МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1976

УДК 531.36

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА С ПЕРЕМЕННЫМИ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ

В. В. КРЕМЕНТУЛО

(Москва)

В рамках аналитической теории управления [1] в работе дано решение задачи об оптимальной стабилизации положения равновесия свободного твердого тела при помощи установленного на нем управляемого гироскопа.

Ниже показано, что при помощи тех же средств возможно осуществить оптимальную (в смысле минимума некоторого функционала) стабилизацию положения равновесия свободного тела, главные моменты инерции которого являются заданными функциями времени. Полученное при этом синтезирующее управление выражается в квадратурах.

1. Рассмотрим свободное тело [2], главные центральные оси инерции которого направлены по осям координат $Ox_1x_2x_3$. Предположим, что главные центральные моменты инерции тела A_1, A_2, A_3 могут изменяться с течением времени. Последнее может быть обусловлено, например, тем, что внутри основной части тела (корпуса) расположены массы, совершающие относительное движение. Будем допускать, что перемещения этих масс сохраняют оси $Ox_1x_2x_3$ главными для тела, изменяя лишь его моменты инерции A_i.

Относительно положительных непрерывных функций $A_i=A_i(t)$ будем предполагать, что они ограничены вместе со своими производными первого порядка, т. е.

$$A_i^*<A_i<A_i^{**}, \quad A_i^{\cdot}/A_i=f_i(t), \quad |f_i|<f_i^* \tag{1.1}$$

На теле установлен уравновешенный гироскоп в кардановом подвесе таким образом, что ось внешнего кольца направлена по оси Ox_1, а неподвижная точка совпадает с центром масс тела O. Гироскоп управляется при помощи трех двигателей, создающих моменты относительно осей внешнего и внутреннего колец и оси ротора.

На основании работы [2] в силу переменности A_i имеем следующие уравнения движения рассматриваемой механической системы (без учета массы карданова подвеса):

$$A_1p_1^{\cdot}=-A_1^{\cdot}p_1+(A_2-A_3)p_2p_3+M_1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.2}$$

$$\alpha_{i1}^{\cdot}=p_3\alpha_{i2}-p_2\alpha_{i3} \quad (i=1,2,3)$$

$$A\alpha^{\cdot}=-(A_1+A)p_1-[(A_2+A)p_2\sin\alpha-(A_3+A)p_3\cos\alpha]\operatorname{tg}\beta+ +G_1+(G_2\sin\alpha-G_3\cos\alpha)\operatorname{tg}\beta$$

$$A\beta^{\cdot}=-(A_2+A)p_2\cos\alpha-(A_3+A)p_3\sin\alpha+G_2\cos\alpha+G_3\sin\alpha$$

$$G_i=\sum h_k\alpha_{ki}, \quad h_i^{\cdot}=0 \quad (i,k=1,2,3)$$

Здесь p_1, p_2, p_3 — проекции мгновенной угловой скорости тела на оси $Ox_1x_2x_3$; A, C — экваториальный и осевой моменты инерции симметричного гироскопа; α — угол поворота внешнего кольца относительно тела; β — угол поворота внутреннего кольца, отсчитываемый от плоскости, перпендикулярной к плоскости внешнего кольца; γ — угол собственного вращения ротора; α_{ik} — направляющие косинусы углов между осями подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ и соответствующими осями инерциальной системы координат $OX_1X_2X_3$; G_1, G_2, G_3 — проекции вектора кинетического момента системы на оси $Ox_1x_2x_3$; h_1, h_2, h_3 — постоянные проекции этого вектора на оси $OX_1X_2X_3$; M_1, M_2, M_3 — моменты, действующие на тело со стороны гироскопа

$$M_1=-u_1,\quad M_2=-u_1\sin\alpha\operatorname{tg}\beta-u_2\cos\alpha+u_3\sin\alpha\sec\beta$$
$$M_3=u_1\cos\alpha\operatorname{tg}\beta-u_2\sin\alpha-u_3\cos\alpha\sec\beta \tag{1.3}$$

u_1, u_2, u_3 — управляющие моменты, создаваемые двигателями.

Будем считать, что рассматриваемая механическая система не подвержена действию внешних сил.

