МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1976

УДК 531.383

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ УСРЕДНЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИРОСКОПА С УДАРНЫМ ПОГЛОТИТЕЛЕМ

В. Ф. ЖУРАВЛЕВ, Е. А. ПРИВАЛОВ

(Москва)

Ударный поглотитель колебаний, используемый в технике для борьбы с различного рода вибрациями, применяется также для гашения вынужденных колебаний гироскопа. Задача о движении гироскопа с ударным поглотителем колебаний решалась в [1] методом «припасовывания решений».

В данной работе резонансные колебания гироскопа с ударным поглотителем исследуются методом усреднения. Для различных значений параметров построены амплитудно-частотные характеристики; получено простое условие настройки поглотителя, при выполнении которого обеспечивается наиболее полное гашение колебаний гироскопа.

1. Рассмотрим вынужденные колебания гироскопа в кардановом подвесе с ударным поглотителем колебаний. Ударный поглотитель представляет собой кольцо, одетое с зазором на стержень, который укреплен на кожухе гироскопа. Благодаря направляющей, перпендикулярной стержню, кольцо может двигаться только в плоскости изменения угла поворота гироскопа вокруг внутренней оси подвеса. В линейной постановке система уравнений движения гироскопа с ударным поглотителем имеет вид [1]:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+h_1\frac{d\beta}{dt}=p_1\sin(nt+\varphi) \tag{1.1}$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2}-h_2\frac{d\alpha}{dt}=p_2\cos(nt+\varphi)+L,\qquad \mu\frac{d^2\gamma}{dt^2}=-L$$

Здесь α и β — углы поворотов гироскопа вокруг соответственно внешней и внутренней осей карданова подвеса; угол γ определяет положение поглотителя; t — время; h_1 и h_2 — параметры гироскопа; μ — приведенный момент инерции поглотителя; p_1, p_2 и n — амплитуды и частота моментов внешних сил; L — момент ударной силы; угол φ задает сдвиг фазы внешних сил относительно момента удара. Система характеризуется еще двумя параметрами: зазором, равным $2l$, и коэффициентом восстановления r при соударениях гироскопа и поглотителя. Весом поглотителя пренебрегаем.

Будем изучать вынужденные колебания гироскопа с ударным поглотителем в резонансном случае. Первое уравнение системы (1.1) допускает интегрирование по времени

$$\frac{d\alpha}{dt}=-h_1\beta-\frac{p_1}{n}\cos(nt+\varphi) \tag{1.2}$$

Не ограничивая общности, произвольную постоянную, получающуюся при интегрировании, считаем равной нулю. Подставим выражение (1.2) во второе уравнение системы (1.1). Вводя обозначения: $x=\beta$, $y=\gamma$, $\tau=$

$=t(h_1h_2)^{1/2}$, $\nu=n(h_1h_2)^{-1/2}$, $p=(p_2-p_1h_2n^{-1})(h_1h_2)^{-1}$, $f=L(h_1h_2)^{-1}$ получим систему уравнений в безразмерных переменных

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+x=p\cos(\nu\tau+\varphi)+f, \qquad \mu\frac{d^2y}{d\tau^2}=-f \tag{1.3}$$

Таким образом, задача свелась к изучению прямолинейных колебаний тела с ударным поглотителем. Тело соединено с основанием пружиной, масса тела и жесткость пружины равны единице. Рассматриваются стационарные, резонансные колебания тела и поглотителя $x=x_0(\tau)$, $y=y_0(\tau)$ с частотой внешней силы $p\cos(\nu\tau+\varphi)$, при которых поглотитель дважды за период взаимодействует с телом, ударяясь о левую и правую границу зазора с силой f. Настройка поглотителя, т. е. целесообразный выбор зазора $2l$ и массы μ поглотителя сводит колебания тела к минимуму.

2. Проинтегрируем уравнения системы (1.3) вдоль траектории и, обозначив

$$u=\int_0^\tau x\,d\tau, \qquad \Phi=\int_0^\tau f\,d\tau$$

представим систему (1.3) в виде

$$\frac{du}{d\tau}-x=0, \qquad \frac{dx}{d\tau}+\nu^2u=\frac{p}{\nu}\sin(\nu\tau+\varphi)+\Phi-\Delta u$$

$$\mu\frac{dy}{d\tau}=-\Phi, \qquad \Delta=1-\nu^2 \tag{2.1}$$

Функция Φ — импульс ударной силы — ограниченная, кусочно-постоянная функция времени.

