

полнителем и современной теорией их расчета, а также с точным решением теории упругости применительно к изгибу толстой изотропной плиты. В результате оказалась подтвержденной достаточная для практики точность простейшего варианта предлагаемой теории и его универсальность. Решен ряд практически важных задач изгиба и устойчивости неоднородных пластин и оболочек. Особое внимание уделено круговым цилиндрическим оболочкам.

УДК 534.061.3.

МАТЕМАТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ ЛГУ СЕМИНАРЫ

Семинары по численным методам механики сплошной среды
под руководством Н. Ф. Морозова, П. Е. Товстика и К. Ф. Черных

11 II 1975. В. Г. Осмоловский (Ленинград) *О решении задачи нестационарной ползучести металлов.*

Предложено решение задачи о нестационарной ползучести металлов, которая в обобщенной постановке сводится к уравнению с сильно монотонным оператором. При неограниченном возрастании времени доказывается стремление решения нестационарной задачи к решению задачи об установившейся ползучести. При определенной гладкости области исследуется гладкость обобщенного решения. Строятся алгоритмы численных методов решения, доказываются их сходимость и дается оценка скорости сходимости. Приведены расчеты для осесимметричной пластины с отверстием и для прямоугольной пластины.

11 II 1975. В. Г. Осмоловский (Ленинград) *Замкнутая система уравнений пластического течения на основе статической модели дислокационной структуры.*

Рассматривается модель статического описания непрерывно распределенной структуры твердого тела на основе тензорной функции распределения элементарных участков дислокационных линий, зависящей от их координат, компонента вектора направления касательной к линии дислокации, вектора Бюргерса и скорости. Первый и второй моменты введенной таким образом функции распределения совпадают с тензором плотности потока соответственно. На основе кинетического уравнения, учитывающего как дальнедействующее, так и контактное взаимодействие дислокаций, проводится последовательный вывод и обоснование замкнутой системы переносных уравнений для описания пластических свойств среды. В частном случае отсутствия источников и стоков подвижных дислокаций одно из переносных уравнений переходит в известный в континуальной теории дислокаций закон сохранения вектора Бюргерса.

29 II 1975. Б. Н. Семенов (Ленинград) *О решении задачи растяжения прямоугольника с симметричными разрезами.*

Построена система кусочно-разностных решений для бесконечной полосы, одна часть которой находится в условиях скользящей заделки, другая свободна от напряжений. С помощью этой системы строится решение линейной задачи растяжения прямоугольника с симметричными разрезами. В окрестности вершины разрезов эта задача рассматривается в геометрически нелинейной постановке. Строится первый член асимптотики решения нелинейной задачи, где коэффициент определяется по известному решению линейной задачи с помощью интеграла Райса.

11 III 1975. Л. Б. Гримзе, И. П. Другов (Ленинград) *Входной язык комплекса программ расчета оболочек вращения (КРОВ).*

В докладе сообщается о комплексе программ КРОВ, реализующих различные алгоритмы и составленных разными авторами. По программам можно рассчитать ортотропные оболочки вращения при осесимметричной деформации в линейной среде винклерового типа. При этом физические и геометрические характеристики оболочки и действующие на нее нагрузки в общем случае представляют собой кусочно-не-

прерывные функции. Решение задач строится также в классе кусочно-непрерывных функций, разрывы которых обусловлены наличием сосредоточенных воздействий, упруго податливых сосредоточенных опор (ребер) и т. п. Излагается разработанный входной язык КРОВ, весьма удобный для задания исходных данных в виде набора функций одной переменной на некотором промежутке, а также сообщается об однопроходном компиляторе, созданном для преобразования программ на входном языке в код машины типа М-20.

18 III 1975. В. С. Клеев (Ленинград) *Применение метода конечных элементов для решения плоских задач теории упругости с разрезами.*

Производится сопоставление различных схем использования метода конечных элементов для определения напряженного состояния в окрестности конца разреза. В первой схеме используется сгущение сетки, во второй к координатным функциям МКЭ добавляются с неопределенным коэффициентом функции, характеризующие особенность, т. е. производится аддитивное выделение особенностей, в третьей найденное вдали от конца разреза гладкое решение продолжается с использованием асимптотической формулы $u = N_1 \sqrt{r} + N_2 r^{3/2} + N_3 r^{5/2} + O(r^{7/2})$ вплоть до разреза. По разработанным программам произведено вычисление. Наиболее точной оказалась третья схема, позволяющая вплоть до разреза вычислить напряжение с точностью до двух знаков.

