МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1976

УДК 531.383

О ФЛУКТУАЦИЯХ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

И. Н. СИНИЦЫН

(Москва)

Рассматриваются флуктуации уравновешенного и неуравновешенного тяжелого гироскопа в кардановом подвесе при конечных углах поворота, вызванные стохастическим флуктуирующим моментом сил по оси подвеса внутреннего кольца. В случае, когда флуктуирующий момент является нормальным белым шумом, с помощью уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова изучены стационарные флуктуации в терминах плотностей вероятностей. Наряду с точным решением проведен приближенный спектрально-корреляционный анализ флуктуаций для нормального широкополосного флуктуирующего момента с произвольной спектральной плотностью на основе метода статистической линеаризации. Изучена устойчивость флуктуаций угла поворота внутреннего кольца по математическому ожиданию. Получены формулы для скоростей систематического дрейфа угла поворота внешнего карданового подвеса. Показано, что найденные результаты могуть быть непосредственно обобщены на случай гироскопа, находящегося в силовом поле, зависящем от угла поворота внутреннего карданового кольца.

1. В [1, 2] изучены резонансные режимы уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе при воздействии малого гармонического возмущающего момента сил по оси подвеса внутреннего кольца. При должной интерпретации упомянутые результаты оказываются справедливыми и для узкополосного стохастического возмущающего момента сил. Известно [3, 4], что наличие широкополосных флуктуаций в гироскопах приводит не только к количественному изменению режимов, но также и к появлению качественно новых. Дадим теорию флуктуаций уравновешенного и неуравновешенного гироскопа в кардановом подвесе при конечных углах поворота колец, вызванных нормальным стационарным флуктуирующим моментом сил по оси подвеса внутреннего кольца.

Рассмотрим классическую систему уравнений движения неуравновешенного гироскопа в кардановом подвесе при конечных углах поворота колец, приняв дополнительно во внимание малый флуктуирующий момент сил и малый момент сил вязкого трения, действующие по внутренней оси карданового подвеса

$$
\begin{gathered}
L^{\cdot}=0,\ L=\alpha^{\cdot}(I_1-I_3\sin^2\beta)+H\sin\beta,\\
I_2\beta^{\cdot\cdot}+I_3\alpha^{\cdot 2}\sin\beta\cos\beta-H\alpha^{\cdot}\cos\beta+\\
+mg\rho\cos\beta=\Xi(t)-N\beta^{\cdot},\\
H^{\cdot}=0,\ H=C_0(\gamma^{\cdot}+\alpha^{\cdot}\sin\beta)\\
I_1=A_0+A_1+A_2,\ I_2=A_0+B_1,\ I_3=A_0+A_1-C_1
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь α, β, γ — углы поворота соответственно внешнего кольца, внутреннего кольца и ротора; A_0 и C_0 — экваториальный и полярный моменты инерции ротора; A_1, B_1, C_1 — главные моменты инерции внутреннего кольца; A_2 — момент инерции внешнего кольца относительно оси его поворота; L — кинетический момент внешнего кольца, внутреннего кольца и ротора относительно оси поворота внешнего кольца; H — собственный кинетический момент ротора относительно оси его поворота; $mg\rho$ — статический момент внутреннего кольца и ротора относительно оси поворота внутреннего кольца; $\Xi(t)$ — малый флуктуирующий момент сил, представляющий собой нормальный стационарный широкополосный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и известной спектральной плотностью $s(\omega)$; N — коэффициент сил вязкого трения; точка — символ дифференцирования по времени t.

Начальные условия для уравнений (1.1) примем детерминированными, а соответствующие начальные количества будем отмечать индексом нуль снизу.

