Следующим шагом нагрузим пластину на бесконечности моментами

$$M_x = -M_y = [C_1 b^2 (1-\nu)]/[(3+\nu)2a^2] \tag{22}$$

Тогда по формуле (20) на контуре $|z|=a$ получим

$$W = -\frac{C_1 b^2}{(3+\nu)4D}\cos 2\theta + \mathrm{const} \tag{23}$$

Сравнивая между собой формулы (14) и (23), убеждаемся в том, что изгиб (22) «снимает» вдоль контура переменную часть перемещения (14) и, таким образом, граничное условие $W=\mathrm{const}$ при $|z|=a$ выполняется. Момент M_1, возникающий на контуре $|z|=a$ вследствие изгиба (22), находим по формуле (15)

$$M_1 = -\frac{C_1 b^2 (1-\nu)}{(3+\nu)2a^2}\cos 2\theta$$

В результате после корректировки граничных значений изгибами (19) и (22) момент M_1 будет равен

$$M_1 = (3\nu-1)\cos 2\theta \frac{b^2 C_1}{2a^2(3+\nu)} \tag{24}$$

Возвращаясь к формулам (18), получим следующее значение коэффициента K, учитывающее проведенную корректировку на круговом контуре $|z|=a$

$$K = 3qb^{1/2}[a^2(3+\nu)]h^{-2}/8 \tag{25}$$

Формулы (18) вместе с (24) показывают, что, хотя погрешность решения (25) остается равной $O(b^2/a^2)$ по сравнению с единицей, точность последнего растет пропорционально $|3\nu-1|$.

В заключение оценим полученное значение K. Для этого несущественно изменим момент (4), заменив его постоянным моментом $M^* = -qa^2(3+\sigma)/16$. Накладывая на созданное поле напряжений чистый изгиб от момента $M=-M^*$, получим задачу, решение которой, следуя [1], имеет вид

$$K = 6Mb^{1/2}h^{-2} = 3qa^2 b^{1/2}(3+\nu)h^{-2}/8$$

Это выражение несколько превышает значение (13), что объясняется увеличением момента, приложенного на разрезе, но совпадает с (25), что физически оправдано большей «жесткостью» конечной пластины по отношению к бесконечной.

Поступила 23 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sih G. C., Paris P. C., Erdogan F.* Crack-tip, stress-intensity factors for plane extension and plate bending problems. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Е, 1962, т. 29, № 2.)
2. *Филоненко-Бородич М. М.* Теория упругости. М., Физматгиз, 1959.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.
4. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. М.– Л., Гостехиздат, 1951.

УДК 539.3

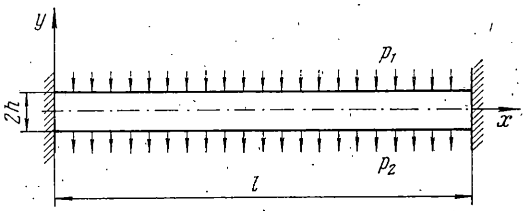
К ТЕОРИИ ИЗГИБА БАЛОК ИЗ АРМИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. Н. УЛЬЯШИНА

(*Москва*)

Появление армированных материалов, обладающих сравнительно низкой жесткостью и прочностью в направлениях, не совпадающих с траекториями армирования, вызывает необходимость уточнения классических теорий изгиба балок, пластин и оболочек. В существующих прикладных теориях изгиба (см., например, обзор [12]) это уточнение в основном связано с учетом деформации поперечного сдвига, при этом сохраняется гипотеза о несжимаемости материала в поперечном направлении.

В данной работе рассматривается плоское напряженное состояние однородной ортотропной полосы с учетом сдвиговой и нормальной поперечных деформаций, а также связанный с последней эффект Пуассона.



Фиг. 1

Рассмотрим однородную ортотропную балку, нагруженную нормальным давлением (фиг. 1). Пусть σ_x, σ_y, τ_{xy} — компоненты напряжения, определяемые уравнениями равновесия малого элемента

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x_0}+\frac{l}{h}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y_0}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x_0}+\frac{l}{h}\frac{\partial\sigma_y}{\partial y_0}=0 \tag{1}$$

где $x_0=x/l$, $y_0=y/h$ — ортогональные координаты. В дальнейшем нулики для x и y опускаются, всюду ниже они означают безразмерные координаты. Запишем статические граничные условия при $y=\pm1$

$$\tau_{xy}=0,\qquad \sigma_y=\mp p_{1,\,2} \tag{2}$$

Закон Гука примем в форме

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{l}{E_x}(\sigma_x-\mu_{yx}\sigma_y),\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{h}{E_y}(\sigma_y-\mu_{xy}\sigma_x)$$

$$\frac{1}{h}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{l}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \tag{3}$$

где u, v — перемещения в направлениях осей x и y, E_x, E_y, G_{xy}, μ_{xy}, μ_{yx} — упругие постоянные.