25 III 1975. М. Ю. Жуков (Ростов-на-Дону) *Устойчивость и ветвление равновесия тонких упругих оболочек вращения.*

Исследуется напряженно-деформированное состояние, определяется асимптотическое значение критических нагрузок и изучается ветвление равновесия тонких неэологических упругих оболочек вращения с гладким и кусочно-гладким меридианом.

1 IV 1975. А. А. Храпков (Ленинград) *Решение одного класса задач о несимметричных трещинах.*

Изложены результаты, полученные для одного класса задач, связанных с трещинами в вершине клина, направление которых не совпадает с биссектрисой. Использование преобразования Меллина приводит к неоднородной задаче сопряжения относительно трансформант напряжений и трансформант разницы перемещений (точнее их радиальных частных производных) на линии надреза. В ряде случаев удается факторизовать матричный множитель в задаче сопряжения и получить решение для искомого трансформант в замкнутой форме. Изложены численные результаты по определению коэффициентов интенсивности напряжений на продолжении надреза от распределенных нагрузок и сосредоточенных сил. Наибольший практический интерес представляют решения задач для трещины с изломом или трещины, выходящей на границу полуплоскости.

8 IV 1975. Н. Н. Афанасенко (Ленинград) *Численные методы решения некоторых краевых задач ползучести судовых конструкций из стеклопластика.*

Исследована ползучесть в случае длительного нагружения. В качестве расчетной модели рассматривалась анизотропная наследственно-упругая среда в линейном приближении. Представлено решение одной из простейших одномерных квазистатических задач — сложный изгиб вязкоупругой балки на упругом основании. Как известно, уравнением подобного типа описывается осесимметричный изгиб цилиндрической оболочки, к аналогичной задаче сводится и расчет плоских перекрытий. Для решения задач применялся разностный метод по времени и координате. Вычисленные алгоритмы разрабатывались как для случая заданной аналитической аппроксимации кривой ползучести (релаксации), так и для экспериментальной кривой, заданной в табличной форме. В случае аналитически заданной кривой ползучести в качестве эталона для приближенных решений использовалось решение, найденное с помощью быстроходящихся рядов Фурье.

15 IV 1975. В. Б. Смирнова (Ленинград) *Устойчивость некоторых классов систем автоматического регулирования с распределенными параметрами.*

Рассматриваются системы регулирования, характеризующиеся наличием звеньев с распределенными и сосредоточенными параметрами и присутствием разрывных

нелинейностей. Математическое описание рассматриваемых систем представляет собой краевую задачу для линейного однородного уравнения параболического типа или линейной однородной гиперболической системы с нелинейными граничными условиями. Для каждой из указанных задач введены понятия обобщенного решения и выявлены условия его существования, а также установлены условия устойчивости стационарного множества в целом. Условия устойчивости сформулированы в виде частных критериев.

30 IV 1975. В. Я. Ривкинд (Ленинград) *Расчет нелинейных течений в несжимаемых средах.*

Рассматриваются некоторые задачи по расчету течения вязкой несжимаемой жидкости. Предложены методы, объединяющие идеи регуляризации уравнений неразрывности (замена несжимаемой среды слабо сжимаемой) и методы проектирования на подпространство соленоидальных функций. Для решения нелинейных уравнений использовались монотонность операторов, имеющая место при малых числах Рейнольдса, и метод срезки неограниченных нелинейностей. Даны характеристики различных разностных схем (явных, неявных, переменных направлений) и оценка их скорости сходимости. Полученные результаты распространены на другие задачи теории нелинейных течений, в частности, на задачи теории ползучести. Приведены расчеты по задачам о движении и массообмене капли в вязкой несжимаемой жидкости, проведенные на основе предложенных разностных схем. В ходе расчетов определена неизвестная граница капли.

14 V 1975. И. П. Другов (Ленинград) *О реализации входного языка в системе (КРОВ) комплекса программ расчета оболочек вращения.*

Показано, что синтаксис входного языка системы КРОВ позволяет использовать однопросмотровый алгоритм трансляции, аналогичный компилятору ЭПОС-АЛГОЛ. Рассматривались возможности повышения эффективности за счет большей простоты входного языка по сравнению с ЭПОС-АЛГОЛом и большей мощности ЦВМ типа М-20 по сравнению с ЦВМ ЭПОС. Представлена структура компилятора системы индикации ошибок, а также система динамического распределения памяти для настройки компилятора и оттранслированной программы по информационным строкам, заполняемым ведущей программой. Эта система позволяет получать рабочие программы, приспособленные для взаимодействия с различными проблемными программами КРОВ.