Введем периодические (с периодом, равным $2\pi/\nu$) функции времени: пилообразную функцию времени $\Pi_k(\tau)$, кусочно-постоянную функцию времени $\mathrm{M}_k(\tau)$, функцию $Q_k(\tau)$ и $\delta_k(\tau)$

$$\Pi_k(\tau)=\begin{cases} k[\tau-\pi/2\nu-E(\nu\tau/2\pi)2\pi/\nu] & \text{при} \quad E(\nu\tau/\pi)=2E(\nu\tau/2\pi)\\ -k[\tau-3\pi/2\nu-E(\nu\tau/2\pi)2\pi/\nu] & \text{при} \quad E(\nu\tau/\pi)>2E(\nu\tau/2\pi)\end{cases}$$

$$\mathrm{M}_k(\tau)=d\Pi_k(\tau)/d\tau, \qquad Q_k(\tau)=\Pi_k(\tau)+\delta_k(\tau)/\nu^2$$

$$\delta_k(\tau)=k\{2\delta[\tau-E(\nu\tau/2\pi)2\pi/\nu]-\delta[\tau-E(\nu\tau/\pi)\pi/\nu]\}$$

Здесь E — целая часть аргумента, δ — дельта-функция Дирака. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{du}{d\tau}-x=0, \qquad \frac{dx}{d\tau}+\nu^2u=\int_0^\tau Q_k(\tau)\,d\tau, \qquad \mu\frac{dy}{d\tau}=-\frac{\mathrm{M}_k(\tau)}{\nu^2} \tag{2.2}$$

решение которой запишем в виде

$$u=\frac{a}{\nu}\sin\nu\tau-\frac{b}{\nu}\cos\nu\tau+\frac{1}{\nu^2}\int_0^\tau\Pi_k(\tau)\,d\tau \tag{2.3}$$

$$x=a\cos\nu\tau+b\sin\nu\tau+\frac{\Pi_k(\tau)}{\nu^2}, \qquad y=-\frac{\Pi_k(\tau)}{\mu\nu^2}$$

где a и b — произвольные постоянные.

Функция x, входящая в систему (2.3), имеет ряд свойств функции $x_0(\tau)$, описывающей стационарные колебания тела в точном решении, функция y имеет тот же вид, что и функция $y_0(\tau)$, задающая движение поглотителя. Это служит основанием к тому, чтобы выбрать систему уравнений (2.2) в качестве порождающей для системы уравнений (2.1) и искать решение системы (2.1) в виде (2.3), рассматривая a и b как переменные.

Подставляя выражения (2.3) в систему (2.1) и разрешая первые два из получившихся соотношений относительно переменных a и b, получим систему уравнений

$$\frac{da}{d\tau}=\left\{\frac{p}{\nu}\sin(\nu\tau+\varphi)-\Delta\left[\frac{a}{\nu}\sin\nu\tau-\frac{b}{\nu}\cos\nu\tau+\frac{1}{\nu^2}\int_0^\tau \Pi_k(\tau)\,d\tau\right]+\Phi-\int_0^\tau Q_k(\tau)\,d\tau\right\}\cos\nu\tau \tag{2.4}$$

$$\frac{db}{d\tau}=\left\{\frac{p}{\nu}\sin(\nu\tau+\varphi)-\Delta\left[\frac{a}{\nu}\sin\nu\tau-\frac{b}{\nu}\cos\nu\tau+\frac{1}{\nu^2}\int_0^\tau \Pi_k(\tau)\,d\tau\right]+\Phi-\int_0^\tau Q_k(\tau)\,d\tau\right\}\sin\nu\tau$$

Заменив правые части уравнений (2.4) их средними значениями за период колебаний, придем к системе укороченных уравнений [2]:

$$\frac{da}{d\tau}=\frac{\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi/\nu}\left\{\frac{p}{\nu}\sin(\nu\tau+\varphi)-\Delta\left[\frac{a}{\nu}\sin\nu\tau-\frac{b}{\nu}\cos\nu\tau+\frac{1}{\nu^2}\int_0^\tau \Pi_k(\tau)\,d\tau\right]+\Phi-\int_0^\tau Q_k(\tau)\,d\tau\right\}\cos\nu\tau\,d\tau \tag{2.5}$$

$$\frac{db}{d\tau}=\frac{\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi/\nu}\left\{\frac{p}{\nu}\sin(\nu\tau+\varphi)-\Delta\left[\frac{a}{\nu}\sin\nu\tau-\frac{b}{\nu}\cos\nu\tau+\frac{1}{\nu^2}\int_0^\tau \Pi_k(\tau)\,d\tau\right]+\Phi-\int_0^\tau Q_k(\tau)\,d\tau\right\}\sin\nu\tau\,d\tau$$

