

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ

Д. Д. ЛЕЩЕНКО

(Одесса)

В работе [1] исследовано движение твердого тела, обладающего динамической симметрией и несущего подвижную материальную точку, прикрепленную при помощи упругой связи к точке на оси симметрии. В данной работе рассматривается задача о движении вокруг центра инерции динамически несимметричного твердого тела, несущего подвижную массу, соединенную с телом посредством упругой связи с вязким трением. Применяется схема осреднения по движению Эйлера — Пуансо, предложенная Ф. Л. Черноушко в [2]. Как частный случай, изучается движение динамически симметричного свободного твердого тела с подвижной точечной массой, прикрепленной к точке на оси симметрии в экваториальной плоскости центрального эллипсоида инерции.

1. Рассмотрим движение динамически несимметричного твердого тела вокруг центра инерции, к которому в точке O_1 , расположенной на одной из главных осей инерции, прикреплена при помощи упругой связи точка массы m .

Начало декартовой системы координат, связанной с твердым телом, располагается в центре инерции C системы, состоящей из тела и подвижной массы, а орты системы e_1, e_2, e_3 направлены так, что орт e_3 совпадает с осью, на которой расположена точка O_1 . Тогда радиус-вектор точки O_1 $\rho = \rho e_3$, причем, не нарушая общности, примем $\rho > 0$.

Если при исследовании движения твердого тела ограничиться условиями, при которых можно учитывать лишь вынужденные движения точки m относительно тела, пренебрегая ее свободными колебаниями, то, согласно [1], имеем

$$\Omega^2 \gg \lambda \gg 1, \quad \Omega^2 = c/m, \quad \lambda = \delta/m \quad (1.1)$$

Здесь c — жесткость упругой связи соединения подвижной точки m с точкой O_1 твердого тела, δ — коэффициент вязкого трения.

При указанных предположениях уравнение движения твердого тела с тензором инерции I_c^* и подвижной массы записывается в векторной форме (см. (3.11) работы [1])

$$I_c^* \cdot \omega' + (\omega \times I_c^* \cdot \omega) = \Phi(\omega) + O(\Omega^{-4}, \lambda^2 \Omega^{-6}) \quad (1.2)$$

После вычисления вектор-функции Φ по схеме [1] для рассматриваемой задачи уравнение (1.2) в проекциях на оси e_1, e_2, e_3 выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1 \omega_1' + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= -\rho^2 m \{ \Omega^{-2} \omega_2 \omega_3 (A_1 \omega_1^2 + B_1 \omega_2^2 + C_1 \omega_3^2) + \\ &+ \lambda \Omega^{-4} \omega_1 [\omega_2^2 (L_1 \omega_1^2 + M_1 \omega_2^2 + N_1 \omega_3^2) + \omega_3^2 (R_1 \omega_1^2 + S_1 \omega_3^2)] \} \\ I_2 \omega_2' + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 &= -\rho^2 m \{ \Omega^{-2} \omega_3 \omega_1 (A_2 \omega_2^2 + C_2 \omega_3^2 + B_2 \omega_1^2) + \\ &+ \lambda \Omega^{-4} \omega_2 [\omega_3^2 (L_2 \omega_2^2 + M_2 \omega_3^2 + N_2 \omega_1^2) + \omega_1^2 (R_2 \omega_2^2 + S_2 \omega_1^2)] \} \\ I_3 \omega_3' + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= -\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} \omega_3^3 I_1^{-1} I_2^{-1} \times \\ &\times (I_1 + I_3 - I_2) (I_2 + I_3 - I_1) [(I_1 - I_3) I_2^{-1} \omega_1^2 + (I_2 - I_3) I_1^{-1} \omega_2^2] \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь I_i ($i=1,2,3$) — главные моменты инерции твердого тела. Коэффициенты A_j, B_j, \dots ($j=1,2$) в правых частях системы (1.3) представляют собой определенные выражения, составленные из I_i . Ввиду громоздкости этих выражений, в статье они не приводятся. Заметим, что при $I_1 = I_2$ система (1.3) сводится к системе (5.5) работы [1], полученной для динамически симметричного тела с подвижной массой на оси симметрии.

Согласно (1.1), в уравнениях движения (1.3) величины $\Omega^{-2}, \lambda \Omega^{-4}$ — малые параметры. Предполагаем, что они одного порядка ϵ .

Для решения задачи воспользуемся методом осреднения [3] по движению Эйлера — Пуансо в форме, предложенной в работе Ф. Л. Черноушко [2].

Погрешность осредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ϵ на интервале времени, за который тело совершит $\sim \epsilon^{-1}$ оборотов.

