Выражения для нормальных и касательных напряжений принимают вид

$$\sigma_x = \frac{h^2 E_x^\circ (p_1-p_2)}{6l^2 E_y} k^2 e^{-kx}(\sin kx - \cos kx)(1-3y^2) +$$

$$+ \frac{l^2(p_1+p_2)}{4h^2}\left(3x^2-3x+\frac{1}{2}\right) y + \frac{\mu_{xy}E_x^\circ (p_1-p_2)}{2kE_y}(1-k) \qquad (19)$$

$$\tau_{xy} = \frac{h^3 E_x^\circ (p_1-p_2)}{3l^2 E_y} k^3 e^{-kx}\cos kx (y^3-y) + \frac{3l(p_1+p_2)}{4h}\left(x-\frac{1}{2}\right)(1-y^2)$$

Отметим, что построенное решение содержит гиперболо-тригонометрические функции и приближенно учитывает краевые эффекты типа погранслоя. При $E_y\to\infty$, $G_{xy}\to\infty$ полученное решение совпадает с результатом, вытекающим из элементарной теории изгиба балок. Следует отметить, что равенства (18), (19) справедливы при $0\leqslant x\leqslant 0.5$, так как при определении констант балка считалась достаточно длинной и в решении для первого уравнения (14) удерживалась только затухающая часть.

На фиг. 2, 3 показаны распределения нормальных и касательных напряжений в сечении $x=0$ по толщине балки, нагруженной давлением $p_1=p$ при $p_2=0$ (кривая *1*) и $p_2=p$ при $p_1=0$ (кривая *2*). Кривая *3* соответствует решению, основанному на законе плоских сечений. Балка изготовлена из углепластика с параметрами: $l/2h=10$, $E_x=14.9\cdot 10^3$ *кгс/см²*, $E_y=0.6\cdot 10^3$ *кгс/см²*, $G_{xy}=0.4\cdot 10^3$ *кгс/см²*, $\mu_{xy}=0.25$. Распределения напряжений, найденные без учета эффекта Пуассона ($\mu_{xy}=\mu_{yx}=0$), практически не отличаются от приведенных на фиг. 2, 3, поэтому пренебрежение эффектом Пуассона по толщине в рассматриваемых задачах представляется допустимым. Таким образом, предлагаемая расчетная модель позволяет достаточно просто учесть поперечные сдвиговую и нормальную деформации.

Поступила 25 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э. И., Коган Ф. А.* Современное состояние многослойных оболочек. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 6.
2. *Галиньш А. Г.* Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Изд. Казанск. ун-та, 1967, вып. 5; 1970, вып. 6—7.

УДК 539.214;539.374

ОБ ОДНОМ ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Т. Д. СЕМЫКИНА, В. П. ШАТИЛОВ

(Воронеж)

Предлагается вариационный принцип относительно независимого поля напряжений и кинематически допустимого поля скоростей перемещений для сплошных сред, обладающих потенциальными функциями напряжений и скоростей деформаций.

Полученный вариационный принцип записывается в терминах теории оболочек относительно независимых статических допустимого поля усилий – моментов и кинематически допустимого поля скоростей перемещений срединной поверхности.

Вид функционала конкретизируется для оболочек, изготовленных из вязкопластического материала.

1. Рассмотрим материалы, для напряженного и деформированного состояния которых [1] существуют потенциальные функции $X_p^{\boldsymbol{\cdot}}(\sigma_{ij})$ и $X_v^{\boldsymbol{\cdot}}(\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}})$:

$$\sigma_{ij}={}^1/_2(1+\delta_{ij})\,\partial X_v^{\boldsymbol{\cdot}}/\partial\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}, \qquad \varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}={}^1/_2(1+\delta_{ij})\,\partial X_p^{\boldsymbol{\cdot}}/\partial\sigma_{ij} \tag{1.1}$$

Напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям на части поверхности S_p

$$\nabla\sigma+\rho\mathbf{F}=0, \qquad \mathbf{e}^\nu\sigma-\mathbf{p}=0 \quad \text{на } S_p \tag{1.2}$$

Деформации определяются по соотношениям Коши

$$\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}={}^1/_2(\nabla\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}}+\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}}\nabla) \tag{1.3}$$