21 V 1975. В. Л. Фомин (Ленинград) *О реологии полимерных материалов.*

Приведен обзор теоретических работ по данной теме. Рассмотрены физические состояния аморфных полимеров: стеклообразное, высокоэластичное и вязкотягучее. Подробно охарактеризованы большие обратимые деформации полимеров в высокоэластическом состоянии и неравновесные деформации (ползучесть и релаксация) полимеров. При этом показано, как используется принцип суперпозиции в терминах «термодинамического» времени для получения уравнений теории наследственности для изотермических процессов.

9 IX 1975. В. А. Дудников, Н. Ф. Морозов (Ленинград) *О задачах плоской моментной теории упругости для областей с угловыми точками контура.*

Рассмотрено асимптотическое решение уравнений моментной теории упругости вблизи угловых точек, изложены результаты, относящиеся к вычислению главных членов асимптотики решений второй краевой задачи теории упругости для области с прямолинейным разрезом. Рассмотрен вопрос о вычислении коэффициентов интенсивности с использованием формулы Бетти и специально построенных однородных решений. Предложен способ решения задач моментной теории упругости через решение соответствующей классической задачи с помощью тождества Прагера — Синга.

16 IX 1975. М. Г. Сулимов (Ленинград) *О численном решении бигармонического уравнения в области с угловыми точками.*

Излагается численный метод решения краевой задачи для внешности ромба с бигармоническим оператором области, заданными значениями искомой функции

и ее нормальной производной на границе ромба и условием регулярности на бесконечности. Для получения приближенного решения используется метод сеток, примененный к системе, эквивалентной бигармоническому уравнению, в специально построенных координатах с присоединением эквивалентных граничных условий и условия на бесконечности. Преобразование координат задается явными формулами и обеспечивает выполнение условий достаточной гладкости во всей области вплоть до границы, невырожденность во всей области вплоть до границы за исключением угловых точек сгущения с заданными порядками в окрестностях угловых точек и совпадение с полярнологарифмическими координатами вне некоторого круга, содержащего ромб. При этом возможен перенос эквивалентного сеточного условия на бесконечности на границу указанного круга, и задача сводится к системе сеточных уравнений в конечной области. Порядки сгущения координат в окрестности угловых точек выбираются таким образом, что в новых координатах искомая функция оказывается достаточно гладкой. Изложенный метод иллюстрирован результатами численных экспериментов, произведенных на ЭВМ БЭСМ-6.

23 IX 1975. К. Ф. Черных (Ленинград) *Нелинейная плоская деформация изотропного упругого тела.*

Для изотропного упругого материала выводятся основные зависимости при плоской деформации. В качестве отсчетной принимается недеформированная конфигурация. Используется тензор относительных удлинений (кратностей удлинений). Отказ от истолкования функции напряжения позволил получить компактное разрешающее уравнение и два граничных условия для общего нелинейного (геометрически и физически) случая. Получены необходимые для постановки краевых задач статико-геометрические соотношения. Рассмотрено конформное отображение недеформированной области на внутренность единичного круга. Выделен класс материалов, для которых расчет сводится к краевым задачам для пары функций комплексной переменной. В качестве иллюстрации рассмотрена задача Ляме при упругом потенциале Бартенева — Хазановича.

30 IX 1975. И. М. Дунаев (Краснодар) *Проблемы прочности эластомеров.*

Анализируются современные методы расчетов конструкций из эластичных полимеров. Отмечается, что аппарат линейной термовязкоупругости не позволяет дать оценку свойств эластомеров в рабочем диапазоне деформаций (порядка 50–100%). В свою очередь область применения статической классической теории эластомеров ограничена деформациями порядка 30%. Современные феноменологические теории описывают поведение полимеров при больших деформациях, однако константы, входящие в соответствующие упругие потенциалы, не имеют ясного физического смысла, кроме того, при этом не принимается во внимание реальная структура вещества. Предлагается статистическая нелинейная теория упругости эластомеров с учетом элементов их внутренней структуры. Получен обобщенный упругий потенциал, учитывающий энтропийную составляющую и внутреннюю энергию, которая возникает при деформации элементов структуры. Вычисления проведены как для случая быстрой высокоэластичной деформации, так и для малой, но конечной деформации элементов наполнителя, подчиняющихся законам Гука.