Выполним с уравнениями движения следующие преобразования: учтем два первых интеграла уравнений (1.1): $L=L_0$, $H=H_0$ и перейдем к безразмерному «нутационному времени»: $\tau=nt$, $n^2=H_0^2/I_1I_2$, причем штрихом будем отмечать дифференцирование по τ; наконец, разрешим уравнения относительно старших производных. В результате получим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка для угла поворота внутреннего кольца β

$$\beta''+2\nu\beta'+f(\beta)=\xi(\tau) \tag{1.2}$$

и нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка для угла поворота внешнего кольца α

$$\alpha'=\Omega(\beta), \quad \Omega(\beta)=\mu\frac{l-\sin\beta}{1-c\sin^2\beta} \tag{1.3}$$

В этих уравнениях $\xi(\tau)=I_1H_0^{-2}\Xi(\tau/n)$ — безразмерный флуктуирующий момент сил, представляющий собой нормальный стационарный широкополосный случайный процесс с нулевым математическим и спектральной плотностью

$$s_\xi(\lambda)=I_1^2H_0^{-4}s(\lambda n) \tag{1.4}$$

нелинейная функция $f(\beta)$ определена соотношением

$$f(\beta)=\frac{d}{d\beta}\left[\frac{1}{2}F(\beta)\right], \quad \frac{1}{2}F(\beta)=b\sin\beta+\frac{(l-\sin\beta)^2}{2(1-c\sin^2\beta)} \tag{1.5}$$

$$b=mg\rho I_1H_0^{-2},\ c=I_3I_1^{-1},\ l=L_0H_0^{-1},\ \mu^2=I_2I_1^{-1},\ 2\nu=N\mu^{-1}H_0^{-1} \tag{1.6}$$

Для уравнений (1.2) и (1.3) примем начальные условия

$$\alpha=\alpha_0,\ \beta=\beta_0,\ \alpha'=\alpha_0',\ \beta=\beta_0' \text{ при } \tau=0 \tag{1.7}$$

Уравнения (1.2), (1.3) вместе с начальными условиями (1.7) представляют собой исходную безразмерную стохастическую систему дифференциальных уравнений, описывающих флуктуации неуравновешенного тяжелого гироскопа в кардановом подвесе. Для уравновешенного гироскопа в выражении (1.5) следует принять $b=0$. В случае, когда $H=C_0\gamma^\cdot=\text{const}$ структура уравнений (1.2), (1.3) не изменяется, при этом в обозначениях (1.6) достаточно положить $H_0=C_0\gamma^\cdot$, $I_3=A_0+A_1-C_0-C_1$.

Примем сначала, что флуктуирующий момент в широкой полосе частот представляет собой белый шум с постоянной интенсивностью G. В таком случае

$$s(\omega)={}^1/_2\pi G=\text{const}, \quad s_\xi(\lambda)={}^1/_2\pi GI_1^2H_0^{-4}=\text{const} \tag{1.8}$$

2. Рассмотрим сначала уравнение (1.2) с учетом (1.8). Ему соответствует следующее кинетическое уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова

$$\frac{\partial w}{\partial\tau}=-\beta'\frac{\partial w}{\partial\beta}+2\nu\frac{\partial}{\partial\beta'}(\beta'w)+f(\beta)\frac{\partial w}{\partial\beta'}+r^2\frac{\partial^2w}{\partial\beta'^2}, \quad r^2=\pi s_\xi \tag{2.1}$$

для совместной плотности вероятности $w=w(\beta_0, \beta_0'|\tau, \beta, \beta')$. Функция w обращается в дельта-функцию Дирака в точке (β_0, β_0') вследствие детерминированности начальных условий (1.7) и удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w\, d\beta\, d\beta' = 1$$

Полагая в уравнении (2.1) $\partial w / \partial\tau=0$, придем к стационарному кинетическому уравнению для стационарной совместной плотности вероятности $w^*=w^*(\beta_0, \beta_0'|\beta, \beta')$.

Зная совместную плотность вероятности w, нетрудно по известным формулам [5] определить однократным интегрированием плотности вероятности угла β и угловой скорости β', т. е. функции w_β и $w_{\beta'}$.