Продифференцируем второе равенство в (3) по x; исключим из него σ_x с помощью уравнения (1) и проинтегрируем полученное соотношение по y. В результате получим

$$\frac{\partial v}{\partial x}=v_0'(x)+\frac{h}{E_y}\int_0^y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}dy+\frac{l\mu_{xy}}{E_y}[\tau_{xy}-\tau_0(x)] \tag{4}$$

$$v_0=v(y=0),\qquad \tau_0=\tau_{xy}(y=0)$$

Подставляя равенство (4) в последнее соотношение закона Гука (3), после интегрирования по y найдем

$$u=u_0(x)-\frac{h}{l}v_0'y-\frac{h^2}{lE_y}\int_0^y dy\int_0^y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}dy+\frac{h\mu_{xy}}{E_y}\tau_0y+h\left(\frac{1}{G_{xy}}-\frac{\mu_{xy}}{E_y}\right)\int_0^y\tau_{xy}\,dy \tag{5}$$

Для построения кинематической модели примем в равенствах (4) и (5) напряжения σ_y и τ_{xy} равными их значениям на начальной поверхности, т. е. $\sigma_y=\sigma_y(y=0)=\sigma_0$, $\tau_{xy}=\tau_0$, а произвольную функцию, получающуюся в результате интегрирования соотношения (4), равной ее значению на начальной поверхности. Эта постоянная определяет смещение балки как твердого тела и может быть принята равной нулю.

Тогда равенства (4) и (5) можно записать в виде

$$v=v_0+\frac{h}{E_y}\sigma_0y,\qquad u=u_0-\frac{h}{l}v_0'y+\frac{h}{G_{xy}}\tau_0y-\frac{h^2}{lE_y}\sigma_0'\frac{y^2}{2} \tag{6}$$

Нормальные напряжения в этом случае имеют вид

$$\sigma_x=\frac{E_x^\circ}{l}\left[u_0'+\frac{l\mu_{xy}}{E_y}\sigma_0-\left(\frac{h}{l}v_0''-\frac{h}{G_{xy}}\tau_0'\right)y-\frac{h^2}{lE_y}\sigma_0''\frac{y^2}{2}\right] \qquad (7)$$

$$E_x^\circ=E_x(1-\mu_{xy}\mu_{yx})$$

Рассмотрим далее уравнение равновесия. Подставляя σ_x, согласно (7), в первое уравнение системы (1) и интегрируя его по y, найдем значение τ_{xy}

$$\tau_{xy}=\tau_0-\frac{hE_x^\circ}{l^2}\left[\left(u_0''+\frac{l\mu_{xy}}{E_y}\sigma_0'\right)y-\left(\frac{h}{l}v_0'''-\frac{h}{G_{xy}}\tau_0''\right)\frac{y^2}{2}-\frac{h^2}{lE_y}\sigma_0'''\frac{y^3}{6}\right] \qquad (8)$$

После интегрирования второго уравнения равновесия с учетом соотношения (8), получим выражение для σ_y

$$\sigma_y=\sigma_0-\frac{h}{l}\tau_0'y+\frac{h^2E_x^\circ}{l^3}\left[\left(u_0'''+\frac{l\mu_{xy}}{E_y}\sigma_0''\right)\frac{y^2}{2}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{h}{l}v_0^{\mathrm{IV}}-\frac{h}{G_{xy}}\tau_0'''\right)\frac{y^3}{6}-\frac{h^2}{lE_y}\sigma_0^{\mathrm{IV}}\frac{y^4}{24}\right] \qquad (9)$$

Таким образом, согласно равенствам (6)–(9), перемещения и напряжения выражаются через четыре функции одной переменной u_0, v_0, σ_0 и τ_0. При этом уравнения равновесия (1) и первое соотношение в (3) удовлетворяются точно, а второе и третье равенства в (3), не учитывающиеся в классической теории изгиба балок, удовлетворяются приближенно. Более точное выполнение этих равенств может быть осуществлено путем построения итерационного процесса, в котором перемещения u и v в каждом последующем приближении определяются равенствами (4), (5) с помощью выражений для τ_{xy} и σ_y, получаемых из равенств (8) и (9) на предшествующем этапе. Вариант уточненной теории изгиба балок, рассматриваемый в данной работе, может считаться первым приближением такого итерационного процесса.