14 X 1975. Г. И. Курбатова, Б. Ф. Филиппов (Ленинград) *Численное решение задач неизо термической динамики сорбции — десорбции в недеформируемых пористых средах.*

Приводится математическая модель процесса поглощения малой добавки газозернами сорбента, учитывающая гидродинамику потока, динамику, кинетику и статистику сорбционных процессов. Решение получено численным методом, основанным на расщеплении решения системы и использующем прогонку по пространственным переменным.

28 X 1975. К. П. Иванов (Ленинград) *О вариационно-разностных схемах для уравнения Навье — Стокса в случае произвольной двумерной области.*

Изучается уравнение Навье — Стокса, записанное в форме Гельмгольца для произвольной области с гладкой границей. Строится алгоритм вариационно-разностного решения задачи с использованием полиномов Лагранжа, для которого устанавливается оценка скорости сходимости $O(h)^2$ в норме пространства W_2^2 .

14 XI 1975. Ю. М. Даль (Ленинград) *О сдвиге у вершины равновесной трещины.*

Исследуются особенности распределения главных и наибольших касательных напряжений у вершины трещины в случае плоской деформации и обобщенного плоского напряженного состояния. Определяются плоскости скольжения и их ориентация. Анализируется конфигурация макроскопических областей пластичности. Пластическая деформация у вершины трещины трактуется как необратимый сдвиг смежных атомных рядов. Силы взаимодействия между атомами кристаллической решетки учитываются по схеме Френкеля — Канторовой. Изучается картина сдвигообразования непосредственно около конца разреза, а также по мере удаления от него. Устанавливается влияние параметров решетки на величину перемещения. Показано, что коэффициент интенсивности напряжения имеет основное значение не только для оценки макроскопической прочности квазихрупких материалов, но и для установления особенностей микродеформаций у конца трещины.

25 IX 1975. В. Г. Корнеев (Ленинград) *О численном решении схем метода конечных элементов высоких порядков точности.*

Рассматриваются эллиптические уравнения второго порядка в произвольной двумерной достаточно гладкой области Ω при первом и других краевых условиях. Схемы $K_{h,p}u_h = f_{h,p}$ метода конечных элементов произвольного наперед заданного порядка точности h^p строятся так, что оказываются эквивалентными по спектру пятиточечному разностному аналогу оператора Лапласа. На равномерной ортогональной сетке предполагаются итерационные методы вида $\tau^{-1}B_h(u_h^{k+1} - u_h^k) + K_{h,p}u_h^k = f_{h,p}$, где, например, при первом краевом условии B_h — пятиточечный разностный аналог оператора Лапласа в прямоугольнике, покрывающем Ω ; $K_{h,p}$ — матрица, получаемая добавлением к $K_{h,p}$ определенного числа нулевых строк и столбцов; $f_{h,p}$ — вектор, получаемый добавлением к $f_{h,p}$ определенного числа нулевых элементов.

Показывается, что для получения решения МКЭ с погрешностью ϵ в норме пространства С. Л. Соболева $W_2^1(\Omega)$ требуется $K_p(\epsilon) = O(\ln \epsilon^{-1})$ итераций и $N_p(\epsilon) = O(h^{-2} \ln h^{-1} \ln \epsilon^{-1})$ арифметических действий. На каждом шаге итераций k система алгебраических уравнений с матрицей B_h решается методом быстрого преобразования или методом циклической редукции. С оценкой числа арифметических действий $O(h^{-2} \ln \epsilon^{-1})$ на схемы произвольного порядка точности обобщается также метод Р. П. Федоренко. С использованием полученных результатов по сходимости итерационных методов показывается, что с повышением порядка сходимости схемы МКЭ становятся более экономичными. При использовании описанного выше итерационного процесса в одномерном случае имеем $N_1(\epsilon)N_p^{-1}(\epsilon) \geq c\epsilon^{1/p-1}/\ln \epsilon^{-1}$, где c — абсолютная постоянная.

9 XII 1975. Ю. И. Мещеряков (Ленинград) *Аналитическое исследование структуры упругопластических волн на основе дислокационной модели течения.*

Получено аналитическое решение замкнутой системы уравнений движения, уравнения неразрывности и определяющего уравнения, выведенного из дислокационной модели пластического течения. Решение проведено для двух законов упрочнения материалов: а) величина упрочнения пропорциональна абсолютному значению деформации сдвига; б) величина упрочнения пропорциональна скорости пластической деформации.

Показано, что во втором случае возможно появление осцилляций упругопластического течения между упругим предвестником и пластическим фронтом.