3. Можно показать [6], что единственным решением стационарного кинетического уравнения при указанном условии нормировки является функция вида

$$w^*(\beta, \beta')=Q \exp\{-p^2[F(\beta)+\beta'^2]\} \tag{3.1}$$

Здесь $F(\beta)$ — удвоенная эффективная потенциальная энергия, определенная в (1.5)

$$Q=\frac{p}{h\sqrt{\pi}}, \quad p^2=\frac{2\nu}{r^2}=\frac{2\nu}{\pi s_\xi}, \qquad h=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-p^2F(\beta)]d\beta$$

Таким образом, стационарная совместная плотность вероятности непосредственно выражается через полную энергию недемпфированного гироскопа, причем коэффициентом связи служит параметр p, определяющий соотношение сил демпфирования и флуктуирующего момента сил.

Отметим несколько выводов, немедленно следующих из выражения (3.1). Во-первых, β и β' статистически независимы. Во-вторых, β' распределена нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$\sigma_{\beta'}^{*2}={}^1/{}_2p^{-2}=\pi s_\xi/2\nu \tag{3.2}$$

так что

$$w_{\beta'}^*(\beta')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\beta'}^*}\exp\left[-\frac{\beta'^2}{2\sigma_{\beta'}^{*2}}\right] \tag{3.3}$$

В-третьих, в силу (3.1) плотность распределения β принимает вид

$$w_\beta^*(\beta)=h^{-1}\exp[-p^2F(\beta)] \tag{3.4}$$

и, вообще говоря, не является нормальной. Исключение составляет случай, когда нелинейная функция $f(\beta)$ является линейной функцией.

Входящая в выражения плотностей вероятностей эффективная потенциальная энергия ${}^1/{}_2F(\beta)$ для уравновешенного гироскопа подробно изучена в [2], где, в частности, показано, что в плоскости параметров (c, l) можно указать пять областей, которым соответствуют различные графики. Эти области симметричны относительно прямой $l=0$, расположены слева от прямой $c=1$ и отделены одна от другой прямыми $l=\pm1$ и гиперболами $cl=\pm1$. Для неуравновешенного гироскопа, как следует из формул (1.5), эффективная потенциальная энергия имеет добавочную составляющую $b\sin\beta$, пропорциональную параметру b, характеризующему неуравновешенность гироскопа.

Формулы (3.1), (3.3) и (3.4) являются окончательными и дают искомое точное стационарное решение задачи в терминах плотностей вероятностей для координаты β и ее скорости β'.

После того как получены выражения для плотностей вероятностей, можно по известным формулам теории случайных функций вычислить необходимые для каждой конкретной задачи статистические характеристики. Найдем некоторые из них.

Для математических ожиданий и дисперсий имеем следующие выражения:

$$m_\beta^* = h^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \beta \exp[-p^2F(\beta)]\,d\beta, \qquad m_{\beta'}^*=0$$

$$\sigma_\beta^{*2} = h^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} (\beta - m_\beta^*)^2 \exp[-p^2F(\beta)]\,d\beta \tag{3.5}$$

и выражение (3.2). Корреляционный момент связи β и β', как отмечалось выше, равен нулю.

Весьма наглядное геометрическое представление о характере флуктуационных колебаний можно получить на основе теории выбросов [5, 7]. В самом деле вычислим математическое ожидание числа пересечений процессом β уровня $\beta=C$ снизу вверх в единицу времени

$$N_{1\beta}^+(C) = \int_0^{\infty} \beta' w^*\,d\beta' = \frac{Q}{2p^2}\exp\left[-\frac{F(C)}{2p^2}\right] \tag{3.6}$$

Отсюда при $C=m^*_\beta$ приходим к следующей формуле для среднего числа циклов флуктуаций относительно математического ожидания:

$$N_{1\beta}^+(m_\beta^*) = \frac{Q}{2p^2}\exp\left[-\frac{F(m_\beta^*)}{2p^2}\right] \tag{3.7}$$

При этом средний период флуктуаций будет

$$m_T^* = \frac{1}{N_{1\beta}^+(C)} = \frac{2p^2}{Q}\exp\left[\frac{F(C)}{2p^2}\right], \qquad T = 4\int_0^C \frac{dx}{[F(C)-F(x)]^{1/2}} \tag{3.8}$$