Примем, не нарушая общности, $I_1 > I_2 > I_3$. Рассмотрим движение при условии $2TI_1 \geq \Gamma^2 \geq 2TI_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось, вокруг которой момент инерции I_1 — наибольший. В последнем неравенстве $T = 1/2 (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2)$ — кинетическая энергия тела, $\Gamma^2 = I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2$ — квадрат величины кинетического момента.

Введем функцию

$$k_2 = \frac{(I_2 - I_3)(2TI_1 - \Gamma^2)}{(I_1 - I_2)(\Gamma^2 - 2TI_3)} \quad (0 \leq k \leq 1) \quad (1.4)$$

Значение $k=0$ соответствует вращению вокруг оси с моментом инерции I_1 , значение $k=1$ — движению по сепаратрисе.

Используя (1.3), (1.4), выразим производные $d\Gamma^2/dt$, dk^2/dt через ω_1 , ω_2 , ω_3 , Γ , T . Затем выразим функции ω_1 , ω_3 из выражений для T и Γ^2 через Γ , T , ω_2 , а T — через Γ и k^2 с помощью (1.4). После этих преобразований получим систему вида

$$\frac{d\Gamma^2}{dt} = \varepsilon f_1(\Gamma, k^2, \omega_2), \quad \frac{dk^2}{dt} = \varepsilon f_2(\Gamma, k^2, \omega_2) \quad (1.5)$$

где функции f_1 , f_2 — многочлены шестой степени относительно ω_2 . Заметим, что функция k^2 так же как Γ^2 и T , является медленно меняющейся переменной. Поэтому следуя методу осреднения, в первом приближении в (1.5) подставляем функцию $\omega_2(t)$ из невозмущенного движения Эйлера — Пуансо [4] с периодом τ

$$\omega_2 = \left[\frac{2TI_1 - \Gamma^2}{I_2(I_1 - I_2)} \right]^{1/2} \operatorname{sn} \left[\frac{t - t_0}{\tau} 4K(k); k \right] \quad (1.6)$$

После исключения T в (1.6) при помощи (1.4) правые части (1.5) осредняются по периоду τ движения Эйлера — Пуансо.

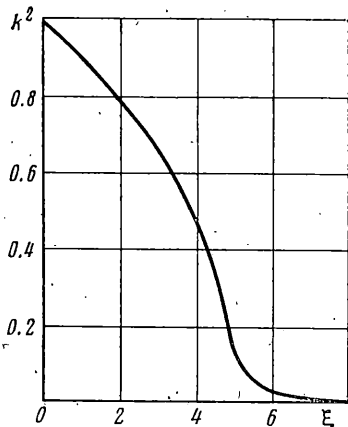
Используя формулы для интегралов от эллиптических функций [5], получим систему осредненных уравнений в виде

$$\frac{d\Gamma^2}{dt} = - \frac{2\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} \Gamma^6}{[I_1(I_2 - I_3) + I_3(I_1 - I_2)k^2]^3} \left[a + bk^2 + dk^4 - \frac{E(k)}{K(k)}(a + gk^2 + hk^4) \right] \quad (1.7)$$

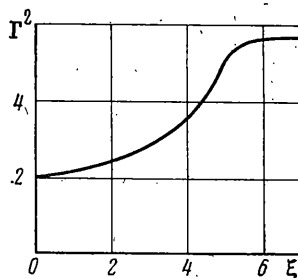
$$\frac{dk^2}{dt} = - \frac{2\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} \Gamma^4}{[I_1(I_2 - I_3) + I_3(I_1 - I_2)k^2]^2} \left[l + nk^2 + pk^4 + rk^6 - \frac{E(k)}{K(k)}(l + sk^2 + uk^4 + vk^6) \right]$$

Здесь a, b, \dots — вполне определенные выражения, содержащие I_i , они не приводятся из-за громоздкости; $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода.

Эволюция квадрата величины кинетического момента является отличительной особенностью данной задачи, в то время как в случае динамически симметричного тела с



Фиг. 1



Фиг. 2

подвижной точечной массой, прикрепленной на оси симметрии [1], $\Gamma^2 = \text{const}$.

Введем $\xi = 2\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} t$ и найдем численно на ЭВМ для $\xi \geq 0$ решение системы (1.7) при начальных условиях $k^2(0) = 0.99$, $\Gamma^2(0) = 2$. Значение $k^2(0) = 0.99$ соответствует движению, близкому к переходу через сепаратрису. Принимаем, кроме того, $I_1 = 3$, $I_2 = 2$, $I_3 = 1$. На фиг. 1, 2 изображены графики функций k^2 , Γ^2 , полученные в результате численного интегрирования.