Для построения разрешающей системы уравнений воспользуемся равенствами (8), (9) и статическими граничными условиями (2). Полагая в равенствах (8), (9) $y=\pm1$, на основании (2) получим

$$\tau_0-\frac{hE_x^\circ}{l^2}\left[\pm\left(u_0''+\frac{l\mu_{xy}}{E_y}\sigma_0'\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{l}v_0'''-\frac{h}{G_{xy}}\tau_0''\right)\mp\frac{h^2}{6lE_y}\sigma_0'''\right]=0$$

$$\sigma_0\mp\frac{h}{l}\tau_0'+\frac{h^2E_x^\circ}{l^3}\left[\frac{1}{2}\left(u_0'''+\frac{l\mu_{xy}}{E_y}\sigma_0''\right)\mp\right.$$

$$\left.\mp\frac{1}{6}\left(\frac{h}{l}v_0^{\mathrm{IV}}-\frac{h}{G_{xy}}\tau_0'''\right)-\frac{h^2}{24lE_y}\sigma_0^{\mathrm{IV}}\right]=\mp p_{1,2}$$

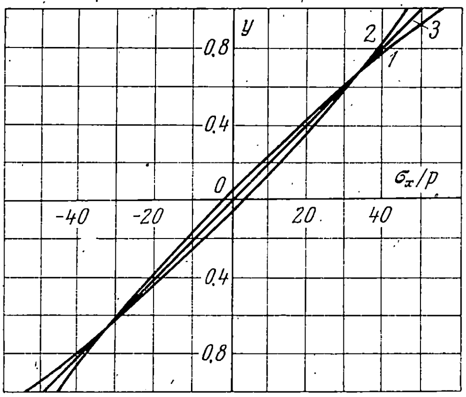
Складывая и вычитая попарно записанные уравнения, будем иметь

$$\frac{h^2E_x^\circ}{l^2}\left[\frac{1}{l}v_0'''-\frac{\tau_0''}{G_{xy}}\right]+2\tau_0=0 \qquad (10)$$

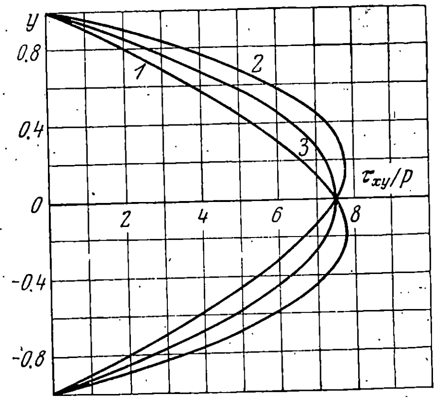
$$u_0''+\frac{l\mu_{xy}}{E_y}\sigma_0'-\frac{h^2}{6lE_y}\sigma_0'''=0 \qquad (11)$$

$$\frac{h^2E_x^\circ}{l^3}\left(u_0'''+\frac{l\mu_{xy}}{E_y}\sigma_0''-\frac{h^2}{12lE_y}\sigma_0^{\mathrm{IV}}\right)+2\sigma_0=p_2-p_1 \qquad (12)$$

$$\frac{h^3E_x^\circ}{3l^3}\left(\frac{1}{l}v_0^{\mathrm{IV}}-\frac{\tau_0'''}{G_{xy}}\right)+\frac{2h}{l}\tau_0'=p_1+p_2 \qquad (13)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Исключая из уравнения (12) u_0 с помощью (11) и из уравнения (13) — v_0, согласно (10), запишем окончательную систему

$$\sigma_0^{\mathrm{IV}}+4k^4\sigma_0=-2k^4(p_1-p_2), \qquad \tau_0'=\frac{3l}{4h}(p_1+p_2), \qquad k_4=\frac{6l^4E_y}{h^4E_x^\circ} \tag{14}$$

В качестве примера рассмотрим балку, показанную на фиг. 1, нагруженную равномерным давлением p_1, p_2. Решение уравнений (14) имеет вид

$$\sigma_0=\sum_{i=1}^{4}C_iF_i(x)-\frac{p_1-p_2}{2}, \qquad \tau_0=\frac{3l}{4h}(p_1+p_2)x+C_5 \tag{15}$$

$$F_{1,\,2}=e^{\pm kx}\sin kx, \qquad F_{3,\,4}=e^{\pm kx}\cos kx$$

Функции u_0 и v_0 определяются из равенств (10), (11), (15)

$$u_0=\frac{h^2}{6lE_y}\sum_{i=1}^{4}C_iF_i'-\frac{l\mu_{xy}}{E_y}\sum_{i=1}^{4}C_i\int F_i\,dx+C_6x+C_7 \tag{16}$$

$$v_0=-\frac{l^4x^4}{16E_x^\circ h^3}(p_1+p_2)-C_5\frac{l^3}{3E_x^\circ h^2}x^3+C_8\frac{x^2}{2}+C_9x+C_{10}$$