Таким образом, стационарные флуктуации слабо демпфированного гироскопа по координате β представляют собой случайные колебания относительно математического ожидания, отдельные циклы которого с максимумом C сходны с циклами свободных недемпфированных колебаний гироскопа, имеющими амплитуду C. Однако при этом от цикла к циклу амплитуды и периоды циклов меняются случайным образом. При этом средние характеристики такого случайного изменения определяются формулами (3.6) – (3.8). Более детальные характеристики выбросов можно получить после вычисления дисперсии числа выбросов, характеристик распределения выбросов по длительности, а также характеристик различных максимумов выбросов [5, 7].

Полученные результаты, как нетрудно видеть, при произвольных значениях определяющих параметров, входящих в эффективную потенциальную энергию, предполагают достаточно большой объем вычислений. Существенные вычислительные преимущества открываются в рамках спектрально-корреляционной теории случайных функций, если воспользоваться каким-либо подходящим методом последовательных приближений. Рассмотрим один из методов последовательных приближений, основанный на использовании метода статистической линеаризации [8, 9].

4. Учитывая нормальность и широкополосность флуктуирующего момента, произведем статистическую линеаризацию нелинейной функции в уравнении (1.2). В результате получим

$$m_\beta''+a_f(m_\beta,\ \sigma_\beta)+2\nu m_\beta'=0,\quad \beta^{\circ\prime\prime}+2\nu\beta^{\circ\prime}+b_f(m_\beta,\ \sigma_\beta)\beta^\circ=\xi(\tau) \qquad (4.1)$$

Здесь m_β — неизвестное математическое ожидание β; $\beta^\circ=\beta-m_\beta$ — центрированная составляющая с неизвестной дисперсией σ_β^2; a_f и b_f — коэффициенты статистической линеаризации нелинейной функции (1.5), определяемые соотношениями

$$a_f(m_\beta,\sigma_\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\exp\left[-\frac{(x-m_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\beta^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(m_\beta+y)\,y\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_\beta^2}\right)dy,\quad b_f=\frac{\partial a_f}{\partial m_\beta} \qquad (4.2)$$

Коэффициенты статистической линеаризации для соответствующих значений определяющих параметров могут быть рассчитаны, если воспользоваться соответствующими графиками, приведенными в [2]. Как будет показано ниже, в ряде интересных случаев упомянутые интегралы вычисляются в конечном виде.

Применяя ко второму уравнению системы (4.1) линейную спектрально-корреляционную теорию [5] и интегрируя полученные уравнения совместно с первым уравнением (4.1) при начальных условиях (1.7), получим математическое ожидание и дисперсию. Функция распределения принимается, как известно из [8, 9], нормальной. Сказанное применимо для изучения как стационарных, так и нестационарных режимов.

Рассмотрим подробнее стационарный случай, когда $m_\beta=m_\beta^*=\mathrm{const}$ и $\sigma_\beta=\sigma_\beta^*=\mathrm{const}$. Эти стационарные значения определяются из следующей конечной системы уравнений:

$$a_f(m_\beta^*,\sigma_\beta^*)=0,\quad \sigma_\beta^{*2}=2s_\xi\int\limits_0^\infty\frac{d\lambda}{[b_f(m_\beta^*,\sigma_\beta^*)-\lambda^2]^2+4\nu^2\lambda^2}=\frac{\pi s_\xi}{2\nu b_f(m_\beta^*,\sigma_\beta^*)} \qquad (4.3)$$

Суждение об устойчивости стационарного режима по математическому ожиданию, получаемое на основе рассмотрения уравнений в вариациях, приводит к следующим неравенствам:

$$\nu>0,\quad b_f(m_\beta^*,\ \sigma_\beta^*)>0 \qquad (4.4)$$

Первое неравенство требует наличия сил демпфирования, а второе требует положительности «эффективного» коэффициента восстановления нелинейной функции (1.5). При отсутствии флуктуирующего момента и сил демпфирования второе неравенство переходит в известное необходимое условие устойчивости стационарного значения угла β для тяжелого гироскопа в кардановом подвесе, полученное в работах [10–13].