Тогда можно показать, что справедлив следующий вариационный принцип: среди всех статически допустимых напряжений, удовлетворяющих условиям (1.2), и всех кинематически допустимых скоростей **перемещений**, удовлетворяющих граничным условиям на S_u, а также связанных с ними соотношениями (1.3) полей скоростей деформации, истинные поля напряжений и скоростей деформаций сообщают стационарное значение функционалу

$$J=\int\limits_V[2\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}-2X_p^{\boldsymbol{\cdot}}(\sigma_{ij})-X_v^{\boldsymbol{\cdot}}(\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}})]\,dv-\int\limits_{S_p}\mathbf{pu}^{\boldsymbol{\cdot}}\,ds-\int\limits_V\rho\mathbf{Fu}^{\boldsymbol{\cdot}}\,dv \tag{1.4}$$

При независимых вариациях $\delta\sigma_{ij}$ и δu_i соотношения (1.1)–(1.3) эквивалентны выполнению равенства $\delta J=0$.

2. Для тонких оболочек (в рамках гипотез Кирхгофа – Лява) напряженное состояние определяется усилиями N_{ij} и моментами M_{ij}, а деформированное состояние – скоростями деформации $\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}\circ}$ и изменениями кривизны срединной поверхности $\varkappa_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}$

$$N_{ij}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}\,dz, \qquad M_{ij}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}z\,dz, \qquad \varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}=\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}\circ}+z\varkappa_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{2.1}$$

В этом случае функционал J можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int\limits_S\left\{\int\limits_{-h/2}^{h/2}[2\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}\circ}+z\varkappa_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}})-2X_p^{\boldsymbol{\cdot}}(\sigma_{ij})-X_v^{\boldsymbol{\cdot}}(\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}))\,dz\right\}ds-\int\limits_{S_p}\mathbf{pu}^{\boldsymbol{\cdot}}\,ds-\int\limits_V\rho\mathbf{uF}^{\boldsymbol{\cdot}}\,dv= \\ &= \int\limits_S[2M_{ij}\varkappa_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}+2N_{ij}\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}\circ}-2X_p^{\boldsymbol{\cdot}}(M_{ij},N_{ij})-X_v^{\boldsymbol{\cdot}}(\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}\circ},\varkappa_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}})]\,ds- \\ &\quad -\int\limits_{S_p}\mathbf{pu}^{\boldsymbol{\cdot}}\,ds-\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\rho\mathbf{Fu}^{\boldsymbol{\cdot}}\,dz\,ds \end{aligned} \tag{2.2}$$

где S — срединная поверхность оболочки. Таким образом, для оболочек справедлив вариационный принцип $\delta J_1=0$.

Если рассматривается линейно-упругая среда, то потенциальные функции для деформаций $\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}$ и напряжений совпадают

$$X_p(\sigma_{ij})=W_0(\sigma_{ij}), \qquad X_v(\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}})=W_0(\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}})$$

В этом случае вариационные принципы $\delta J_1=0$ и $\delta J=0$ переходят в принцип Рейсснера и его разновидность для оболочек [2].

3. Получим вариационный принцип для вязкопластической среды, условие течения которой записывается в следующей форме:

$$\sqrt{J_2'}=k+2\eta\sqrt{I_2^{\boldsymbol{\cdot}\prime}}, \qquad J_2'={}^1/_2s_{ij}s_{ij}, \qquad I_2^{\boldsymbol{\cdot}\prime}={}^1/_2\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{3.1}$$

где k — предел текучести при сдвиге, η — коэффициент вязкости, $s_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}$.

