МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1976

УДК 539. 376

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНО СТАРЕЮЩИХ ТЕЛ

Н. Х. АРУТЮНЯН

(Ереван)

На основе работы [1] получена система исходных уравнений теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих тел, неоднородность которых обусловлена переменностью возраста материала в зависимости от пространственных координат, что в свою очередь обусловливает и определяет вид функции, характеризующей упругомгновенную деформацию и деформацию ползучести данного тела в зависимости от пространственных координат.

На основе приведенных уравнений дается решение некоторых граничных задач теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих тел. Эти уравнения показывают, что из-за некоммутативности операторов наследственности, описывающих свойства в различных точках неоднородно наследственно-стареющих тел (кроме некоторых частных случаев), принцип Вольтерра к ним неприменим.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Основное уравнение теории ползучести, выражающее связь между напряжениями и деформациями для наследственных сред, свойства которых меняются со временем, но не меняются в зависимости от координат, в случае малых деформаций и при одноосном напряженном состоянии имеет вид

$$\varepsilon_x(t)=\frac{\sigma_x(t)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}\sigma_x(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right]d\tau \tag{1.1}$$

где $E(t)$ — переменный модуль упругомгновенной деформации; τ — момент приложения напряжения $\sigma_x(\tau)$; $C(t, \tau)$ — мера ползучести, которая в области линейной ползучести не зависит от величины напряжения, но зависит как от возраста материала среды τ, так и от продолжительности действия нагрузки $t-\tau$.

Линейное реологическое уравнение (1.1) учитывает старение, наследственность материала среды, а также частичную необратимость деформации ползучести.

Такие среды получили название однородно наследственно-стареющих сред. Однородность наследственно-стареющих сред характеризуется тем, что у них возраст τ не зависит от пространственных координат, т. е. процесс старения протекает одинаково во всех точках среды. Из однородности среды по отношению к процессу старения непосредственно следует, что и функция ползучести, т. е. ядро оператора Вольтерра

$$K(t,\tau)=\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}=\frac{1}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right] \tag{1.2}$$

входящее в интегральное соотношение (1.1) и характеризующее реакцию стареющего материала среды на единичный импульс, приложенный в возрасте τ, также не будет зависеть от пространственных координат.

В случае объемного напряженного состояния основные уравнения теории ползучести для однородно наследственно-стареющих сред будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
&2G(t)\,\varepsilon_{ij}(t)=s_{ij}(t)+\int_{\tau_1}^{t}K_1(t,\tau)\,s_{ij}(\tau)\,d\tau\\
&E^*(t)\,\Theta(t)=\sigma(t)+\int_{\tau_1}^{t}K_2(t,\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau
\end{aligned}
\qquad (1.3)
$$

Здесь и далее $s_{ij}(t)$, $\varepsilon_{ij}(t)$ — девиаторы тензоров напряжений и деформаций; $\Theta(t)$ — объемная деформация; $\sigma(t)$ — среднее гидростатическое давление; $G(t)$ — мгновенный модуль сдвига; $E^*(t)$ — мгновенный модуль объемной деформации; $K_1(t,\tau)$, $K_2(t,\tau)$ — соответственно ядро сдвиговой и объемной деформации ползучести.

Ниже, на основе работы [1], приводятся исходные уравнения теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих тел, у которых возраст материала τ зависит от пространственных координат. Следовательно, функции $E(\tau)$, $C(t,\tau)$, характеризующие упругомгновенную деформацию и деформацию ползучести материала данного тела, будут также зависеть от пространственных координат. Очевидно, что основные уравнения теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих тел будут являться естественным обобщением реологических уравнений (1.1), (1.3).

Отметим, что неоднородность наследственно-стареющих тел можно описать при помощи ядер ползучести типа (1.2), когда они в общем случае зависят не только от временных координат t и τ, а также от пространственных координат x, y, z. Эта точка зрения развита в [2, 3], где на основе результатов [1] приведены реологические уравнения теории ползучести для неоднородных наследственно-стареющих тел. Здесь, исходя из технологических условий изготовления реальных конструкций, введем понятие неоднородно наследственно-стареющих тел, неоднородность которых обусловлена переменностью возраста материала в зависимости от пространственных координат, что в свою очередь обусловливает и определяет вид зависимости функции ползучести (1.2) от пространственных координат.

В дальнейшем будем считать, что модуль упругомгновенной деформации со временем не меняется.

Обозначим момент приложения напряжения к элементу неоднородно наследственно-стареющей среды через τ_0, а через τ_1^* — момент изготовления этого элемента (τ_1^* — момент времени, начиная с которого можно говорить о том, что механическое поведение данной среды описывается уравнениями теории ползучести неоднородно наследственно-стареющих сред).

Как и выше, t будем считать моментом наблюдения (абсолютным временем), причем начало отсчета времени может быть выбрано совершенно произвольно.