Уравнения движения (1.2) допускают частное решение, соответствующее положению равновесия тела в инерциальном пространстве

$$p_i=0,\quad \alpha_{ik}=1 \text{ при } i=k,\quad \alpha_{ik}=0 \text{ при } i\neq k,\quad u_i=0,\quad \alpha=0,\quad \beta=0 \tag{1.4}$$
$$\gamma^{\bullet}=\gamma_0^{\bullet}=\mathrm{const},\quad G_1=h_1^{\circ}=0,\quad G_2=h_2^{\circ}=0,\quad G_3=h_3^{\circ}=C\gamma_0^{\bullet}\quad (i,k=1,2,3)$$

Для решения задачи стабилизации невозмущенного движения (1.4) введем возмущенное движение p_i, $1+\alpha_{ik}$ $(i=k)$, α_{ik} $(i\neq k)$, u_i, α, β, h_1, h_2, $h_3^{\circ}+h_3$. Тогда на основании (1.2) получим следующие уравнения возмущенного движения:

$$p_i^{\bullet}=-f_i(t)\,p_i+w_i+P_i\quad (i=1,2,3) \tag{1.5}$$
$$\alpha_{ii}^{\bullet}=A_{ii},\quad \alpha_{12}^{\bullet}=-p_3+A_{12},\quad \alpha_{13}^{\bullet}=p_2+A_{13}\quad (1\ 2\ 3)$$
$$A\alpha^{\bullet}=-(A_1+A)p_1-[(A_2+A)p_2\sin\alpha-(A_3+A)p_3\cos\alpha]\operatorname{tg}\beta+h_1+$$
$$+\Sigma(h_k^{\circ}+h_k)\alpha_{k1}+\{[h_2+\Sigma(h_k^{\circ}+h_k)\alpha_{k2}]\sin\alpha-[h_3^{\circ}+h_3+$$
$$+\Sigma(h_k^{\circ}+h_k)\alpha_{k3}]\cos\alpha\}\operatorname{tg}\beta$$
$$A\beta^{\bullet}=-(A_2+A)p_2\cos\alpha-(A_3+A)p_3\sin\alpha+[h_2+\Sigma(h_k^{\circ}+h_k)\alpha_{k2}]\cos\alpha+$$
$$+[h_3^{\circ}+h_3+\Sigma(h_k^{\circ}+h_k)\alpha_{k3}]\sin\alpha,\quad h_i^{\bullet}=0$$

Здесь через w_i обозначены новые управляющие моменты, P_i — невыписанные члены не ниже второго порядка малости относительно p_i, u_i, α, β

$$A_iw_i=-u_i,\quad A_{i1}=p_3\alpha_{i2}-p_2\alpha_{i3}\quad (i=1,2,3)\quad (1\ 2\ 3) \tag{1.6}$$

Поставим следующую задачу [2]: так определить управления w_i, чтобы нулевое решение уравнений (1.5)

$$p_i=0,\quad \alpha_{ik}=0,\quad \alpha=\beta=0,\quad h_i=0\quad (i,k=1,2,3) \tag{1.7}$$

было асимптотически устойчивым по фазовым координатам тела p_i, α_{ik} и при этом выполнялось условие минимума функционала

$$I=\int_0^{\infty}\Omega(t,p_1,p_2,p_3;\alpha_{11},\alpha_{12},\ldots,\alpha_{33};w_1,w_2,w_3,\alpha,\beta)\,dt \tag{1.8}$$

в котором Ω — некоторая определенно-положительная по p_i, α_{ik} функция, которая будет найдена в процессе решения задачи.

2. Решение поставленной задачи основано на применении теорем Н. Н. Красовского [1], В. В. Румянцева [3] об оптимальной стабилизации управляемых движений.

Придерживаясь разработанной методики [2], проведем построение оптимального управления и функции Ω (1.8) в два этапа: сначала рассмотрим «укороченную» систему уравнений возмущенного движения, а затем обобщим полученные результаты на случай полных уравнений (1.5).

Укороченная система уравнений получается из (1.5) отбрасыванием нелинейных членов P_i и описывает изменение фазовых координат тела p_i, α_{ik}

$$p_i^{\bullet}=-f_i(t)p_i+w_i \quad (i=1,2,3) \tag{2.1}$$
$$\alpha_{ii}^{\bullet}=A_{ii}, \quad \alpha_{12}^{\bullet}=-p_3+A_{12}, \quad \alpha_{13}^{\bullet}=p_2+A_{13} \quad (1\ 2\ 3)$$

Фазовые координаты гироскопа α, β здесь не присутствуют.

Для изучения устойчивости нулевого решения системы (2.1)

$$p_i=0, \quad \alpha_{ik}=0 \quad (i,k=1,2,3) \tag{2.2}$$

рассмотрим функцию Ляпунова

$$2V=\Sigma K_i(\alpha_{i1}^2+\alpha_{i2}^2+\alpha_{i3}^2)+\Sigma m_i p_i^2+2p_1\Sigma a_{ik}(t)\alpha_{ik}+$$
$$+2p_2\Sigma b_{ik}(t)\alpha_{ik}+2p_3\Sigma c_{ik}(t)\alpha_{ik} \tag{2.3}$$

и подынтегральную функцию минимизируемого функционала (1.8)

$$\Omega_1=F_1(t,p_1,p_2,p_3)+F_2(t,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{33})+\Sigma n_i w_i^2+\Lambda \tag{2.4}$$

В функциях (2.3), (2.4) K_i, m_i, n_i являются исходными положительными параметрами, через которые будут выражены переменные коэффициенты квадратичных форм $2V$, F_1, F_2. Через Λ обозначены члены не ниже третьего порядка малости.

