МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1976

УДК 531.383

ИЗМЕРЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ПОВОРОТОВ ПРИ ВЫСТАВКЕ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

А. И. ТКАЧЕНКО

(Киев)

Начальная выставка бесплатформенной инерциальной системы навигации методом векторного согласования состоит в определении ориентации приборного трехгранника бесплатформенной инерциальной системы относительно некоторого опорного трехгранника по результатам измерений векторных величин в проекциях на оси обоих трехгранников. В качестве таких величин могут быть использованы векторные характеристики конечного поворота объекта, несущего бесплатформенную инерциальную систему.

Рассматривается метод одновременного определения проекций вектора, характеризующего конечный поворот объекта за некоторый промежуток времени, на оси приборного и опорного трехгранников с помощью самой бесплатформенной инерциальной системы и функционирующей во время ее выставки гиростабилизированной платформы.

1. Начальная выставка бесплатформенной инерциальной системы навигации предполагает определение или уточнение ориентации блока чувствительных элементов этой системы относительно некоторого опорного координатного трехгранника.

Одним из наиболее эффективных методов начальной выставки инерциальных систем навигации на подвижном основании считается метод векторного согласования. Сущность его состоит в определении взаимной ориентации приборного и опорного координатных трехгранников по результатам измерений не менее чем двух неколлинеарных векторов на оси обоих трехгранников [1]. Известна модификация этого метода, в которой измерения последовательности неколлинеарных векторов используются при формировании управления, обеспечивающего приведение приборного трехгранника или его числового образа в заданное положение [2].

При начальной выставке бесплатформенных инерциальных систем навигации в качестве упомянутых выше измерений векторов может использоваться векторная информация о конечном повороте (изменении ориентации) объекта, с корпусом которого связан блок чувствительных элементов бесплатформенной инерциальной системы.

Изменение углового положения объекта в результате его свободного или управляемого движения на некотором промежутке времени можно представить как поворот вокруг определенной оси на определенный угол θ, удовлетворяющий ограничению $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ [3, 4]. Этому повороту однозначно соответствует вектор конечного поворота, направленный по упомянутой оси и имеющий длину $2\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\theta$. Зная начальное и конечное положение объекта по отношению к опорному трехграннику, принципиально возможно определить проекции соответствующего вектора конечного поворота на оси этого трехгранника. Проекции же названного вектора на оси какого-либо ортогонального трехгранника, связанного с объектом, могут быть найдены путем интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений, в правые части которых входят компоненты вектора угловой скорости объекта [4]. Однако, чтобы избежать вычисления неограниченно возрастающих величин, предпочтительнее вместо вектора конечного поворота рассматривать одинаково с ним или противоположно направленный вектор, имеющий длину $\sin {}^1/_2\theta$. Координаты этого вектора являются компонентами векторной части единичного кватерниона, характеризующего соответствующий конечный поворот, и вместе со скалярной частью этого кватерниона удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений.

Таким образом, задача получения векторной информации о конечном повороте объекта сводится к одновременному определению координат векторной части кватерниона, задающего этот поворот, в приборном и опорном базисах. Следует отметить, что отображение упомянутого кватерниона на приборный базис может быть получено с помощью самой бесплатформенной инерциальной системы, в то время как нахождение отображения этого кватерниона на опорный базис требует в общем случае привлечения источников информации, внешних по отношению к бесплатформенной инерциальной системе. Роль такого внешнего источника информации может выполнять, например, гиростабилизированная платформа, воспроизводящая положение опорного трехгранника во время выставки бесплатформенной инерциальной системы.

Пусть на движущемся объекте установлена гиростабилизированная платформа, сохраняющая неизменную ориентацию в инерциальном пространстве. Введем два правых ортогональных координатных трехгранника с вершиной в центре подвеса платформы: опорный трехгранник $\xi\eta\zeta$, неизменно связанный с платформой, и трехгранник $x^*y^*z^*$, связанный с объектом. Ориентацию трехгранника $x^*y^*z^*$ относительно $\xi\eta\zeta$ определим посредством углов Эйлера ψ, ϑ, γ, измеряемых по осям карданова подвеса платформы. Пусть с корпусом объекта, который предполагается недеформируемым, связаны три измерителя угловой скорости, оси чувствительности которых параллельны осям правого ортогонального трехгранника xyz — приборного трехгранника бесплатформенной инерциальной системы. Сигналы этих измерителей поступают в вычислительное устройство бесплатформенной инерциальной системы и используются при вычислении параметров ориентации объекта путем решения соответствующих кинематических уравнений. Будем считать, что точность измерения углов Эйлера и точность, с которой по сигналам измерителей угловой скорости может быть найдено решение кинематических уравнений вращательного движения объекта, выше точности, с которой известна взаимная ориентация трехгранников $x^*y^*z^*$ и xyz. (В противном случае имело бы смысл определение ориентации трехгранника xyz относительно $\xi\eta\zeta$ путем сложения преобразований без использования векторной информации.)