Далее обозначим через τ_1 возраст элемента среды в момент приложения напряжения. Очевидно, что

$$\tau_1=\tau_0-\tau_1^* \qquad (1.4)$$

Тогда основное реологическое уравнение для неоднородно наследственно-стареющей среды при одноосном напряженном состоянии может быть построено аналогичным путем, как и реологическое уравнение (1.1) для однородной среды, обладающей свойством наследственности и старения.

Оно будет иметь следующий вид:

$$\varepsilon_x(t)=\frac{\sigma_x(t)}{E}-\int_{\tau_0}^{t}\sigma(\tau)K(t-\tau_1^*,\ \tau-\tau_1^*)\,d\tau \tag{1.5}$$

где $K(t,\ \tau)$ — определяемое соотношением (1.2) ядро оператора Вольтерра реологического уравнения (1.1) для элемента однородно наследственно-стареющей среды, изготовленного в момент $\tau_1^*=0$.

Таким образом, ядро оператора Вольтерра уравнения (1.5), которое в дальнейшем обозначено $K^*(t,\ \tau)$, с ядром уравнения (1.1) $K(t,\ \tau)$ будет связано следующим соотношением:

$$K^*(t,\ \tau)=K(t-\tau_1^*,\ \tau-\tau_1^*) \tag{1.6}$$

Заметим, что в [1], при выводе основного уравнения теории ползучести (1.1) для однородно наследственно-стареющих сред, момент изготовления материала был принят за начало отсчета ($\tau_1^*=0$). Тогда $\tau_1=\tau_0$, $K^*(t,\ \tau)=K(t,\ \tau)$, и уравнения (1.1), (1.5) тождественно совпадают. Однако в случае зависимости возраста материала от координаты, функцию $\tau_1^*(x)$ нельзя приравнивать нулю во всех точках. Поэтому реологическое уравнение в форме (1.5) более пригодно для обобщения основных уравнений теории ползучести, развитой в [1], на случай неоднородно наследственно-стареющих сред.

Введем в уравнение (1.5) вместо момента изготовления материала τ_1^* возраст материала τ_1 в момент приложения напряжений τ_0. Положим для простоты, что при одноосном напряженном состоянии возраст материала τ_1 будет зависеть лишь от координаты x ($\tau_1=\tau_1(x)$). Тогда вследствие (1.4) реологическое уравнение (1.5) можно представить в виде

$$\varepsilon_x(t)=\frac{\sigma_x(t)}{E}-\int_{\tau_0}^{t}\sigma_x(\tau)K[t-\tau_0+\tau_1(x),\ \tau-\tau_0+\tau_1(x)]\,d\tau \tag{1.7}$$

Для определенности выберем в качестве начала отсчета времени момент изготовления элемента с координатой $x=0$ и введем возраст $\rho(x)$ относительно этого конца

$$\tau_1^*(0)=0,\qquad \tau_0=\tau_1(0),\qquad \rho(x)=\tau_1(x)-\tau_1(0) \tag{1.8}$$

Тогда реологическое уравнение (1.6) для неоднородно наследственно-стареющих сред примет следующую форму:

$$\varepsilon_x(t)=\frac{\sigma_x(t)}{E}-\int_{\tau_1(0)}^{t}\sigma_x(\tau)K[t+\rho(x),\ \tau+\rho(x)]\,d\tau \tag{1.9}$$

Реологическое уравнение (1.9) является основным уравнением теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред при одноосном напряженном состоянии в случае малых деформаций.

Если напряженное состояние в данной неоднородно наследственно-стареющей среде вызвано как воздействием внешних усилий, так и изменением ее деформаций вследствие наличия температурного поля, то уравнение (1.9) будет иметь вид

$$\varepsilon_x(t)=\frac{\sigma_x(t)}{E}-\int_{\tau_1(0)}^{t}\sigma_x(\tau)K[t+\rho(x),\ \tau+\rho(x)]\,d\tau+\alpha T(t,x) \tag{1.10}$$

где $T(t, x)$ — закон распределения температуры в среде, α — коэффициент температурного расширения среды.

В общем случае при объемном напряженном состоянии, согласно (1.3) *и изложенному выше, основные уравнения теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред примут вид*

$$2G\varepsilon_{ij}(t)=s_{ij}(t)+\int_{\tau_1(0,0,0)}^{t} K_1[t+\rho(x,y,z), \tau+\rho(x,y,z)]s_{ij}(\tau)d\tau \quad (1.11)$$

$$E^*\Theta(t)=\sigma(t)+\int_{\tau_1(0,0,0)}^{t} K_2[t+\rho(x,y,z), \tau+\rho(x,y,z)]\sigma(\tau)d\tau$$

$$\rho(x, y, z)=\tau_1(x, y, z)-\tau_1(0, 0, 0), \qquad \tau_0=\tau_1(0, 0, 0), \qquad \tau_1^*(0, 0, 0)=0$$

В этих формулах принято, что возраст материала τ_1 меняется в зависимости от пространственных координат x, y, z.

