая аппроксимировалась на АВМ пятью кусками. Параметры системы: $2n=0$, $h=10$, $\omega=3.5$, $\alpha=0.1$, $\varphi_0=3/2\pi$. Как показали исследования, потери энергии за период до 30% не нарушают устойчивости указанного колебания.

Поступила 26 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М., «Мир», 1968.
2. Шилин Б. Б. Свободные и субгармонические колебания в системах с пневматически упругими элементами. Тр. Рижск. ин-та инж. гражд., авиации, 1973, вып. 250.
3. Кэнингхем В. Введение в теорию нелинейных систем. М.—Л., Госэнергоиздат, 1962.
4. Кашлинский И. М. О влиянии демпфирования на субгармонические колебания нелинейных систем. В сб.: Вопросы динамики и прочности, вып. 11. Рига, Изд-во АН ЛатвССР, 1964.
5. Стрекис А. М. Условия существования субгармонических колебаний при вязком демпфировании, В сб.: Вопросы динамики и прочности, вып. 19. Рига, «Зинатне», 1969.
6. Субач А. Взаимодействие сильно нелинейной крутильно-колебательной системы с источником энергии. Изв. АН ЛатвССР, 1962, № 4.
7. Коригынский Я. И. Исследования динамики и конструкций высокопроизводительных веретен. М., Машгиз, 1963.
8. Иорис Ю. И. Субгармонический резонанс в системе с упругими ограничителями хода. Ж. техн. физ., 1946, т. 16, вып. 6.
9. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1972.
10. Вульфсон И. И., Коловский М. З. Нелинейные задачи динамики машин. Л., «Машиностроение», 1968.
11. Закрежевский М. В., Королева Р. И. Исследование субгармонических колебаний в диссипативной системе с квазиупругой релейной характеристикой методом точечных отображений. В сб.: Вибротехника, № 4. Вильнюс, «Минтис», 1973.