Необходимо, используя измеренные значения углов Эйлера и показания измерителей угловой скорости, находить одновременно проекции векторной части кватерниона, характеризующего изменение ориентации объекта, на оси трехгранников $\xi\eta\zeta$ и xyz.

2. Будем рассматривать триаду $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ единичных векторов осей ξ, η, ζ как неизменный ортонормированный базис I в трехмерном векторном пространстве. Через K обозначим триаду единичных векторов осей x^*, y^*, z^*, а через J — триаду единичных векторов осей x, y, z. Областью значений каждого из углов Эйлера, измеряемых по осям подвеса платформы, будем считать всю числовую ось. Пусть в начальный момент времени t_0 и в некоторый последующий момент t получены значения углов Эйлера ψ_0, ϑ_0, γ_0 и ψ, ϑ, γ соответственно. Каждой совокупности измеренных углов Эйлера однозначно соответствует единичный (нормированный) кватернион, компонентами которого в базисе K являются параметры Родрига — Гамильтона, характеризующие положение триады K относительно

триады I. Значения этого кватерниона в моменты t_0 и t обозначим через M и N, а соответствующие значения параметров Родрига — Гамильтона — через m_0, m_1, m_2, m_3 и n_0, n_1, n_2, n_3. Параметры Родрига — Гамильтона связаны с углами Эйлера посредством соотношений, вид которых зависит от способа установки гироплатформы в кардановом подвесе. Запишем эти соотношения в общем виде

$$M=M(\psi_0, \vartheta_0, \gamma_0), \ N=N(\psi, \vartheta, \gamma) \tag{2.1}$$

Заметим, что в соответствии с правилами теории конечных поворотов величины m_0, m_1, m_2, m_3 и n_0, n_1, n_2, n_3 являются также компонентами отображений кватернионов M и N соответственно на базис I [3, 4]

$$M_I=m_0+m_1\mathbf{i}_1+m_2\mathbf{i}_2+m_3\mathbf{i}_3, \quad N_I=n_0+n_1\mathbf{i}_1+n_2\mathbf{i}_2+n_3\mathbf{i}_3 \tag{2.2}$$

Прописная буква в качестве нижнего индекса указывает базис, к которому отнесен кватернион. Согласно теореме о сложении преобразований, заданных кватернионами в одном базисе, имеет место соотношение $N_I= =P_I M_I$. Здесь P — единичный кватернион, характеризующий ориентацию триады K в момент t относительно положения, занимаемого этой триадой в момент t_0. Из приведенного равенства следует

$$P_I(\psi, \vartheta, \gamma, \psi_0, \vartheta_0, \gamma_0)=N_I\overline{M}_I \tag{2.3}$$

Чертой отмечен сопряженный кватернион. Равенству (2.3) соответствуют скалярные выражения, определяющие компоненты p_0, p_1, p_2, p_3 кватерниона P в базисе I

$$p_0=n_0m_0+n_1m_1+n_2m_2+n_3m_3, \quad p_1=n_1m_0-n_0m_1-n_2m_3+n_3m_2 \quad {\scriptstyle (1\,2\,3)} \tag{2.4}$$

Символ (1 2 3) указывает циклическую перестановку индексов, которую нужно выполнить для получения невыписанных выражений.

Найденный по формуле (2.3) кватернион P определяет конечный поворот объекта из положения, занимаемого им в момент t_0, в положение его в момент t. Будем полагать эволюцию объекта на интервале (t_0, t) такой, что векторная часть кватерниона P не равна нулю. Это условие, означающее, что положение объекта в момент t не совпадает с его положением в момент t_0, можно записать в виде $N\neq\pm M$.

3. Введем единичный кватернион Λ, задающий преобразование некоторого неизменного ортонормированного базиса J' в базис J. При движении объекта с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ компоненты λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 кватерниона Λ в базисе J удовлетворяют системе уравнений

$$\lambda_0^{\cdot}=-{}^1/_2(\omega_1\lambda_1+\omega_2\lambda_2+\omega_3\lambda_3), \quad \lambda_1^{\cdot}={}^1/_2(\omega_1\lambda_0+\omega_3\lambda_2-\omega_2\lambda_3) \quad {\scriptstyle (1\,2\,3)} \tag{3.1}$$

Здесь ω_1, ω_2, ω_3 — получаемые от измерителей угловой скорости проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси x, y, z соответственно. Положим

$$\lambda_0(t_0)=1, \ \lambda_1(t_0)=\lambda_2(t_0)=\lambda_3(t_0)=0 \tag{3.2}$$

Тем самым неизменный базис J' отождествляется с положением триады J в момент t_0. Кватернион Λ_J при этом совпадает с отображением кватерниона P на базис J, в чем нетрудно удостовериться, используя теорему о переставимости конечных поворотов [3]. Иными словами, если величины λ_1, λ_2, λ_3, вычисленные в момент t путем интегрирования системы (3.1) с начальными условиями (3.2), рассматривать как координаты некоторого вектора в базисе J, то величины p_1, p_2, p_3, найденные по формулам (2.4), представляют собой координаты того же вектора в базисе I. Длина этого вектора больше нуля, если выполнено условие $N\neq\pm M$, и всегда меньше единицы. Это и есть информация, пригодная для использования при определении ориентации триады J относительно I.