Согласно теореме Н. Н. Красовского [1] имеем

$$w_i=-\frac{1}{2n_i}\frac{\partial V}{\partial p_i} \quad (i=1,2,3) \tag{2.5}$$

Для функции Ляпунова получаем уравнение в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\Sigma\frac{1}{4n_i}\left(\frac{\partial V}{\partial p_i}\right)^2-\Sigma f_i(t)p_i\frac{\partial V}{\partial p_i}+$$
$$+\left(\frac{\partial V}{\partial\alpha_{32}}-\frac{\partial V}{\partial\alpha_{23}}\right)p_1+\left(\frac{\partial V}{\partial\alpha_{13}}-\frac{\partial V}{\partial\alpha_{31}}\right)p_2+\left(\frac{\partial V}{\partial\alpha_{21}}-\frac{\partial V}{\partial\alpha_{12}}\right)p_3+$$
$$+\Sigma\frac{\partial V}{\partial\alpha_{ik}}A_{ik}+F_1(t,p_1,p_2,p_3)+F_2(t,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{33})+\Lambda=0 \tag{2.6}$$

Подставляя (2.3) в (2.6) и выделяя коэффициенты при одинаковых членах второго порядка $p_i\alpha_{jk}$ $(i,j,k=1,2,3)$, приходим к совокупности линейных дифференциальных уравнений, каждое из которых интегрируется в квадратурах и позволяет определить последовательно все функции $a_{ik}(t)$, $b_{ik}(t)$, $c_{ik}(t)$. Например, $c_{12}(t)$ находится из уравнения

$$c_{12}^{\bullet}-[\lambda_3+f_3(t)]c_{12}=K_1 \quad (\lambda_i=m_i/2n_i)$$

что дает

$$c_{12}=-\frac{K_1}{\lambda_3}\left[1+A_3e^{\lambda_3 t}\int_t\frac{f_3(t)}{A_3(t)}e^{-\lambda_3 t}dt\right]$$

Полагая для простоты $K_i=K$, $m_i=m$, $n_i=n$, $\lambda_i=\lambda$, имеем следующие решения:

$$a_{23}=-a_{32}=-K\lambda^{-1}[1+\delta_1(t,\lambda)]$$

$$b_{13}=-b_{31}=K\lambda^{-1}[1+\delta_2(t,\lambda)],\quad c_{12}=-c_{21}=-K\lambda^{-1}[1+\delta_3(t,\lambda)] \tag{2.7}$$

Функции

$$\delta_i(t,\lambda)=A_i e^{\lambda t}\int_t^\infty \frac{f_i}{A_i}e^{-\lambda t}\,dt \quad (i=1,2,3) \tag{2.8}$$

содержат параметр λ, играющий в дальнейшем важную роль. Нетрудно установить оценку

$$|\delta_i(t,\lambda)|<\frac{L_i}{\lambda}\quad \left(L_i=\frac{A_i^{**}}{A_i^*}f_i^*\right) \tag{2.9}$$

Остальные коэффициенты a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} равны нулю.

Для коэффициентов e_{ik} формы

$$F_1(t,p_1,p_2,p_3)=\Sigma e_{ik}(t)p_ip_k \tag{2.10}$$

находим

$$e_{11}=\lambda^2n+mf_1(t)+2a_{23}(t),\quad e_{22}=\lambda^2n+mf_2(t)+2b_{31}(t)$$

$$e_{33}=\lambda^2n+mf_3(t)+2c_{12}(t),\quad e_{12}=e_{13}=e_{23}=0 \tag{2.11}$$

Форму F_2 и члены Λ следует взять в виде

$$F_2(t,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{33})=K^*[(1+\delta_1)^2(\alpha_{23}-\alpha_{32})^2+$$
$$+(1+\delta_2)^2(\alpha_{31}-\alpha_{13})^2+(1+\delta_3)^2(\alpha_{12}-\alpha_{21})^2]$$

$$(K^*=K^2/4n\lambda^2),\quad \Lambda=-\Sigma(p_1a_{ik}+p_2b_{ik}+p_3c_{ik})A_{ik} \tag{2.12}$$

Поскольку из девяти α_{ik} независимыми являются лишь три [4], условиями знакоопределенности формы F_2 являются неравенства (ε_i — сколь угодно малые строго положительные числа)

$$|\delta_i(t,\lambda)|<1-\varepsilon_i \quad (i=1,2,3) \tag{2.13}$$

С учетом оценки (2.9) условия (2.13) соблюдаются при достаточно большом λ.

