УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЕ С РАЗРЕЗОМ ПОСРЕДИНЕ ПРИ ИЗГИБЕ ДАВЛЕНИЕМ

Г. В. ГАПОНОВ

(Ленинград)

Определяется комплексный коэффициент концентрации напряжения [1] при изгибе равномерно распределенным давлением круглой шарнирно-опертой пластины с симметрично расположенной трещиной.

Путем использования метода наложения получено приближенное решение задачи и произведена оценка его погрешности.

Рассмотрим круглую пластину радиуса a, в центре которой симметрично расположен разрез, длиной $2b$. Пластина шарнирно оперта по краю и находится под действием равномерно распределенного давления q.

В случае сплошной пластины решение будет иметь вид [2]

$$W=\frac{q}{64D}\left[a^2-r^2+\frac{4a^2(a^2-r^2)}{1+\nu}\right] \tag{1}$$

$$M_1={}^1/_{16}q[a^2(3+\nu)-r^2(3+\nu)] \tag{2}$$

$$M_2={}^1/_{16}q[a^2(3+\nu)-r^2(1+3\nu)] \tag{3}$$

где W — прогиб; M_1 — изгибающий момент на площадке, перпендикулярной к радиусу; M_2 — изгибающий момент по радиальному сечению.

Запишем соотношение (3) в следующей форме

$$-M_2=-C_1+C_2r^2, \qquad C_1={}^1/_{16}qa^2(3+\nu), \qquad C_2={}^1/_{16}q(1+3\nu) \tag{4}$$

Распределим далее момент (4) по линии, соответствующей разрезу на исходной пластинке. Тогда решение искомой задачи получим путем суперпозиции решений двух задач. Решение первой задачи определяется формулой (1) и никакой концентрации напряжений не содержит. Для решения второй задачи (задача о пластине, нагруженной моментом (4) по линии разреза) применим аппарат теории функций комплексного переменного.

В дальнейшем будем предполагать, что длина трещины мала по сравнению с радиусом пластины ($b\ll a$). Это позволяет временно отвлечься от граничного условия (шарнирного опирания) на внешнем контуре пластины и решать задачу о бесконечной пластине, нагруженной моментом по разрезу

$$W=\mathrm{Re}\,[\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)] \tag{5}$$

Решение бигармонического уравнения, выраженное через две аналитические функции φ и χ комплексного аргумента z, записывается следующим образом [3]:

$$W=\mathrm{Re}\,[\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)] \tag{6}$$

Граничное условие задачи (5) как частный случай первой граничной задачи для односвязных областей (наличие моментов и изгибающих усилий на контуре) сводится к уравнению [4]

$$-\frac{3+\nu}{1-\nu}\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f_1+if_2 \tag{7}$$

$$f_1+if_2=\frac{1}{D(1-\nu)}\int_0^s\left[m(s)+i\int_0^s p(s)\,ds\right][dx+idy]$$

$$p(s)=N_n+\partial H_{nt}/\partial s, \qquad \psi(z)=\chi'(z)$$

где N_n – перерезывающая сила, H_{nt} – крутящий момент.

В данном случае

$$f_1+if_2=-[D(1-\nu)]^{-1}[C_1t-{}^1/_3C_2t^3]$$

После применения конформного отображения

$$z=\omega(\zeta)={}^1/_2b(\zeta+1/\zeta) \tag{8}$$

переводящего разрез $r<b$ в единичную окружность, граничное условие (7) примет вид

$$\frac{3+\nu}{1-\nu}\varphi(\sigma)-\frac{\sigma^2+1}{\sigma(1-\sigma^2)}\overline{\varphi'(\sigma)}-\overline{\psi(\sigma)}=$$

$$=\frac{1}{D(1-\nu)}\left[C_1\frac{b}{2}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right)-\frac{C_2b^3}{24}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right)^3\right] \tag{9}$$

Пользуясь методами, предложенными в [3], получим следующее решение уравнения (9)

$$\varphi(\zeta)=-\frac{1}{(3+\nu)D}\left[\frac{1}{\zeta}\left(-\frac{C_2b^3}{8}-\frac{C_1b}{2}\right)+\frac{C_2b^3}{24\zeta^3}\right]$$

$$\psi(\zeta)=-\frac{3+\nu}{1-\nu}\varphi(\zeta)-\zeta\frac{1+\zeta^2}{\zeta^2-1}\varphi'(\zeta) \tag{10}$$