4. Покажем определение кватерниона P_I в конкретном случае установки гироплатформы на объекте. Пусть по осям карданова подвеса платформы измеряются «самолетные» углы, характеризующие ориентацию трехгранника $x^*y^*z^*$ относительно $\xi\eta\zeta$ (рысканье ψ, тангаж ϑ, крен γ [4]). Формулы (2.1), выражающие компоненты кватерниона $N_I(t)$ через соответствующие значения углов Эйлера, в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned}
n_0&=\cos {}^1/_2\psi \cos {}^1/_2\vartheta \cos {}^1/_2\gamma-\sin {}^1/_2\psi \sin {}^1/_2\vartheta \sin {}^1/_2\gamma\\
n_1&=\cos {}^1/_2\psi \cos {}^1/_2\vartheta \sin {}^1/_2\gamma+\sin {}^1/_2\psi \sin {}^1/_2\vartheta \cos {}^1/_2\gamma\\
n_2&=\cos {}^1/_2\psi \sin {}^1/_2\vartheta \sin {}^1/_2\gamma+\sin {}^1/_2\psi \cos {}^1/_2\vartheta \cos {}^1/_2\gamma\\
n_3&=\cos {}^1/_2\psi \sin {}^1/_2\vartheta \cos {}^1/_2\gamma-\sin {}^1/_2\psi \cos {}^1/_2\vartheta \sin {}^1/_2\gamma
\end{aligned}\qquad(4.1)$$

Подставив выражения (4.1) и аналогичные выражения, связывающие параметры m_0, m_1, m_2, m_3 с углами ψ_0, ϑ_0, γ_0, в формулы (2.4), получим

$$\begin{aligned}
p_0=&\cos {}^1/_2(\psi-\psi_0) \cos {}^1/_2(\vartheta-\vartheta_0) \cos {}^1/_2(\gamma-\gamma_0)-\\
&-\sin {}^1/_2(\psi-\psi_0) \sin {}^1/_2(\vartheta+\vartheta_0) \sin {}^1/_2(\gamma-\gamma_0)\\
p_1=&\sin {}^1/_2(\psi+\psi_0) \sin {}^1/_2(\vartheta-\vartheta_0) \cos {}^1/_2(\gamma-\gamma_0)+\\
&+\cos {}^1/_2(\psi+\psi_0) \cos {}^1/_2(\vartheta+\vartheta_0) \sin {}^1/_2(\gamma-\gamma_0)\\
p_2=&\sin {}^1/_2(\psi-\psi_0) \cos {}^1/_2(\vartheta-\vartheta_0) \cos {}^1/_2(\gamma-\gamma_0)+\\
&+\cos {}^1/_2(\psi-\psi_0) \sin {}^1/_2(\vartheta+\vartheta_0) \sin {}^1/_2(\gamma-\gamma_0)\\
p_3=&\cos {}^1/_2(\psi+\psi_0) \sin {}^1/_2(\vartheta-\vartheta_0) \cos {}^1/_2(\gamma-\gamma_0)-\\
&-\sin {}^1/_2(\psi+\psi_0) \cos {}^1/_2(\vartheta+\vartheta_0) \sin {}^1/_2(\gamma-\gamma_0)
\end{aligned}\qquad(4.2)$$

5. Выше принято предположение, что измеренные значения углов Эйлера, изменяясь непрерывно при движении объекта, могут принимать любые вещественные значения. При этом компоненты кватерниона N являются периодическими функциями углов Эйлера с периодом 4π. (Поэтому одному и тому же положению объекта соответствуют два кватерниона, отличающиеся лишь знаком [3].)

На практике по условиям съема углов, характеризующих ориентацию объекта относительно гироплатформы, измеренные значения каждого из этих углов могут быть ограничены областью шириной 2π. В этом случае компоненты кватерниона N, вычисляемые по формулам (2.1), становятся разрывными функциями истинных значений углов ψ, ϑ, γ с периодом 2π. Поскольку упомянутое ограничение измеренных углов сказывается при вычислении кватерниона P по формуле (2.3) и не влияет на процесс интегрирования уравнений (3.1), при значительных эволюциях объекта может оказаться, что векторные части кватернионов P_I и Λ_J представляют собой отображения противоположно направленных векторов.