Для скоростей деформаций имеет место ассоциированный закон течения

$$e_{ij}^{\cdot}=\lambda s_{ij}=\frac{\sqrt{J_2'}-k}{2\eta\sqrt{J_2'}}s_{ij},\qquad s_{ij}=2\eta\left(1+\frac{k}{2\eta\sqrt{I_2^{\cdot\prime}}}\right)e_{ij}^{\cdot}\tag{3.2}$$

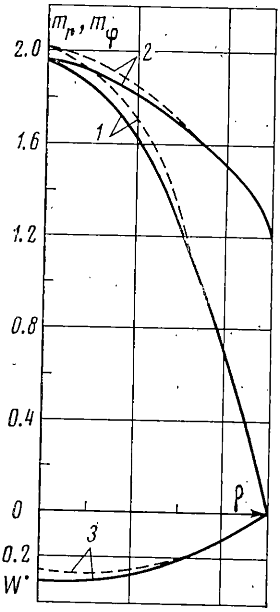
В соответствии с формулами (3.2) потенциальные функции могут быть представлены в виде

$$X_v^{\cdot}(\varepsilon_{ij}^{\cdot})=2\eta I_2^{\cdot\prime}+k\sqrt{I_2^{\cdot\prime}},\qquad X_p^{\cdot}(\sigma_{ij})=\frac{1}{2\eta}\left(J_2'-k\sqrt{J_2'}\right)\tag{3.3}$$

Таким образом, для вязкопластических сред вид функционала следующий:

$$J=\int\limits_V\left[2\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{\cdot}-\frac{1}{\eta}\left(J_2'-k\sqrt{J_2'}\right)-2\eta I_2^{\cdot\prime}-k\sqrt{I_2^{\cdot\prime}}\right]dv-$$

$$-\int\limits_{S_p}\mathbf{pu}^{\cdot}\,ds-\int\limits_V\rho\mathbf{Fu}^{\cdot}\,dv\tag{3.4}$$



Фиг. 1

Рассмотрим оболочки из вязкопластического материала. При непрерывном изменении $e_{ij}^{\cdot}$ по толщине оболочки из формулы (3.2) следует непрерывное изменение по толщине s_{ij}; следовательно, для тонких оболочек можно принять

$$s_{ij}=s_{ij}^{\circ}+zs_{ij}'\quad\text{или}\quad\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{\circ}+z\sigma_{ij}'$$

Напряжения σ_{ij}° связаны с усилиями в срединной поверхности оболочки, а напряжения σ_{ij}' определяют моментное состояние

$$\sigma_{11}=\frac{N_1}{h}+12\frac{z}{h^3}M_1,\qquad\sigma_{22}=\frac{N_2}{h}+12\frac{z}{h^3}M_2$$

$$\sigma_{12}=\frac{N_{12}}{h}+12\frac{z}{h^3}M_{12}$$

Тогда для потенциальных функций (3.3) получим выражения

$$X_p^{\cdot}(M_{ij},N_{ij})=\frac{1}{2\eta}\left(A\frac{h^3}{12}+Ch\right)-\frac{k}{2\eta}\left[\frac{Ah+B}{4A\sqrt{A}}L-\frac{B-Ah}{4A\sqrt{A}}Q+\right.$$

$$\left.+\frac{4AC-B^2}{8A\sqrt{A}}\ln\left|\frac{2L+Ah+B}{2Q-Ah+B}\right|\right]$$

$$X_v^{\cdot}(\varepsilon_{ij}^{\cdot\circ},\varkappa_{ij}^{\cdot})=2\eta\left(\frac{ah^3}{12}+ch\right)+k\frac{ah+b}{4a\sqrt{a}}l-k\frac{b-ah}{4a\sqrt{a}}q+k\frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2l+ah+b}{2q-ah+b}\right|$$

$$A=\left(\frac{12}{h^3}\right)^2(M_1^2-M_1M_2+M_2^2+M_{12}^2),\qquad C=\frac{1}{h^2}(N_1^2-N_1N_2+N_2^2+N_{12}^2)\tag{3.5}$$

$$B=\frac{12}{h^4}(2N_1M_1-N_1M_2-M_1N_2+2N_2M_2+2N_{12}M_{12}),\qquad a=\varkappa_1\varkappa_2+\varkappa_2^2+\varkappa_2^1$$

$$c=\varepsilon_1^{\circ}\varepsilon_2^{\circ}+(\varepsilon_1^{\circ})^2+(\varepsilon_2^{\circ})^2,\qquad b=2\varepsilon_1^{\circ}\varkappa_1+2\varepsilon_2^{\circ}\varkappa_2+\varepsilon_1^{\circ}\varkappa_2+\varepsilon_2^{\circ}\varkappa_1,\qquad L=\left[A\left(\frac{Ah^2}{4}+\frac{Bh}{2}+C\right)\right]^{1/2}$$

$$Q=\left[A\left(\frac{Ah^2}{4}-\frac{Bh}{2}+C\right)\right]^{1/2},\quad l=\left[a\left(\frac{ah^2}{4}+\frac{bh}{2}+c\right)\right]^{1/2},\quad q=\left[a\left(\frac{ah^2}{4}-\frac{bh}{2}+c\right)\right]^{1/2}$$

