При изгибе пластин

$$N_r=N_\varphi=0, \quad \varepsilon_{rr}^\circ=0, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^\circ=0, \quad \varkappa_r^\bullet=-\frac{d^2w}{dr^2}, \quad \varkappa_\varphi^\bullet=-\frac{1}{r}\frac{dw^\bullet}{dr}.$$

Моменты M_r и M_φ удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_r)-M_\varphi=\int_0^r pr\,dr$$

Введем безразмерные величины

$$m_r=M_r/M_0, \quad m_\varphi=M_\varphi/M_0, \quad \rho=r/R, \quad p'=pR^2/M_0, \quad W^\bullet=w^\bullet/R, \quad M_0=kh^2/4,$$

$$R\varkappa_{ij}=k_{ij}, \quad \nu=2\eta h/3kR$$

Функционал J при изгибе пластины примет вид

$$J=\int_S\Big[2m_rk_r+2m_\varphi k_\varphi-\nu(k_r^2+k_rk_\varphi+k_\varphi^2)-\frac{2}{3\nu}(m_r^2-m_rm_\varphi+m_\varphi^2)+$$
$$+2\nu\sqrt{{}^1/_3(m_r^2-m_rm_\varphi+m_\varphi^2)}-\sqrt{k_r^2+k_rk_\varphi+k_\varphi^2}-p'W^\bullet\Big]ds \qquad (3.6)$$

Кинематически допустимое поле скоростей перемещений и статически допустимое поле моментов зададим в форме

$$W^\bullet=H(1-\rho^2), \quad m_r=D(1-\rho^2), \quad m_\varphi=D+(p'/2-3D)\rho^2 \qquad (3.7)$$

Подставляя выражения (3.7) в (3.6) и минимизируя функционал по H и D, получим

$$W^\bullet=\frac{p'-4\sqrt{3}}{48\nu}(1-\rho^2), \quad m_r=\frac{7}{32}p'(1-\rho^2), \quad m_\varphi=\frac{p'}{32}(7-3\rho^2)$$

На фигуре пунктирные кривые соответствуют найденным значениям m_r (кривая *1*), m_φ (кривая *2*) и $W^\bullet$ (кривая *3*). Сплошными линиями отмечено соответствующее решение, полученное в [3].

Поступила 2 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
2. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. Изд-во ЛГУ, 1964.
3. *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М., «Мир», 1968.

УДК 539.3

КОНЕЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Н. В. ВАЛИШВИЛИ

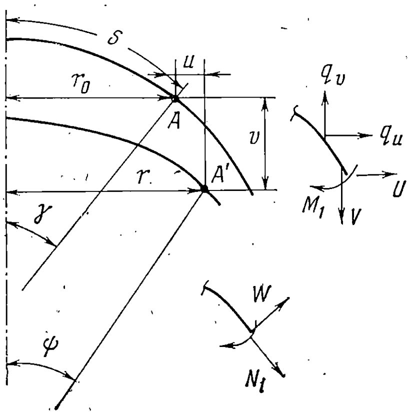
(Кутаиси)

Вопросы расчета непологих оболочек при конечных перемещениях неоднократно рассматривались на примере сферических оболочек. В работах [1, 2] уравнения Рейсснера [3, 4] решались при малых и средних значениях параметра пологости методом конечных разностей. Аналогичные уравнения были использованы для исследования эластики замкнутой сферы в [5, 6].

Уточненный вариант уравнений Рейсснера предложен и рассмотрен в [7]. Уравнения другого вида были получены в [8]. На основании этих уравнений исследованы сферические оболочки с подвижным в радиальном направлении опорным контуром.

Другой вариант уравнений непологих сферических оболочек предложен в [9]. Аналогичные уравнения использовались для установления пределов применимости уравнений пологих оболочек в [10].

Уравнения для численного исследования задач на ЭЦВМ получены в [11]. При этом используются исходные соотношения [3], но они не упрощаются, а уравнения не усложняются. Другой вариант уравнений получен в [12]. Ниже результаты [11] обобщаются на случай ортотропных оболочек переменной толщины, находящихся в температурном поле. Во всех рассмотренных ниже задачах относительные удлинения малы по сравнению с единицей.