В стационарном режиме для дисперсии скорости β' имеем

$$\sigma_{\beta'}^{*2}=2s_\xi\int\limits_0^\infty\frac{\lambda^2d\lambda}{[b_f(m^*_\beta,\sigma_\beta^*)-\lambda^2]^2+4\nu^2\lambda^2}=\frac{\pi s_\xi}{2\nu} \qquad (4.5)$$

Это выражение совпадает с (3.2), полученным на основе точного решения. Следовательно, в рассматриваемой задаче приближенное решение на основе метода статистической линеаризации приводит к правильным как качественным, так и количественным результатам.

До сих пор предполагалось, что флуктуирующий момент является белым шумом. В практических приложениях важное значение имеет задача, когда спектральная плотность флуктуирующего момента широкополосна, но не постоянна. Оказывается, что в таком случае все полученные выше результаты сохраняются, за исключением формул (4.3) и (4.5). Последние должны быть заменены следующими:

$$\sigma_\beta{}^{*2}=2\int_0^\infty \frac{s_\xi(\lambda)\,d\lambda}{q(\lambda, m_\beta{}^*, \sigma_\beta{}^*)}, \qquad \sigma_{\beta'}{}^{*2}=2\int_0^\infty \frac{\lambda^2 s_\xi(\lambda)\,d\lambda}{q(\lambda, m_\beta{}^*, \sigma_\beta{}^*)}$$

$$q(\lambda, m_\beta{}^*, \sigma_\beta{}^*)=[b_f(m_\beta{}^*, \sigma_\beta{}^*)-\lambda^2]^2+4\nu^2\lambda^2 \tag{4.6}$$

Отметим, что точное решение задачи в этом случае на основе кинетического уравнения приводит к весьма значительным вычислительным трудностям.

Теперь, основываясь на соотношениях (4.3), (4.4), проанализируем зависимость $m_\beta{}^*$ и $\sigma_\beta{}^*$ от определяющих параметров гироскопа и интенсивности белого шума.

Случай: $b=c=0$. Имеем $f(\beta)=-l\cos\beta+{}^1/_2\sin 2\beta$ и поэтому

$$\begin{aligned} a_f&=-l\exp(-{}^1/_2\sigma_\beta{}^2)\cos m_\beta+{}^1/_2\exp(-2\sigma_\beta{}^2)\sin 2m_\beta \\ b_f&=l\exp(-{}^1/_2\sigma_\beta{}^2)\sin m_\beta+\exp(-2\sigma_\beta{}^2)\cos 2m_\beta \end{aligned} \tag{4.7}$$

Стационарные значения, условия устойчивости и уравнение для определения дисперсий можно представить в виде

$$\begin{gathered} m_\beta{}^*={}^1/_2\pi,\ l\exp({}^3/_2\sigma_\beta{}^{*2})>1,\quad \sigma_\beta{}^{*2}b_f{}^*={}^1/_2\pi s_\xi\nu^{-1} \\ b_f{}^*=l\exp(-{}^1/_2\sigma_\beta{}^{*2})-\exp(-2\sigma_\beta{}^{*2}) \\ m_\beta{}^*=-{}^1/_2\pi,\quad l\exp({}^3/_2\sigma_\beta{}^{*2})<-1 \end{gathered} \tag{4.8}$$

$$\sigma_\beta{}^{*2}b_f{}^*={}^1/_2\pi s_\xi\nu^{-1},\ b_f{}^*=-l\exp(-{}^1/_2\sigma_\beta{}^{*2})-\exp(-2\sigma_\beta{}^{*2}) \tag{4.9}$$
$$m_\beta{}^*=\arcsin[l\exp({}^3/_2\sigma_\beta{}^{*2})],\ l^2\exp(3\sigma_\beta{}^{*2})<1$$

$$\sigma_\beta{}^{*2}b_f{}^*={}^1/_2\pi s_\xi\nu^{-1},\ b_f{}^*=\exp(-2\sigma_\beta{}^{*2})-l^2\exp(\sigma_\beta{}^{*2}) \tag{4.10}$$