Для вязкопластических оболочек функционал J_1 имеет вид (2.2), а потенциальные функции определяются соотношениями (3.5).

В качестве примера рассмотрим вязкопластическое течение свободно опертой круглой пластинки толщиной h и радиуса R под действием равномерно распределенной нагрузки.

При изгибе пластин

$$N_r=N_\varphi=0, \quad \varepsilon_{rr}{}^{\circ}=0, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}{}^{\circ}=0, \quad \varkappa_r{}^{\bullet}=-\frac{d^2w}{dr^2}, \quad \varkappa_\varphi{}^{\bullet}=-\frac{1}{r}\frac{dw^{\bullet}}{dr}.$$

Моменты M_r и M_φ удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_r)-M_\varphi=\int\limits_0^r pr\,dr$$

Введем безразмерные величины

$$m_r=M_r/M_0, \quad m_\varphi=M_\varphi/M_0, \quad \rho=r/R, \quad p'=pR^2/M_0, \quad W^{\bullet}=w^{\bullet}/R, \quad M_0=kh^2/4,$$

$$R\varkappa_{ij}=k_{ij}, \quad \nu=2\eta h/3kR$$

Функционал J при изгибе пластины примет вид

$$J=\int\limits_S\Bigl[2m_rk_r+2m_\varphi k_\varphi-\nu(k_r{}^2+k_rk_\varphi+k_\varphi{}^2)-\frac{2}{3\nu}(m_r{}^2-m_rm_\varphi+m_\varphi{}^2)+$$
$$+2\nu\sqrt{{}^1/_3(m_r{}^2-m_rm_\varphi+m_\varphi{}^2)}-\sqrt{k_r{}^2+k_rk_\varphi+k_\varphi{}^2}-p'W^{\bullet}\Bigr]ds \qquad (3.6)$$

Кинематически допустимое поле скоростей перемещений и статически допустимое поле моментов зададим в форме

$$W^{\bullet}=H(1-\rho^2), \quad m_r=D(1-\rho^2), \quad m_\varphi=D+(p'/2-3D)\rho^2 \qquad (3.7)$$

Подставляя выражения (3.7) в (3.6) и минимизируя функционал по H и D, получим

$$W^{\bullet}=\frac{p'-4\sqrt{3}}{48\nu}(1-\rho^2), \quad m_r=\frac{7}{32}p'(1-\rho^2), \quad m_\varphi=\frac{p'}{32}(7-3\rho^2)$$

На фигуре пунктирные кривые соответствуют найденным значениям m_r (кривая *1*), m_φ (кривая *2*) и $W^{\bullet}$ (кривая *3*). Сплошными линиями отмечено соответствующее решение, полученное в [3].

Поступила 2 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
2. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. Изд-во ЛГУ, 1964.
3. *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М., «Мир», 1968.

УДК 539.3

КОНЕЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Н. В. ВАЛИШВИЛИ

(Кутаиси)

Вопросы расчета непологих оболочек при конечных перемещениях неоднократно рассматривались на примере сферических оболочек. В работах [1, 2] уравнения Рейсснера [3, 4] решались при малых и средних значениях параметра пологости методом конечных разностей. Аналогичные уравнения были использованы для исследования эластики замкнутой сферы в [5, 6].

Уточненный вариант уравнений Рейсснера предложен и рассмотрен в [7]. Уравнения другого вида были получены в [8]. На основании этих уравнений исследованы сферические оболочки с подвижным в радиальном направлении опорным контуром. Другой вариант уравнений непологих сферических оболочек предложен в [9]. Аналогичные уравнения использовались для установления пределов применимости уравнений пологих оболочек в [10].