Фиг. 1

Проведенные исследования показали, что при малых значениях параметра пологости b все численные алгоритмы обеспечивают получение более или менее согласующихся результатов. Особую трудность представляют исследования оболочек с большими и средними значениями параметра пологости. Для преодоления возникающих при этом трудностей в последнее время развиваются методы, основанные на применении различных вариантов прогонки в сочетании с итерационными процессами [8]. Ниже исследования проводятся с помощью алгоритма [13], модифицированного для решения задач при больших значениях параметра b.

1. Рассмотрим осесимметричные оболочки переменной толщины h, температура которых t меняется как по толщине, так и по меридиану. При этом полагаем, что в заданных пределах изменения t характеристики материала ν_i, E_i, α_i — коэффициент Пуассона, модуль упругости и коэффициент линейного расширения в меридиональном ($i=1$) и кольцевом ($i=2$) направлениях изменяются только вдоль меридиана.

Принимая во внимание, что $\nu_1/E_1=\nu_2/E_2$, получим следующие выражения для нормальных сил и изгибающих моментов:

$$N_1=B_1(\varepsilon_1+\nu_2\varepsilon_2-\beta_1),\quad N_2=B_2(\varepsilon_2+\nu_1\varepsilon_1-\beta_2)$$

$$M_1=D_1(\varkappa_1+\nu_2\varkappa_2-\zeta_1),\quad M_2=D_2(\varkappa_2+\nu_1\varkappa_1-\zeta_2) \tag{1.1}$$

$$\beta_1=\frac{\alpha_1+\nu_2\alpha_2}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}t\,dz,\qquad \beta_2=\frac{\alpha_2+\nu_1\alpha_1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}t\,dz,\qquad \zeta_1=\frac{12(\alpha_1+\nu_2\alpha_2)}{h^3}\int\limits_{-h/2}^{h/2}tz\,dz$$

$$\zeta_2=\frac{12(\alpha_2+\nu_1\alpha_1)}{h^3}\int\limits_{-h/2}^{h/2}tz\,dz,\qquad B_i=\frac{E_ih}{1-\nu_1\nu_2},\quad D_i=\frac{E_ih^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}\quad (i=1,2)$$

Параметры изменения кривизн и деформаций определяются из выражений

$$\varepsilon_1=\frac{1}{\cos\psi}\left(\cos\gamma+\frac{du}{ds}\right)-1=\frac{1}{\sin\psi}\left(\sin\gamma+\frac{dv}{ds}\right)-1,\qquad \varepsilon_2=\frac{u}{r_0} \tag{1.2}$$

$$\varkappa_1=\frac{d\psi}{ds}-(1+\varepsilon_1)\frac{d\gamma}{ds},\qquad \varkappa_2=(1+\varepsilon_2)\left(\frac{\sin\psi}{r}-\frac{\sin\gamma}{r_0}\right),\qquad r=r_0+u$$

где u, v — горизонтальная и вертикальная составляющие вектора перемещения точки срединной поверхности (фиг. 1); ψ, γ — угол между нормалью к деформированной и недеформированной срединной поверхности и осью оболочки; S — длина дуги, отсчитываемая вдоль меридиана.

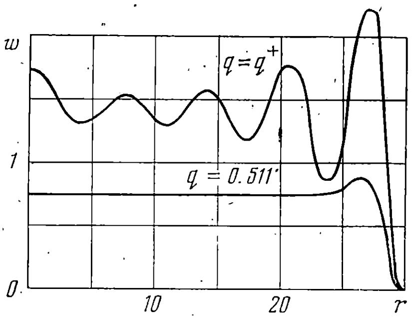
Уравнения равновесия элемента оболочки запишутся в виде [3]

$$\frac{d(rV)}{r\,ds}-(1+\varepsilon_1)q_v=0,\qquad \frac{d(rU)}{r\,ds}-(1+\varepsilon_1)\left(\frac{N_2}{r}-q_u\right)=0$$

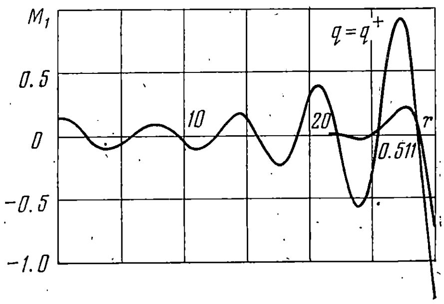
$$\frac{d(rM_1)}{r\,ds}-(1+\varepsilon_1)\left(\frac{\cos\psi}{r}M_2+W\right)=0$$

где V, U — вертикальная и горизонтальная составляющие внутреннего усилия на площадке, перпендикулярной к меридиану; q_v, q_u — аналогичные составляющие поверхностной нагрузки, W — поперечная сила.