Первые два стационарных значения отвечают случаям, когда плоскости кардановых колец в среднем совпадают, а третье значение существенно зависит от начальных условий за счет параметра l. При отсутствии флуктуаций все три режима переходят в известные детерминированные стационарные режимы [2]. Несложная графическая процедура убеждает в том, что дисперсии, отвечающие стационарным режимам, определяются единственным образом. Формулы (4.7)—(4.10) решают задачу о стационарных флуктуациях уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе при специальном соотношении между моментами инерции $c=0$. Решение является точным только в рамках метода статистической линеаризации.

Случай: $b\neq0$, $c=0$. Этот случай отвечает неуравновешенному тяжелому гироскопу в кардановом подвесе при специальном соотношении $c=0$ между моментами инерции. Опуская промежуточные вычисления, придем к формулам (4.7)—(4.10), если в них положить $l_1=l-b$ вместо l.

Теперь рассмотрим два частных случая в предположении, что флуктуации весьма малы, т. е. $(m_\beta^*/\sigma_\beta^*) \gg 1$. В таком случае выражения (4.2) принимают вид

$$a_f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_{m_\beta}, \qquad b_f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}\right)_{m_\beta}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \beta} = b\cos\beta - r_1 r_2 \cos\beta + c r_1^2 r_2^2 \sin\beta\cos\beta \tag{4.11}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} = -b\sin\beta + r_2(l\sin\beta + \cos 2\beta) - 2cr_1\sin 2\beta\cos\beta +$$

$$+ cr_1^2 r_2^2 \cos 2\beta + c^2 r_1^2 r_2^3 \sin^2 2\beta, \qquad r_1 = l - \sin\beta, \quad r_2^{-1} = 1 - c\sin^2\beta$$

Случай: $b=0$, $c\neq 1$

$$m_\beta^* = {}^1/{}_2\pi, \quad \sigma_\beta^{*2} = \frac{\pi s_\xi}{2\nu b_f^*}, \quad b_f^* = \frac{(l-1)(1-cl)}{(1-c)^2} > 0 \tag{4.12}$$

$$m_\beta^* = -\frac{\pi}{2}, \quad \sigma_\beta^{*2} = \frac{\pi s_\xi}{2\nu b_f^*}, \quad b_f^* = -\frac{(1+l)(1+cl)}{(1-c)^2} > 0 \tag{4.13}$$

$$m_\beta^* = \arcsin l, \quad \sigma_\beta^{*2} = \frac{\pi s_\xi}{2\nu b_f^*}, \quad b_f^* = \frac{1-l^2}{1-cl^2} > 0 \tag{4.14}$$

$$m_\beta^* = \arcsin\left(\frac{1}{cl}\right), \quad \sigma_\beta^{*2} = \frac{\pi s_\xi}{2\nu b_f^*}, \quad b_f^* = \frac{l^2(c^2l^2-1)}{cl^2-1} > 0 \tag{4.15}$$

Полученные формулы полностью решают задачу о малых стационарных флуктуациях уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе.

Случай: $b=l\neq 0$, $c\neq 1$

$$m_\beta^* = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_\beta^{*2} = \frac{\pi s_\xi}{2\nu b_f^*}, \quad b_f^* = \frac{l-1}{1-c} - b - \frac{c(l-1)^2}{(1-c)^2} > 0 \tag{4.16}$$

$$m_\beta^* = -\frac{\pi}{2}, \quad \sigma_\beta^{*2} = \frac{\pi s_\xi}{2\nu b_f^*}, \quad b_f^* = b - \frac{c(l+1)^2}{(1-c)^2} - \frac{l+1}{1-c} > 0 \tag{4.17}$$

$$m_\beta^* = 0, \quad \sigma_\beta^{*2} = \frac{\pi s_\xi}{2\nu b_f^*}, \quad b_f^* = \frac{1-c+cl^2}{(1-c)^2} > 0 \tag{4.18}$$