Как видно из графиков, k^2 монотонно убывает до нуля при ξ , растущем от 0 до ∞ , при этом Γ^2 возрастает от 2 до 5.61497, достигая своего максимального постоянного значения.

Увеличение кинетического момента тела связано с увеличением скорости изменения собственного кинетического момента подвижной массы, которая и обуславливает динамическое воздействие на основное тело.

Случай $2TI_2 \geq \Gamma^2 \geq 2TI_3$, соответствующий траекториям, охватывающим ось наименьшего момента инерции I_3 , рассматривается аналогично, причем для получения решения нужно поменять местами I_1 и I_3 в формулах (1.4), (1.6); (1.7).

Взяв из приведенных графиков значения функций k^2 , Γ^2 при помощи (1.4) или:

$$k^2 = [(I_2 - I_1)(2TI_3 - \Gamma^2)] / [(I_3 - I_2)(\Gamma^2 - 2TI_1)]$$

можно найти изменение энергии T в любом конкретном случае.

Таким образом, получаем описание нелинейного процесса перестройки движения тела при наличии внутренних упругих и диссипативных сил, который представляет собой движение Эйлера — Пуансо с изменяющимися кинетической энергией и величиной кинетического момента. Характерное время этого процесса $\sim 1/2 \Omega^4 \rho^2 m \lambda$. Движение тела стремится к вращению вокруг оси наибольшего момента инерции I_1 .

2. В качестве частного случая исследуем движение вокруг центра инерции тела, обладающего динамической симметрией и несущего подвижную точку m , которая соединена упругой связью с точкой O_1 , расположенной в отличие от [1] не на оси динамической симметрии, а в экваториальной плоскости центрального эллипсоида инерции. Орт e_1 декартовой системы координат, связанной с твердым телом, совпадает с осью, на которой расположена точка прикрепления подвижной массы.

Уравнение для вектора ω в проекциях на оси с ортами e_1, e_2, e_3 можно получить, следуя [1], или из (1.3) циклической перестановкой $I_1, I_2, I_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, полагая при этом $I_1 = I_2 = I$.

В результате, с использованием всех допущений п. 1, уравнения запишутся следующим образом:

$$I\omega_1' + (I_3 - I)\omega_2\omega_3 = -\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} (1 - I_3 I^{-1}) (I_3 I^{-1} - 2)\omega_1^3 \omega_3^2 \quad (2.1)$$

$$I\omega_2' + (I - I_3)\omega_3\omega_1 = -\rho^2 m \{ \Omega^{-2} \omega_1 \omega_3 [(-4 + 3I_3 I^{-1})(\omega_1^2 + \omega_2^2) + (-4 + 6I_3 I^{-1} - 4I_3^2 I^{-2} + I_3^3 I^{-3})\omega_3^2] + \lambda \Omega^{-4} (1 - I_3 I^{-1}) \omega_2 \omega_3^2 \times \\ \times [-2I_3 I^{-1} \omega_1^2 + (2 - 3I_3 I^{-1})\omega_2^2 - I_3 I^{-1} (2 - I_3 I^{-1})^2 \omega_3^2] \}$$

$$I_3 \omega_3' = -\rho^2 m \{ \Omega^{-2} \omega_2 \omega_1 [\omega_2^2 + (6 - 12I_3 I^{-1} + 7I_3^2 I^{-2})\omega_3^2 + \omega_1^2] + \\ + \lambda \Omega^{-4} (1 - I_3 I^{-1}) [\omega_3 \omega_1^2 (2\omega_2^2 + 2(2 - 3I_3 I^{-1})(1 - I_3 I^{-1})\omega_3^2 + \omega_1^2) + \\ + \omega_3 \omega_2^2 (\omega_2^2 + I_3 I^{-1} (6 - 5I_3 I^{-1})\omega_3^2)] \}$$

Задача решается методом осреднения [3]. Первые интегралы невозмущенной системы ($\varepsilon = 0$) в рассматриваемом случае являются медленными переменными. Выполняя процедуру осреднения по периоду движения Эйлера в случае динамической симметрии [4], для производных по времени от медленных переменных с учетом (2.1) получим

$$\omega_3' = -\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} \kappa \omega_3 [1 + 1/2 \omega_3^2 (2 - I_3 I^{-1})^2], \quad \kappa = (I - I_3) I^{-1} I_3^{-1} \quad (2.2)$$

$$\Gamma^2 = 0, \quad T' = -\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} (1 - I_3 I^{-1})^2 \omega_3^2 [1 + 1/2 \omega_3^2 (4 - 7I_3 I^{-1} + I_3^2 I^{-2})]$$