Нормальная и поперечная силы определяются из выражений $N_1 = U\cos\psi + V\sin\psi$, $W = U\sin\psi - V\cos\psi$. Аналогичные формулы имеют место и для проекций вектора



Фиг. 2



Фиг. 3

перемещения на касательную к меридиану и нормаль к деформированной срединной поверхности $n = u\cos\psi + v\sin\psi$, $w = u\sin\psi - v\cos\psi$.

В качестве основных неизвестных в дальнейшем используются следующие параметры: V, U, M_1, v, ε_2, ψ.

Для этих неизвестных составляется система дифференциальных уравнений. Однако предварительно вводятся следующие расчетные параметры:

$$V^* = \sqrt{\eta}\,\frac{VR_0}{E_0h_0^2},\qquad M_1^* = \eta\,\frac{M_1R_0}{E_0h_0^3},\qquad \varepsilon_1^* = \sqrt{\eta}\,\frac{\varepsilon_1R_0}{h_0},\qquad q_v^* = \frac{\sqrt{\eta}}{4}\,\frac{q_v}{E_0}\left(\frac{R_0}{h_0}\right)^2$$

$$v^* = \sqrt{\eta}\,\frac{v}{h_0},\qquad r_0^* = b\,\frac{r_0}{s_0},\qquad r^* = b\,\frac{r}{s_0},\qquad b = \sqrt[4]{\eta}\,\frac{s_0}{\sqrt{R_0h_0}},\qquad \eta = 12(1-\nu_1\nu_2).$$

$$P^* = \eta^{3/4}\sqrt{\frac{R_0}{h_0}}\,\frac{P}{2\pi E_0h_0^2},\qquad \alpha = b\,\frac{R_0}{s_0},\qquad \varkappa_i^* = R_0\varkappa_i,\qquad S^* = b\,\frac{S'}{S_0}$$

где R_0, h_0, E_0 — характерные радиус кривизны, толщина и модуль упругости; s_0 — длина дуги меридиана недеформированной оболочки; P — сосредоточенная сила, приложенная в вершине. Аналогичные параметры вводятся и для других деформаций, перемещений и силовых факторов. Для краткости записи звездочка в дальнейшем в обозначениях опускается.

После ряда преобразований для расчетных параметров V, U, M_1,... получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$V' = -\delta_1\left(\frac{\cos\psi}{r}V - \frac{4}{\alpha}q_v\right),\qquad U' = -\delta_1\left(\frac{\cos\psi}{r}U - \frac{N_2}{r} + \frac{4}{\alpha}q_u\right)$$

$$M_1' = -\delta_1\left[\frac{\cos\psi}{r}(M_1-M_2) - \alpha\delta_2W\right],\qquad v' = \alpha(\delta_1\sin\psi - \sin\gamma) \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_2' = \frac{\alpha^2}{r_0}(\delta_1\cos\psi - \delta_2\cos\gamma),\qquad \psi' = \delta_1\gamma' + \frac{1}{\alpha}\varkappa_1,\qquad \frac{d(\ )}{ds} = (\ )'$$

Из правых частей (1.3) легко исключить неизвестные параметры, не входящие в систему основных неизвестных. Однако при расчетах удобнее пользоваться следующими вспомогательными выражениями:

$$N_1 = U\cos\psi + V\sin\psi,\qquad W = U\sin\psi - V\cos\psi,\qquad r = \delta_2r_0,\qquad a_i = \zeta_iR_0$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1-\nu_1\nu_2}{e_1\lambda}N_1 - \nu_2\varepsilon_2 + l_1,\qquad u = \frac{\varepsilon_2r_0}{\alpha},\qquad N_2 = \frac{e_2\lambda}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_2 + \nu_1\varepsilon_1 - l_2) \tag{1.4}$$

$$\varkappa_1 = \frac{1}{e_1\lambda^3} M_1 - \nu_2\varkappa_2 + a_1, \quad \varkappa_2 = \delta_2\alpha\left(\frac{\sin\psi}{r} - \frac{\sin\gamma}{r_0}\right), \quad \lambda = \frac{h}{h_0}$$