Чтобы устранить это несоответствие, введем процедуру согласования направлений векторных частей кватернионов P_I и Λ_J. Например, исходя из того, что отображения кватерниона на различные ортонормированные базисы имеют одинаковые скалярные части, будем изменять знаки величин p_1, p_2, p_3 на противоположные, если $p_0\lambda_0<0$. Другой способ согласования направлений состоит в том, что векторным частям кватернионов P и Λ присваивается направление соответствующего вектора конечного поворота [4]. Для этого надлежит заменить P_I и Λ_J кватернионами P_I^* и Λ_J^*, найденными по формулам

$$P_I^*=P_I \operatorname{sign} p_0, \qquad \Lambda_J^*=\Lambda_J \operatorname{sign} \lambda_0 \qquad (5.1)$$

При этом, разумеется, должно выполняться условие $\lambda_0 \neq 0$, т. е. эволюция объекта на интервале (t_0, t) не должна сводиться к повороту вокруг некоторого направления на угол π.

6. Рассмотрим возможность определения проекций векторной части кватерниона P, характеризующего поворот объекта в течение интервала (t_0, t), на оси некоторого подвижного (неинерциального) опорного трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$.

Будем полагать, что во время выставки бесплатформенной инерциальной системы трехгранник $x^\circ y^\circ z^\circ$ отслеживается подвижной гироплатформой, и по осям ее карданова подвеса измеряются эйлеровы углы, определяющие ориентацию трехгранника $x^* y^* z^*$ относительно $x^\circ y^\circ z^\circ$. Обозначим через E ортонормированную триаду, составленную из ортов осей x°, y°, z°, а через F — положение этой триады в момент t_0. Отображения кватернионов M и N, характеризующих ориентацию трехгранника $x^* y^* z^*$ относительно $x^\circ y^\circ z^\circ$ в моменты t_0 и t, на базисы F и E соответственно выражаются через эйлеровы углы по формулам вида (2.1)

$$M_F = M_F(\psi_0, \vartheta_0, \gamma_0), \quad N_E = N_E(\psi, \vartheta, \gamma) \tag{6.1}$$

Обозначим через Ω_E° гиперкомплексное отображение вектора угловой скорости трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$ на базис E; компоненты этого отображения будем считать доступными определению. Через Q обозначим кватернион, задающий преобразование базиса F в E. Компоненты q_0, q_1, q_2, q_3 кватерниона Q в базисе E находятся путем интегрирования кватернионного уравнения

$$Q_E^{\boldsymbol{\cdot}} = {}^1\!/_2 Q_E \Omega_E^\circ, \quad Q_E(t_0) = 1 \tag{6.2}$$

Вспоминая, что кватернион P определяет ориентацию триады K в момент t относительно положения, занимаемого этой триадой в момент t_0, запишем в соответствии с теоремой о переставимости конечных поворотов $P_F M_F = N_F Q_F$. Отсюда, учитывая равенство $Q_F = Q_E$, с помощью преобразования $P_E = \bar{Q}_E P_F Q_E$ находим искомое выражение

$$P_E = \bar{Q}_E (N_F Q_E \bar{M}_F) Q_E = N_E \bar{M}_F Q_E \tag{6.3}$$

Введем обозначение: $S = N_E \bar{M}_F = s_0 + s_1 \mathbf{i}_1 + s_2 \mathbf{i}_2 + s_3 \mathbf{i}_3$. В соответствии с формулой (6.3) компоненты кватерниона P_E вычисляются с использованием выражений

$$s_0 = n_0 m_0 + n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3, \qquad s_1 = n_1 m_0 - n_0 m_1 - n_2 m_3 + n_3 m_2 \quad (1\ 2\ 3)$$

$$p_0 = s_0 q_0 - s_1 q_1 - s_2 q_2 - s_3 q_3, \qquad p_1 = s_0 q_1 + s_1 q_0 + s_2 q_3 - s_3 q_2 \quad (1\ 2\ 3)$$

Компоненты же кватерниона P в базисе J находятся в виде величин λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 путем интегрирования системы уравнения (3.1) с начальными условиями (3.2). Полученные отображения одного и того же кватерниона на базисы E и J могут быть использованы для определения ориентации приборного трехгранника бесплатформенной инерциальной системы относительно подвижного опорного трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$.

Поступила 7 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Липтон А.* Выставка инерциальных систем на подвижном основании. М., «Наука», 1971.
2. *Парусников Н. А.* Некоторые задачи определения ориентации приборных трехгранников. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 6.
3. *Бежко А. П., Бранец В. Н., Захаров Ю. М., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в теории конечного поворота твердого тела. Изв. АН СССР. МТТ, 1971. № 1.
4. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.