Обратим внимание на то, что в первом приближении для рассматриваемого тела $\Gamma^2 = \text{const}$. Интегрирование первого уравнения (2.2) дает

$$\omega_3^2 = \frac{2 C_1 \exp(-2\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} \kappa t)}{(2 - I_3 I^{-1})^2 1 - C_1 \exp(-2\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} \kappa t)} \quad (2.3)$$

Из равенства (2.3), в котором C_1 — произвольная постоянная, видно, что при $I > I_3$ с ростом t величина ω_3^2 убывает. Если $I < I_3$, то ω_3^2 возрастает. В случае полной симметрии тела при $I = I_3$ имеем $\omega_3^2 = \text{const}$.

Согласно уравнениям, определяющим ориентацию вектора Γ относительно твердого тела

$$I\omega_1 = \Gamma \sin \theta \cos \varphi, \quad I\omega_2 = \Gamma \sin \theta \sin \varphi, \quad I_3 \omega_3 = \Gamma \cos \theta \quad (2.4)$$

Применяя выводы о характере изменения ω_3 , полученные из анализа (2.3), из (2.4) следует, что с ростом t при $I > I_3$ $\cos \theta$ убывает и поэтому $\theta \rightarrow 1/2\pi$. При $I < I_3$ $\cos \theta$ возрастает и $\theta \rightarrow 0$.

Таким образом, во всех случаях ось кинетического момента твердого тела Γ в системе координат, связанной с телом, приближается к оси наибольшего момента инерции.

Изменение кинетической энергии определяется из третьего уравнения (2.2) с учетом (2.3)

$$T = \frac{(I-I_3)I_3}{I(2-I_3I^{-1})^2} \left\{ \frac{4-7I_3I^{-1}+I_3^2I^{-2}}{2[1-C_1 \exp(-2\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} \kappa t)]} - \left[1 - \frac{1}{2} (4-7I_3I^{-1}+I_3^2I^{-2}) \right] \ln[1-C_1 \exp(-2\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} \kappa t)] \right\} \quad (2.5)$$

Окончательным движением будет вращение вокруг оси наибольшего момента инерции.

Автор благодарит Ф. Л. Черноушко за постановку задачи и ценные советы, А. А. Каспарьянца — за полезные обсуждения.

Поступила 9 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноушко Ф. Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
2. Черноушко Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.
3. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1974.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 1. Механика. М., «Наука», 1973.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1974.

УДК 534.1

ЧЕТНЫЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

М. В. ЗАКРЖЕВСКИЙ, Р. И. КОРОЛЕВА

(Даугавпилс)

Вопрос о существовании периодических четных субгармонических колебаний в симметричных системах является дискуссионным. В работах [1, 2] принято, что в симметричных нелинейных системах при гармонической вынуждающей силе не могут существовать четные субгармонические режимы. В работах [3-5] указывается на возможность существования таких колебаний на основании приближенных теоретических исследований или экспериментальных наблюдений [6-8]. Очевидно правильное разрешение этого спорного вопроса можно получить, если будут известны точные решения, соответствующие четным субгармоническим колебаниям.

В данной работе рассматриваются точные решения четных субгармонических режимов для колебательной системы с одной степенью свободы с натягом и с кусочно-линейной упругой характеристикой с тремя кусками. Проведено исследование устойчивости этих режимов методом точечных отображений с использованием цифровой вычислительной машины, а также на аналоговой вычислительной машине. Построены области притяжения субгармонических режимов порядка $1/2$. На аналоговой вычислительной машине исследованы также системы с зазором и с упругой характеристикой $f(x) = x + \alpha x^3$ с целью отыскания четных субгармоник и оценки их устойчивости при линейном трении.

1. Уравнение рассматриваемой колебательной системы имеет вид

$$x'' + R(x, x') + f(x) = H(t) = h \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1.1)$$

Здесь x — координата колеблющейся единичной массы, $R(x, x')$ — диссипативная сила, $f(x)$ — нелинейная восстанавливающая сила, $H(t)$ — вынуждающая сила, h , ω , φ_0 — амплитуда, частота и фаза вынуждающей силы.

В работе предложены следующие утверждения.

1. В системе без диссипации с симметричной нелинейной восстанавливающей силой $f(x)$ и при симметричной вынуждающей силе $H(t)$ имеют место четные субгармонические режимы в соответствующих частотных диапазонах, причём на каждой