Первые два режима соответствуют случаям, когда плоскости кардановых колец в среднем совпадают, а третий режим соответствует случаю, когда плоскости колец взаимно перпендикулярны. Заметим, что возможен стационарный режим, отвечающий действительному корню следующего уравнения третьей степени

$$bc^2z^3 - 3bcz + 1 + cb^2 = 0, \quad z = \sin m_\beta^* \tag{4.19}$$

Таковы основные результаты для неуравновешенного гироскопа.

5. Рассмотрим вопрос о систематическом и флуктуационном дрейфе гироскопа. Учитывая w_β и используя правило замены переменной при вычислении закона распределения [5], придем к следующему выражению для плотности распределения угловой скорости $\alpha' = \Omega$:

$$w_\Omega(\Omega, \tau) = w_\beta(\arcsin q_1, \tau)\left|\frac{\partial q_1}{\partial \Omega}\right|(1-q_1^2)^{-1/2}$$

$$q_1 = \frac{\mu - [\mu^2 - 4c\Omega(\mu l - \Omega)]^{1/2}}{2c\Omega} \tag{5.1}$$

В случае стационарных по β флуктуаций, подставляя в (5.1) выражение (3.5), получим

$$w_\Omega^*(\Omega)=\frac{1}{h}\left|\frac{\partial q_1}{\partial\Omega}\right|(1-q_1^2)^{-1/2}\exp[-p^2F(q_1)]$$

Отсюда по известным формулам определяются математическое ожидание и дисперсия угловой скорости

$$m_\Omega^*=\int_{-\infty}^{\infty}\Omega w_\Omega^*d\Omega,\quad \sigma_\Omega^{*2}=\int_{-\infty}^{\infty}(\Omega-m_\Omega^*)^2w_\Omega^*d\Omega$$

Однако непосредственное вычисление статистических характеристик затруднительно из-за нелинейной специфики задачи. Существенные вычислительные преимущества в рамках спектрально-корреляционной теории открываются, если, не теряя нелинейной специфики задачи, произвести статистическую линеаризацию нелинейной функции (1.3),

$$\Omega(\beta)\approx a_\Omega+b_\Omega\beta^\circ,\quad b_\Omega=\frac{\partial a_\Omega}{\partial m_\beta}$$

$$a_\Omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(x)\exp\left[-\frac{(x-m_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right]dx$$

В стационарном режиме флуктуаций по β для математического ожидания и дисперсии имеем

$$m_\alpha=\alpha_0+\Lambda_1^*\tau,\quad \sigma_\alpha^2=\Lambda_2^*\tau,\quad \Lambda_1^*=a_\Omega^* \tag{5.2}$$

$$\Lambda_2^*=b_\Omega^{*2}\int_0^\tau k_\beta^*(u)\,du,\quad a_\Omega^*=a_\Omega(m_\beta^*,\sigma_\beta^*),\quad b^*_\Omega=\frac{\partial a_\Omega^*}{\partial m_\beta^*}$$

где k_β^* — корреляционная функция угла β. Входящие в формулы (5.2) величины Λ_1^* и Λ_2^* по аналогии с дрейфом фазы в статистической радиотехнике удобно назвать соответственно скоростью систематического и флуктуационного дрейфа [4, 14]. Ясно, что условие $a^*_\Omega>0$ будет служить условием возможности систематического дрейфа, а условие

$$\tau_k=\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau k_\beta^*(u)\,du\neq 0 \tag{5.3}$$

в котором τ_k — характерное время корреляции флуктуаций, будет служить условием возможности флуктуационного дрейфа гироскопа. В случае белого шума для корреляционной функции k_β^* имеем выражение

$$k_\beta^*=\frac{\pi s_\xi}{b_f^{*3/2}}\exp(-|u|\sqrt{b_f^*}\cos\eta)\frac{\sin(\eta+|u|\sqrt{b_f^*}\sin\eta)}{\sin 2\eta}$$

$$\cos 2\eta=2\nu^2b_f^{*-1}-1$$

Следовательно, условие (5.3) выполняется, поскольку величина $\tau_k=\pi s_\xi b_f^{*-2}$ всегда отлична от нуля. Напротив, для узкополосного и флуктуирующего момента предел (5.3) не существует, а, значит, флуктуационный дрейф будет отсутствовать.