Выпишем известные асимптотические формулы Вильямса [1] изгиба пластин с трещиной, которые понадобятся в дальнейшем

$$\sigma_r=\frac{12M_r\delta}{h^3}=\frac{1}{r^{1/2}}\left\{\left[\cos\frac{3\theta}{2}-\frac{3+5\nu}{7+\nu}\cos\frac{\theta}{2}\right]\frac{3b_1G\delta}{2}+\right.$$

$$\left.+\left[-\sin\frac{3\theta}{2}+\frac{3+5\nu}{5+3\nu}\sin\frac{\theta}{2}\right]\frac{3b_2G\delta}{2}\right\}$$

$$\sigma_\theta=\frac{12M_\theta\delta}{h^3}=\frac{1}{r^{1/2}}\left\{\left[-\cos\frac{3\theta}{2}-\frac{5+3\nu}{7+\nu}\cos\frac{\theta}{2}\right]\frac{3b_1G\delta}{2}+\right.$$

$$\left.+\left[\sin\frac{3\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right]\frac{3b_2G\delta}{2}\right\} \tag{11}$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{12M_{r\theta}\delta}{h^3}=\frac{2}{r^{1/2}}\left\{\left[-\sin\frac{3\theta}{2}+\frac{1-\nu}{7+\nu}\sin\frac{\theta}{2}\right]\frac{3b_1G\delta}{2}+\right.$$

$$\left.+\left[-\cos\frac{3\theta}{2}+\frac{1-\nu}{5+3\nu}\cos\frac{\theta}{2}\right]\frac{3b_2G\delta}{2}\right\}$$

где r, θ – местная полярная система координат; b_1, b_2 – постоянные, зависящие от вида нагрузки; δ – координата, нормальная к срединной плоскости пластины.

Перейдем в этих формулах к переменной $z=z_1+r\exp(i\theta)$ (z_1 — положение вершины трещины) и введем согласно [1] комплексный коэффициент

$$K=K_1-iK_2,\qquad K_1=-\frac{3\sqrt{2}(3+\nu)}{7+\nu}Ghb_1,\qquad K_2=-\frac{3\sqrt{2}(3+\nu)}{5+3\nu}Ghb_2$$

Тогда из (11) получим следующую формулу

$$M_r+M_\theta=\frac{(1+\nu)h^2}{3\sqrt{2}(3+\nu)}\operatorname{Re}\left\{K\left[\frac{1}{z-z_1}\right]^{1/2}\right\}$$

Эту же сумму можно представить в виде

$$M_r+M_\theta=-4D(1+\nu)\operatorname{Re}\{\varphi'(z)\}$$

Приравнивая правые части двух последних формул и учитывая соотношение (8), получим

$$K=-(3+\nu)12Dh^{-2}b^{-1/2}\varphi'(\zeta)\,|_{\zeta=1} \tag{12}$$

Подставляя в формулу (12) выражение для $\varphi(\zeta)$ из (10), найдем

$$K=\frac{3q}{8}b^{1/2}\left[a^2(3+\nu)-\frac{1+3\nu}{2}b^2\right]h^{-2} \tag{13}$$

Для построения решения в случае пластины конечных размеров определим перемещение кругового контура $|z|=a$ на бесконечной пластине, пользуясь формулами (6), (10). С погрешностью $O(b^4/a^4)$ по сравнению с единицей будем иметь

$$W=\frac{C_1 b^2}{(3+\nu)4D}\cos 2\theta+\mathrm{const} \tag{14}$$

Заметим, что полученные ниже формулы для W и M_1 содержат погрешность того же порядка малости (в дальнейшем это обстоятельство отмечать не будем).

Определим далее момент M_1 на той же окружности, используя известные соотношения из [2]

$$M_1=M_x\sin^2\theta+M_y\cos^2\theta+2H_{xy}\cos\theta\sin\theta \tag{15}$$

Выражая компоненты M_x, M_y и H_{xy} через значение прогиба (6), после ряда преобразований получим

$$M_1=-D[2\mathrm{Re}\,\varphi'(z)(1+\nu)+\mathrm{Re}\,[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)](1-\nu)\cos 2\theta-\\-(1-\nu)\,\mathrm{Im}\,[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]\sin 2\theta] \tag{16}$$

Из выражения (16) с учетом (8), (10) найдем

$$M_1=\frac{b^2}{a^2}\frac{C_1}{2(3+\nu)}2\nu\cos 2\theta-\frac{b^2}{a^2}\frac{C_1}{2(3+\nu)}(\nu+1) \tag{17}$$

Следуя [1], приведем величину $K=K_1-iK_2$ для бесконечной пластины с трещиной, нагруженной распределенным моментом M_0

$$K_1=\frac{6M_0}{h^2}\sin^2\beta b^{1/2},\qquad K_2=\frac{6M_0}{h^2}\sin\beta\cos\beta b^{1/2} \tag{18}$$

где β – угол между направлением трещины и осью, нормальной вектору момента.

Из (18) следует, что отличие перемещения (14) и момента (17) на контуре $|z|=a$ от требуемых граничным условием значений $W=\mathrm{const}$ и $M_1=0$ вносит в решение (13) погрешность порядка $O(b^2/a^2)$ по сравнению с единицей.