$$M_2 = c_2\lambda^3(\varkappa_2+\nu_1\varkappa_1-a_2), \quad e_i = \frac{E_i}{E_0}, \quad \delta_i = 1 + \frac{\varepsilon_i}{\alpha^2}, \quad l_i = \sqrt{\eta}\,\frac{\beta_i R_0}{h_0}$$

$$n=u\cos\psi+v\sin\psi, \quad w=u\sin\psi-v\cos\psi \quad (i=1,\,2)$$

Первое уравнение системы (1.3) в ряде случаев целесообразно проинтегрировать. В случае действия на оболочку внешнего гидростатического давления и сосредоточения в вершине осевой силы с параметрами q и P получим

$$V=-(P\,/\,r+2qr\,/\,\alpha) \tag{1.5}$$

2. Уравнения (1.3), (1.4) позволяют рассмотреть оболочки с разными условиями крепления опорного контура. Если оболочка замкнута, то для проведения численных исследований необходимо получить выражения основных неизвестных, справедливые в малой окрестности вершины $[0, \Delta]$. Рассмотрим этот вопрос применительно к ненагретым оболочкам переменной толщины при отсутствии сосредоточенной в вершине силы. Если в окрестности вершины представить асимптотику решения такой же, как и для круглой пластинки, то можно принять

$$\varkappa_1(\Delta)=kA, \quad \varkappa_2(\Delta)=A, \quad \varepsilon_1(\Delta)=kB, \quad \varepsilon_2(\Delta)=B \tag{2.1}$$

где $k=\sqrt{E_2\,/\,E_1}$. Постоянные A и B определяются при решении уравнений.

С учетом (2.1) из системы (1.4) получаются следующие выражения для основных неизвестных в начале отрезка интегрирования:

$$U(\Delta)=e_1\lambda[(1-\nu_1\nu_2)\cos\gamma]^{-1}(k+\nu_2)B-V\operatorname{tg}\gamma,$$

$$M_1(\Delta)=e_2\lambda^3(k+\nu_2)A, \quad \varepsilon_2(\Delta)=B, \quad \psi(\Delta)=Ar_0\,/\,\alpha\cos\gamma-(1-\delta_2)\operatorname{tg}\gamma+\gamma$$

Значение $V(\Delta)$ определяется из уравнения равновесия элемента, выделенного вокруг вершины оболочки, или непосредственно из (1.5). Что касается $v(\Delta)$, то его на первом этапе решения задачи можно принять равным нулю, а истинное его значение установить после определения A и B решением краевой задачи.

Таким образом для решения нелинейной краевой задачи при каждом фиксированном значении нагрузки необходимо установить значение двух расчетных параметров A и B. Это удается сделать непосредственным интегрированием на всем отрезке $[\Delta, b]$ с применением алгоритма [13] при малых и средних значениях параметра b. При больших b используем прием деления отрезка интегрирования на m промежуточных отрезков, и интегрирование проводим только на отдельных отрезках. Из условия непрерывности основных неизвестных в граничных точках и условий крепления опорного контура получаем $4m-2$ нелинейных алгебраических уравнений с соответствующим числом неизвестных. Система решается с помощью алгоритма [13] численно. При этом для обеспечения условия разрешимости системы в окрестности предельных точек предусматривается возможность использования любого из $4m-2$ неизвестных в качестве вспомогательного параметра. Иначе задачи решать не всегда удается, так как некоторые из параметров в окрестности предельных точек равны нулю или имеют точку возврата. Такое положение является характерным для оболочек с большими и средними значениями параметра пологости b.

При проведении исследования отрезок интегрирования делится на четыре части так, что нелинейная краевая задача сводится к системе 14 нелинейных алгебраических уравнений. Решение получается модифицированным методом Ньютона на ЭЦВМ БЭСМ-4. Интегрирование проводится методом Рунге – Кутта с автоматическим выбором шага, обеспечивающим абсолютную точность 10^{-5}. Контрольные расчеты проводятся с такой же относительной точностью, и результаты практически совпадают с основными. Условия непрерывности функций в промежуточных точках и граничные условия выполняются с точностью 10^{-4}. Начало отрезка интегрирования для всех задач определяется как $\Delta=0.1$. В контрольных расчетах эта величина уменьшается на порядок. Заметим, что соответствующим выбором неизвестных при заданном разбиении отрезка интегрирования задача может быть сведена к системе восьми нелинейных алгебраических уравнений с соответствующим числом неизвестных. Но при этом якобиан системы усложняется, и время, необходимое на решение задачи, практически не изменяется.