Вопрос о допустимости использования приближенного расчета на основе метода статистической линеаризации решается следующим образом: если спектральные плотности β и Ω близки по виду при $\lambda\to 0$, то метод статистической линеаризации пригоден и при определении дисперсии α. Если же $s_\beta\to 0$, $\lambda\to 0$, то $s_\Omega(0)\neq 0$, и в таком случае вывод об отсутствии флуктуационного дрейфа будет несправедлив.

Интересно отметить, что если в уравнениях (1.1) ограничиться учетом членов, отвечающих прецессионной теории гироскопов [15], то, как нетрудно проверить, имеют место следующие формулы:

$$m_\beta^*=\beta_0,\quad \sigma_\beta^*=0,\quad m_\alpha=\alpha_0+\frac{mg\rho}{H_0}t$$

$$\sigma_\alpha^2=\frac{2}{H_0^2\cos^2\beta_0}\int\limits_0^t K(t_1)\,(t-t_1)\,dt_1 \qquad (5.4)$$

где $K(t_1)$ — корреляционная функция флуктуирующего момента, соответствующая спектральной плотности $s(\omega)$. В частности, для белого шума скорости систематического и флуктуационного дрейфа будут

$$\Lambda_1^*=mg\rho/H_0,\ \Lambda_2^*=G/H_0^2\cos^2\beta_0$$

Полученные выше формулы могут рассматриваться как существенное развитие формул (5.4) на случай, когда важно учитывать инерцию карданового подвеса и конечность углов поворота кардановых колец.

Отметим, что основные результаты допускают непосредственное обобщение на случай гироскопа в кардановом подвесе, находящегося в силовом поле, зависящем от координаты β [16]. Для этого следует принять для эффективной потенциальной энергии следующее выражение:

$$\frac{1}{2}F(\beta)=b'U(\beta)+\frac{(l-\sin\beta)^2}{2(1-c\sin^2\beta)},\quad b'=I_1H_0^{-2}$$

где $U(\beta)$ — потенциальная энергия гироскопа в силовом поле.

Поступила 20 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Климов Д. М., Филиппов В. А.* О резонансе в существенно нелинейной системе Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 6.
2. *Климов Д. М., Рогачева Л. Н., Филиппов В. А.* Резонансные режимы гироскопа в кардановом подвесе. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.
3. *Ривкин С. С., Свешников А. А.* Вероятностные методы в прикладной теории гироскопов. М., «Наука», 1974.
4. *Синицын И. Н.* Некоторые нелинейные задачи статистической динамики гиромаятниковых акселерометров. Тр. V Международной конференции по нелинейным колебаниям. Киев, Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1970, т. 3.
5. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962.
6. *Lyon R. H.* On the vibration statistics of a randomly excited hard-spring oscillator. J. Acoust. Soc. America, 1960, vol. 32, p. 716–719.
7. *Тихонов В. И.* Выбросы случайных процессов. М., «Наука», 1970.
8. *Казаков И. Е., Доступов Б. Г.* Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1962.
9. *Синицын И. Н.* Методы статистической линеаризации. Автоматика и телемеханика, 1974, № 5.
10. *Четаев Н. Г.* О гироскопе в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
11. *Магнус К.* Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
12. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
13. *Синицын И. Н.* Об усточивости тяжелого гироскопа в специальном кардановом подвесе. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
14. *Малахов А. Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. М., «Наука», 1968.
15. *Ишлинский А. Ю.* Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
16. *Крементуло В. В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе, находящегося в потенциальном силовом поле. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.