Последнее, как легко видеть из найденных решений (2.7), (2.11), обеспечивает также знакоопределенность квадратичных форм (2.3), (2.10).

Окончательно для функции (2.4) и оптимального управления (2.5), (2.3), (2.7) получаем

$$\Omega_1=\Sigma e_{ii}p_i^2+K^*[(1+\delta_1)^2(\alpha_{23}-\alpha_{32})^2+$$
$$+(1+\delta_2)^2(\alpha_{31}-\alpha_{13})^2+(1+\delta_3)^2(\alpha_{12}-\alpha_{21})^2]+\Sigma n_iw_i^2+\Lambda \tag{2.14}$$

$$w_1=-\lambda p_1+Km^{-1}(1+\delta_1)(\alpha_{23}-\alpha_{32}) \quad (1\,2\,3) \tag{2.15}$$

В независимых переменных [5] φ (рысканье), ψ (дифферент), θ (крен), беря за основные оси OX_2 и Ox_3, имеем

$$-w_1=\lambda p_1+\frac{2K}{m}(1+\delta_1)\theta+\ldots \quad (1\,2\,3)\quad (\theta\psi\varphi) \tag{2.16}$$

Многоточие означает члены порядка малости выше первого.

Итак, найденное управление (2.15), (2.16) обеспечивает оптимальную (в смысле минимума функционала (1.8) при подынтегральной функции (2.14)) стабилизацию режима (2.2) по всем фазовым координатам тела p_i, α_{ik} (i, $k=1$, 2, 3) в силу приближенной системы уравнений возмущенного движения (2.1).

Нетрудно установить что построенная функция Ляпунова (2.3), а значит, и управление (2.15), решают задачу оптимальной стабилизации положения равновесия тела (1.8) в силу полных уравнений (1.5) при любых моментах инерции тела $A_i(t)$ (1.1). Это достигается за счет добавления к функции Ω_1 (2.14) слагаемых Ω_2, Ω_3 более высокого порядка малости и проводится в полном соответствии с предыдущими исследованиями [2, 3].

3. *Пример*. Рассмотрим основное тело с постоянными моментами инерции $A_1°$ $A_2°$, $A_3°$, по главной оси инерции Ox_1 которого совершает колебательное движение по закону $x_1=l\sin\omega t$ материальная точка массы m. Изучаемую механическую систему можно рассматривать как тело с теми же главными осями инерции $Ox_1x_2x_3$, моменты инерции относительно которых являются переменными $A_1=A_1°$, $A_2(t)=A_2°+mx_1^2$, $A_3(t)=A_3°+mx_1^2$. Примем, что $A_2°=A_3°=5ml^2$, откуда $A_2^*=A_3^*=5ml^2$, $A_2^{**}=A_3^{**}=6ml^2$. Для функций $f_i(t)$ (1.1) имеем

$$f_1=0,\qquad f_2(t)=f_3(t)=\frac{ml^2\omega\sin 2\omega t}{A_2°+ml^2\sin^2\omega t},\qquad f_2^*=f_3^*=\frac{ml^2\omega}{A_2°}=0.2\omega$$

Постоянные величины L_i (2.9) получаются равными $L_2=L_3=0{,}24\omega$, откуда $|\delta_j(t,\lambda)|<0.24\omega\lambda^{-1}(j=2,3)$. С другой стороны, из (2.13), полагая $\varepsilon_2=\varepsilon_3=0.04$, находим $|\delta_j(t,\lambda)|<0.96\,(j=2,3)$.

Сравнивая последние два неравенства, получаем оценку нижней грани параметра λ в виде $\lambda\geqslant0.25\omega$.

Естественно, что параметр λ, являющийся коэффициентом в управлении (2.15), следует выбирать тем бо́льшим, чем больше частота ω колебаний материальной точки.

Кроме того, нижняя грань параметра λ устанавливается также из условий знакоопределенности форм (2.3), (2.10) $\lambda\geqslant\lambda^*$; окончательно находим $\lambda\geqslant\max\{\lambda^*;\ 0{,}25\omega\}$.

Из $\lambda\geqslant0.25\omega$ и $\lambda\geqslant\lambda^*$ окончательно находим $\lambda\geqslant\max\{\lambda^*,\ 0.25\omega\}$. Оценка $\lambda\geqslant\lambda^*$ имеет место в любой задаче стабилизации движения твердого тела [2,4], оценка же $\lambda\geqslant0.25\omega$ обусловлена спецификой задачи стабилизации при переменных моментах инерции тела, рассмотренных в данном примере.

Поступила 10 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн.: Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4. М., «Наука», 1966.
2. *Крементуло В. В., Соколова Л. Е.* Об оптимальной стабилизации твердого тела при помощи управляемого гироскопа. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4.
3. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
4. *Крементуло В. В.* Об оптимальной стабилизации твердого тела с неподвижной точкой при помощи маховиков. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
5. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.