Здесь необходимо отметить одно обстоятельство. Как будет показано ниже, приложив определенную нагрузку на бесконечности, можно «снять» с контура $|z|=a$ момент (17). При этом перемещение на контуре изменяется, но остается переменным. Можно, напротив, «снять» переменную часть перемещения (14), но тогда момент M_1 на контуре $|z|=a$ будет по-прежнему не равен нулю.

Погрешность решения после любой из этих корректировок граничных значений остается порядка $O(b^2/a^2)$ по сравнению с единицей. Однако специфика задачи заключается в том, что решение зависит от коэффициента Пуассона ν, который для многих материалов близок к 0.3. Оказывается, если добиваться постоянства перемещения на контуре $|z|=a$, то на нем возникает момент M_1, величина которого пропорциональна разности $3\nu-1$. Таким образом, хотя погрешность остается указанного выше порядка, точность решения растет с уменьшением $|3\nu-1|$, как это следует из формул (18).

Итак, проведем описанную корректировку граничных значений на контуре $|z|=a$ бесконечной пластины. Предварительно приложим к последней на бесконечности моменты

$$M_x=M_y=\frac{b^2}{a^2}\frac{C_1}{2(3+\nu)}(\nu+1) \tag{19}$$

При таком нагружении перемещение контура $|z|=a$ находится по формуле

$$W=\frac{1}{2(\nu^2-1)D}[(M_y-\nu M_x)x^2+(M_x-\nu M_y)y^2]+\mathrm{const} \tag{20}$$

которая вытекает из известных соотношений теории упругости [2] при $M_x=\mathrm{const}$ и $M_y=\mathrm{const}$ и оказывается постоянной величиной. Момент M_1 на том же контуре вычислим по формуле (15)

$$M_1=\frac{b^2}{a^2}\frac{C_1}{2(3+\nu)}(\nu+1) \tag{21}$$

Таким образом, изгиб (19) «снимает» постоянную часть момента (17) с контура $|z|=a$ и не «искажает» при этом перемещение (14).

Следующим шагом нагрузим пластину на бесконечности моментами

$$M_x=-M_y=[C_1b^2(1-\nu)]/[(3+\nu)2a^2] \tag{22}$$

Тогда по формуле (20) на контуре $|z|=a$ получим

$$W=-\frac{C_1b^2}{(3+\nu)4D}\cos 2\theta+\text{const} \tag{23}$$

Сравнивая между собой формулы (14) и (23), убеждаемся в том, что изгиб (22) «снимает» вдоль контура переменную часть перемещения (14) и, таким образом, граничное условие $W=\text{const}$ при $|z|=a$ выполняется. Момент M_1, возникающий на контуре $|z|=a$ вследствие изгиба (22), находим по формуле (15)

$$M_1=-\frac{C_1b^2(1-\nu)}{(3+\nu)2a^2}\cos 2\theta$$

В результате после корректировки граничных значений изгибами (19) и (22) момент M_1 будет равен

$$M_1=(3\nu-1)\cos 2\theta\frac{b^2C_1}{2a^2(3+\nu)} \tag{24}$$

Возвращаясь к формулам (18), получим следующее значение коэффициента K, учитывающее проведенную корректировку на круговом контуре $|z|=a$

$$K=3qb^{1/2}[a^2(3+\nu)]h^{-2}/8 \tag{25}$$

Формулы (18) вместе с (24) показывают, что, хотя погрешность решения (25) остается равной $O(b^2/a^2)$ по сравнению с единицей, точность последнего растет пропорционально $|3\nu-1|$.

В заключение оценим полученное значение K. Для этого несущественно изменим момент (4), заменив его постоянным моментом $M^*=-qa^2(3+\sigma)/16$. Накладывая на созданное поле напряжений чистый изгиб от момента $M=-M^*$, получим задачу, решение которой, следуя [1], имеет вид

$$K=6Mb^{1/2}h^{-2}=3qa^2b^{1/2}(3+\nu)h^{-2}/8$$

Это выражение несколько превышает значение (13), что объясняется увеличением момента, приложенного на разрезе, но совпадает с (25), что физически оправдано большей «жесткостью» конечной пластины по отношению к бесконечной.

Поступила 23 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sih G. C., Paris P. C., Erdogan F.* Crack-tip, stress-intensity factors for plane extension and plate bending problems. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Е, 1962, т. 29, № 2.)
2. *Филоненко-Бородич М. М.* Теория упругости. М., Физматгиз, 1959.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.
4. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. М.– Л., Гостехиздат, 1951.

УДК 539.3

К ТЕОРИИ ИЗГИБА БАЛОК ИЗ АРМИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. Н. УЛЬЯШИНА

(Москва)

Появление армированных материалов, обладающих сравнительно низкой жесткостью и прочностью в направлениях, не совпадающих с траекториями армирования, вызывает необходимость уточнения классических теорий изгиба балок, пластин и оболочек. В существующих прикладных теориях изгиба (см., например, обзор [12]) это уточнение в основном связано с учетом деформации поперечного сдвига, при