Считая, что при стационарных колебаниях соударения происходят в моменты времени $\tau=0$, π/ν, подставим в правые части уравнений системы (2.5) функцию Φ в виде

$$\Phi=\begin{cases}\dfrac{k}{\nu^2} & \text{при } 0\leqslant\tau<\dfrac{\pi}{\nu}\\[2mm] -\dfrac{k}{\nu^2} & \text{при } \dfrac{\pi}{\nu}\leqslant\tau<\dfrac{2\pi}{\nu}\end{cases}$$

и приравняем их нулю. Получим систему уравнений, определяющую параметры стационарных колебаний тела

$$p\sin\varphi=-\Delta b,\quad p\cos\varphi=\Delta a-4k/\pi\nu^3 \tag{2.6}$$

Запишем значения координаты и скорости тела в моменты времени, соответствующие моментам ударов

$$x(0)=a-k\pi/2\nu^3,\quad x(\pi/\nu)=-a+k\pi/2\nu^3 \tag{2.7}$$

$$\frac{dx}{d\tau}\left(\frac{\pi}{\nu}-0\right)=-b\nu+\frac{k}{\nu^2},\quad \frac{dx}{d\tau}\left(\frac{\pi}{\nu}+0\right)=-b\nu-\frac{k}{\nu^2}$$

Скорость поглотителя на отрезке времени $0<\tau<\pi/\nu$ определяется соотношением

$$\varkappa=\frac{\pm 2l+[x(\pi/\nu)-x(0)]}{\pi/\nu}=\frac{2\nu(\pm l+a)}{\nu}+\frac{k}{\nu^2} \tag{2.8}$$

Знаки «плюс» и «минус» соответствуют колебательным процессам, сдвинутым во времени один относительно другого на половину периода π/ν. В дальнейшем в соотношении (2.8) берется знак «плюс».

Теорема о сохранении количества движения в момент удара в рассматриваемом случае имеет вид $-b\nu+k\nu^{-2}+\mu\varkappa=-b\nu-k\nu^{-2}-\mu\varkappa$, отсюда следует

$$\varkappa=-k/\mu\nu^2 \tag{2.9}$$

Согласно гипотезе о коэффициенте восстановления, имеем $r(-b\nu+k\nu^{-2}-\varkappa)=-(-b\nu-k\nu^{-2}+\varkappa)$, отсюда получаем

$$b=\frac{1}{\nu}\left(\frac{r-1}{r+1}\right)\left(\frac{k}{\nu^2}+\varkappa\right) \tag{2.10}$$

Возведем уравнения (2.6) в квадрат и сложим их, учитывая выражения (2.7) — (2.10). Получаем квадратное уравнение относительно a, решение которого записывается в виде

$$a_{1,2}=\frac{\Delta l\pi K_1\pm\pi[(K_1^2+K_2^2)p^2-\Delta^2l^2K_2^2]^{1/2}}{K_1^2+K_2^2}-l \tag{2.11}$$

$$K_1=\Delta\pi-\frac{8\mu}{\pi(\mu+1)},\quad K_2=2\Delta\left(\frac{r-1}{r+1}\right)$$

Определив a, можно найти остальные параметры движения тела и поглотителя. В частности, амплитуда A первой гармоники функции x выражается через величину a в форме

$$A^2=\left\{\frac{a[\pi^2(\mu+1)-8\mu]-8l\mu}{\pi^2(\mu+1)}\right\}^2+\left\{\frac{2(l+a)}{\pi}\left(\frac{r-1}{r+1}\right)\right\}^2 \tag{2.12}$$

Если удар абсолютно упругий ($r=1$), выражение (2.12) принимает вид

$$A_{1,2}=\frac{\pm p[\pi^2(\mu+1)-8\mu]+8l\mu\nu^2}{\Delta^2\pi^2(\mu+1)-8\mu} \tag{2.13}$$