3. Рассматриваются изотропные сферические оболочки постоянной толщины при действии внешнего гидростатического давления постоянной интенсивности с параметром q^* при отсутствии нагрева. Основные расчетные параметры для таких оболочек представляется в виде

$$b = \sqrt[4]{\eta}\frac{s_0}{\sqrt{Rh}}, \quad q^* = \frac{\sqrt{\eta}}{4}\frac{q}{E}\left(\frac{R}{h}\right)^2, \quad \eta = 12(1-\nu^2), \quad \nu=0.3$$

$$\nu_i=\nu, \quad E_i=E, \quad l_i=0, \quad a_i=0, \quad \lambda=1, \quad \alpha=b/\gamma_0, \quad \gamma'=1/\alpha$$

где R — радиус кривизны; γ_0 — угол наклона нормали к недеформированной срединной поверхности у опорного контура.

Расчеты проводятся для оболочек с опорным контуром, шарнирно подвижным в меридиональном направлении (задача 1), шарнирно неподвижным (задача 2), подвижны в меридиональном направлении, но с запрещением угла поворота нормали (задача 3), жестко защемленным (задача 4), шарнирно подвижным в радиальном направлении (задача 5), подвижным в радиальном направлении, но с запрещением угла поворота нормали (задача 6).

Проведенные исследования показали, что с увеличением параметра b трудоемкость решения задач резко возрастает, в то время как увеличение параметра γ_0 не приводит к каким-либо принципиальным трудностям.

Установлено, что характер краевого эффекта по-разному проявляется при малых и больших уровнях нагрузки (следовательно, и в линейных и нелинейных задачах). Для пояснения этого положения на фиг. 2 и 3 приводятся графики параметров нормальных перемещений и радиальных изгибающих моментов для сферической оболочки с параметрами $b=30$, $\gamma_0=0.5$ с жестко защемленным опорным контуром при параметрах нагрузки, равных критическому ($q=q^+$) и примерно его половине. Аналогичная картина наблюдается и для оболочек с шарнирно неподвижным опорным контуром. Что касается оболочек с подвижным опорным контуром, то для них как при малых, так и при больших (близких к критическому) уровнях нагрузки центральная часть находится в состоянии, близком к безмоментному. Перестроение формы деформированной поверхности имеет место только в зоне, прилегающей к опорному контуру.

Значения критических нагрузок q^+ в зависимости от b, полученные по уравнениям пологих оболочек, для которых в дальнейшем используется условное обозначение $\gamma_0=0$, и непологих оболочек при различных значениях γ_0, приводятся в таблице.

	γ_0	$b=4$	$b=6$	$b=8$	$b=10$	$b=12$	$b=18$	$b=30$
	0	0.137	0.165	0.174	0.179	0.182	0.187	0.191
1	0.3	0.137	0.166	—	0.181	0.185	—	—
	0.5	0.137	0.168	0.179	0.185	0.190	—	0.203
	0	0.663	0.743	0.789	0.752	0.853	0.898	0.940
2	0.3	0.671	—	0.799	—	0.857	—	—
	0.5	0.687	—	0.803	—	0.863	0.908	0.945
	0	—	0.311	0.367	0.386	0.396	—	0.425
3	0.3	—	0.304	0.361	0.380	0.392	—	—
	0.5	—	0.292	0.350	0.370	0.383	0.402	0.417
	0	0.564	0.972	1.109	0.811	0.959	0.920	0.951
4	0.3	0.573	0.983	1.117	0.836	0.965	—	—
	0.5	0.588	1.004	1.139	0.825	0.966	—	0.951
	0	0.137	0.165	0.174	0.179	0.182	0.187	0.191
5	0.3	—	—	—	—	—	0.192	—
	0.5	0.144	0.174	—	0.189	—	0.200	0.205
	0	—	0.311	0.367	0.386	0.396	—	0.425
6	—	—	—	—	—	—	—	—
	0.5	—	0.336	—	0.413	—	0.444	0.458

Видно, что для оболочек с неподвижным опорным контуром (задачи 2 и 4) уравнения пологих оболочек позволяют определять критические нагрузки с высокой степенью точности в широком диапазоне изменения параметров b и γ_0. Дальнейшее увеличение угла также мало сказывается на результат. Так, например, для оболочки с жестко защемленным опорным контуром и параметрами $\gamma_0=\pi/2$, $b=30$ имеем $q^+=0.959$.