Напряжения и перемещения балки выражаются через найденные функции σ_0, τ_0, u_0, v_0 с помощью соотношений (6)—(9). Запишем граничные условия. Для жестко закрепленного края следует принять $u\equiv0$, $v\equiv0$, т. е. согласно равенствам (6), при $x=0$, $x=1$ будем иметь

$$u_0=v_0=\sigma_0=\sigma_0'=\frac{1}{l}v_0'-\frac{1}{G_{xy}}\tau_0=0 \tag{17}$$

Таким образом, десять произвольных постоянных, входящих в общее решение (15), (16), определяются из условий (17). Приведем окончательные выражения для перемещений

$$u=-\frac{h^2(p_1-p_2)}{6lE_y}e^{-kx}\left[k\sin kx(1-3y^2)-3\frac{l^2\mu_{xy}}{kh^2}\cos kx\right]+$$
$$+\frac{l^3(p_1+p_2)}{4h^2E_x^\circ}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)xy+\frac{l\mu_{xy}(p_1-p_2)}{2kE_y}(x-1) \tag{18}$$

$$v=\frac{h(p_1-p_2)}{2E_y}[e^{-kx}(\cos kx+\sin kx)-1]y+$$
$$+\frac{l^4(p_1+p_2)}{8h^3E_x^\circ}\left[(-x^2+2x-1)\frac{x^2}{2}+\frac{3h^2E_x^\circ}{l^2G_{xy}}x(x-1)\right]$$

Выражения для нормальных и касательных напряжений принимают вид

$$\sigma_x = \frac{h^2 E_x^\circ (p_1 - p_2)}{6l^2 E_y} k^2 e^{-hx} (\sin kx - \cos kx)(1-3y^2) +$$

$$+ \frac{l^2 (p_1+p_2)}{4h^2} \left(3x^2 - 3x + \frac{1}{2} \right) y + \frac{\mu_{xy} E_x^\circ (p_1 - p_2)}{2kE_y} (1-k) \qquad (19)$$

$$\tau_{xy} = \frac{h^3 E_x^\circ (p_1 - p_2)}{3l^2 E_y} k^3 e^{-hx} \cos kx (y^3 - y) + \frac{3l(p_1+p_2)}{4h} \left(x - \frac{1}{2} \right) (1-y^2)$$

Отметим, что построенное решение содержит гиперболо-тригонометрические функции и приближенно учитывает краевые эффекты типа погранслоя. При $E_y \to \infty$, $G_{xy} \to \infty$ полученное решение совпадает с результатом, вытекающим из элементарной теории изгиба балок. Следует отметить, что равенства (18), (19) справедливы при $0 \leqslant x \leqslant 0.5$, так как при определении констант балка считалась достаточно длинной и в решении для первого уравнения (14) удерживалась только затухающая часть.

На фиг. 2, 3 показаны распределения нормальных и касательных напряжений в сечении $x=0$ по толщине балки, нагруженной давлением $p_1=p$ при $p_2=0$ (кривая *1*) и $p_2=p$ при $p_1=0$ (кривая *2*). Кривая *3* соответствует решению, основанному на законе плоских сечений. Балка изготовлена из углепластика с параметрами: $l/2h=10$, $E_x=14.9 \cdot 10^3$ *кгс/см²*, $E_y=0.6 \cdot 10^3$ *кгс/см²*, $G_{xy}=0.4 \cdot 10^3$ *кгс/см²*, $\mu_{xy}=0.25$. Распределения напряжений, найденные без учета эффекта Пуассона ($\mu_{xy}=\mu_{yx}=0$), практически не отличаются от приведенных на фиг. 2, 3, поэтому пренебрежение эффектом Пуассона по толщине в рассматриваемых задачах представляется допустимым. Таким образом, предлагаемая расчетная модель позволяет достаточно просто учесть поперечные сдвиговую и нормальную деформации.

Поступила 25 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э. И., Коган Ф. А.* Современное состояние многослойных оболочек. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 6.
2. *Галиньш А. Г.* Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Изд. Казанск. ун-та, 1967, вып. 5; 1970, вып. 6—7.

УДК 539.214;539.374

ОБ ОДНОМ ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Т. Д. СЕМЫКИНА, В. П. ШАТИЛОВ

(Воронеж)

Предлагается вариационный принцип относительно независимого поля напряжений и кинематически допустимого поля скоростей перемещений для сплошных сред, обладающих потенциальными функциями напряжений и скоростей деформаций.

Полученный вариационный принцип записывается в терминах теории оболочек относительно независимых статических допустимого поля усилий — моментов и кинематически допустимого поля скоростей перемещений срединной поверхности.

Вид функционала конкретизируется для оболочек, изготовленных из вязкопластического материала.