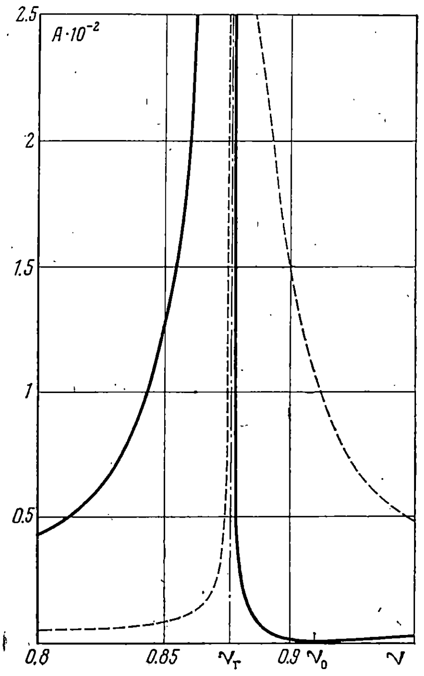
Из соотношений (2.12), (2.13) следует, что при заданном значении амплитуды p и частоты ν возмущающей силы существуют, вообще говоря, два различных колебательных режима.

На фиг. 1 в окрестности резонанса построена амплитудно-частотная характеристика колебаний тела для значения коэффициента восстановления $r=1$ и значения амплитуды возмущающей силы $p=4\cdot10^{-3}$. Эта амплитудно-частотная характеристика имеет разрыв при $\nu_1=[1-8\mu(\mu+1)^{-1}\pi^{-2}]^{1/2}$. На фиг. 2 представлены амплитудно-частотные характеристики колебаний тела для ряда значений p при заданной величине $r=0.7$. Они являются ограниченными функциями частоты. При $p<\Delta lK_1(K_1^2+K_2^2)^{-1/2}$ в окрестности резонансной частоты ν_r существует зона, в которой искомых стационарных колебаний нет. Эта зона расширяется с уменьшением p. Амплитудно-частотные характеристики построены для значений параметров, приведенных в [1].

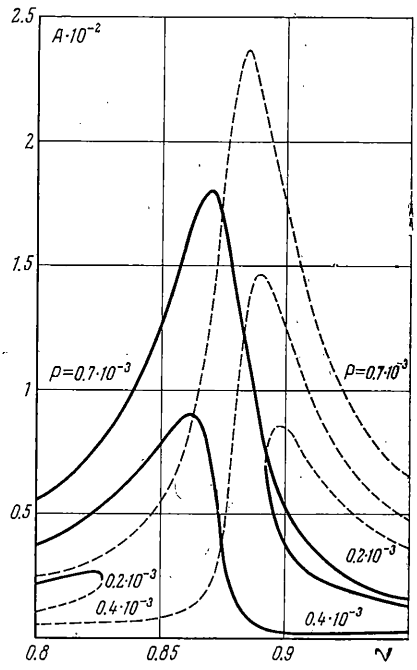
Если $r=1$, амплитуда колебаний тела обращается в нуль в точке ν_0. В этой точке выполнено условие настройки поглотителя

$$p[\pi^2(\mu+1)-8\mu]=8l\mu\nu_0^2 \tag{2.14}$$

Соотношение (2.14) не определяет однозначно параметры поглотителя колебаний. На плоскости параметров μ и l условие настройки представляет



Фиг. 1



Фиг. 2

собой гиперболу. При $r<1$ функция $A(\nu)$ в нуль не обращается. Но, если коэффициент восстановления r близок к единице, эта функция имеет минимум при значениях параметров поглотителя, близких к значениям, удовлетворяющим соотношению (2.14), и условие настройки может быть сохранено.

Таким образом, при выполнении условия (2.14) сводится к минимуму амплитуда первой гармоники колебаний тела и, следовательно, амплитуда первой гармоники колебаний гироскопа по углу β.

Как показывает анализ устойчивости, режим гашения колебаний устойчив в зарезонансной области. На фиг. 1, 2 неустойчивые участки амплитудно-частотных характеристик проведены пунктирными линиями.

Поступила 2 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филатов В. В.* Виброударное гашение вынужденных колебаний гироскопа. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
2. *Булгаков В. В.* Колебания. М., Гостехиздат, 1954.