Примерно такая же картина наблюдается и для оболочки с подвижным в меридиональном направлении, но защемленным опорным контуром (задача 3). Но влияние угла здесь больше. Так, например, для оболочки с параметрами $\gamma_0=0.8$, $b=8$ решением будет $q^+=0.320$, т.е. уравнения пологих оболочек позволяют определять критическую нагрузку с точностью 14.6%. Но если $\gamma_0 \leqslant 0.5$, то ошибка не превышает 5%.

Для оболочек с шарнирно подвижным в меридиональном направлении опорным контуром влияние угла наклона нормали γ_0 на ошибку в определении критических нагрузок по уравнениям пологих оболочек более существенно. Но тем не менее, при $\gamma_0 \leqslant 0.5$ она не превосходит 5—7%. Что касается параметра b, то его значение и здесь мало влияет на пределы применимости уравнений пологих оболочек. Аналогичное положение имеет место и для оболочек с подвижным в радиальном направлении опорным контуром.

Как уже отмечалось, относительные удлинения в соотношениях следует считать малыми по сравнению с единицей. Поэтому в соотношениях параметров изменения кривизн и уравнениях равновесия в множителях $(1+\varepsilon_i)$ можно пренебречь вторыми слагаемыми. Получаемые при этом значения критических нагрузок практически совпадают с приведенными в таблице.

Для некоторых из рассматриваемых оболочек при больших значениях параметра b возможен переход осесимметричных форм равновесия в неосесимметричные. Исследование подобных задач требует прежде всего определения основного напряженного состояния решением нелинейной краевой задачи, что делается по изложенной выше методике.

Поступила 5 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mescall J.* Numerical solutions of nonlinear equations for shells of revolution. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 11.
2. *Mescall J.* Large deflections of spherical shells under concentrated loads. Trans. ASMS. Ser. E. J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 4.
3. *Reissner E.* On axisymmetrical deformations of thin shells of revolution. Proc. Sympos. Appl. Math., New York, Mc Graw-Hill, 1950, vol. 3.
4. *Reissner E.* On the equations for finite symmetrical deflections of thin shells of revolution. Progr. Appl. Mech. New York — London, Macmillan Co., 1963.
5. *Феодосьев В. И.* Осесимметричная эластика сферической оболочки. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
6. *Bauer L., Reiss E. L., Keller H. B.* Axisymmetric buckling of hollow spheres and hemispheres. Communs Pure and Appl. Math., 1970, vol. 23, No. 4.
7. *Шилькрут Д. И.* Некоторые вопросы теории непологих нелинейных упругих оболочек. В сб.: Вопросы нелинейной теории оболочек и стержней. Тр. Кишиневск. политехн. ин-та, 1969.
8. *Григолюк Э. И., Мамай В. И., Фролов А. Н.* Исследование устойчивости непологих сферических оболочек при конечных перемещениях на основе различных уравнений теории оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 5.
9. *Ворович И. И., Минакова Н. И.* Устойчивость неполного сферического купола. ПММ, 1968, т. 32, № 2.
10. *Валишвили Н. В., Горелов Л. К.* Об уравнениях, применяемых при исследовании устойчивости пологих сферических оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 2.
11. *Валишвили Н. В.* О пределах применимости нелинейных уравнений пологих оболочек. Изв. вузов. Машиностроение, 1972, № 5.
12. *Waszizyszyn Z.* Obliczanie skonych uglei sprezysto-plastycznych plyt i Powlok obrotowo-symetry cznich. Krakowskiej Zeszyty Naukowe Politechnika, Krakow, 1970, No. 3.
13. *Валишвили Н. В.* Об одном алгоритме решения нелинейных краевых задач ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
14. *Keller H. B.* Numerical methods for two-point boundary-value problems. Waltham, Mass Toronto, London, Blaisdell Publ., Comp., 1968.