2. Решение некоторых задач теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих тел. Ниже будут рассмотрены задачи трех типов, решение которых можно получить на основе приведенных в п. 1 реологических уравнений теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих тел.

1°. *О релаксации напряжений в неоднородно-стареющем стержне при температурном воздействии.* Пусть стержень длины l на концах $x=0$, l защемлен и на него действует температурное поле $T(t, x)$.

Тогда, согласно (1.10), будем иметь

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\varepsilon_x(t)=\frac{\sigma_x(t)}{E}-\int_{\tau_1(0)}^{t} \sigma_x(\tau)K[t+\rho(x), \tau+\rho(x)]d\tau+\alpha T(t,x) \quad (2.1)$$

Здесь учтено, что в данном случае $\partial\sigma_x(x, t)/\partial x=0$, т. е. напряжения $\sigma_x(x, t)=\sigma_x(t)$ не зависят от координаты x. Требуется определить закон релаксации напряжений в стержне при граничных условиях $u(0, t)=u(l, t)=0$.

Для решения поставленной задачи проинтегрируем обе части соотношения (2.1) в пределах от нуля до x. В результате найдем

$$u(x,t)=\frac{\sigma_x(t)}{E}x-\int_0^x d\xi\int_{\tau_1(0)}^{t} \sigma_x(\tau)K[t+\rho(\xi), \tau+\rho(\xi)]d\tau+\alpha\int_0^x T(t,\xi)d\xi+D(t)$$

Учитывая нулевые граничные условия (в этом случае $D(t)=0$), получим следующее интегральное уравнение относительно неизвестных напряжений $\sigma_x(t)$ в стержне:

$$\sigma_x(t)-\int_{\tau_1(0)}^{t} K^*(t,\tau)\sigma_x(\tau)d\tau=f(t) \quad (2.2)$$

$$K^*(t,\tau)=\frac{E}{l}\int_0^l K[t+\rho(\xi), \tau+\rho(\xi)]d\xi, \qquad f(t)=-\frac{\alpha E}{l}\int_0^l T(t,\xi)d\xi$$

Отметим, что в случае однородно наследственно-стареющего стержня $\rho(x)\equiv 0$ и, следовательно, $K^*(t, \tau)=EK(t, \tau)$.

Выясним далее структуру ядра $K^*(t, \tau)$. Заметим, что согласно (1.2) $K(t, \tau)=\partial C(t, \tau)/\partial\tau$, поскольку было положено $E(\tau)=E$. Для меры ползучести $C(t, \tau)$ воспользуемся известным выражением из [1]

$$C(t, \tau)=\varphi(\tau) f(t-\tau) \tag{2.3}$$

где $\varphi(\tau)$ — функция, определяющая процесс старения материала (в дальнейшем будем называть ее функцией старения): эта функция с увеличением возраста τ монотонно убывает и стремится к некоторой постоянной C_0, называемой предельным значением меры ползучести материала в его старом возрасте; $f(t-\tau)$ — функция, характеризующая наследственные свойства материала, и в интервале $0 \leqslant t-\tau \leqslant \infty$, изменяющаяся в пределах $0 \leqslant f(t-\tau) \leqslant 1$.

Используя для аппроксимации $f(t-\tau)$ сумму экспоненциальных функций и ограничиваясь в этом разложении первыми двумя членами, получим [1]

$$C(t, \tau)=\varphi(\tau)\left[1-\exp\left[-\gamma(t-\tau)\right]\right] \tag{2.4}$$

Тогда ядро $K^*(t, \tau)$ будет определяться

$$K^*(t, \tau)=E\varphi_*'(\tau)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right]-\gamma E e^{-\gamma(t-\tau)}\varphi_*(\tau) \tag{2.5}$$

$$\varphi_*(\tau)=\frac{1}{l}\int_0^l \varphi[\tau+\rho(x)]\,dx$$

Из (2.5) следует, что ядро $K^*(t, \tau)$ интегрального уравнения (2.2) вырожденное и, следовательно, его можно свести к дифференциальному уравнению.

Следуя [1], можно показать, что решение интегрального уравнения (2.2) с ядром (2.5) эквивалентно решению дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$\sigma_x''(t)+\gamma\sigma_x'(t)\left[1+E\varphi_*(t)\right]=f''(t)+\gamma f'(t) \tag{2.6}$$

при начальных условиях

$$\sigma_x(t)\,|_{t=\tau_1}=f(\tau_1), \quad \sigma_x'(t)\,|_{t=\tau_1}=f'(\tau_1)-\gamma E f(\tau_1)\varphi_*(\tau_1), \quad \tau_1=\tau_1(0) \tag{2.7}$$

Более общее дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами получено в [1], где построено также его замкнутое решение. Это решение, применительно к уравнению (2.6) при начальных условиях (2.7), после некоторых преобразований можно представить в виде

$$\sigma_x(t)=f(t)-\gamma E f(\tau_1)\varphi_*(\tau_1)\int_{\tau_1}^t e^{-\eta_*(\tau)}\,d\tau-$$

$$-\gamma E\int_{\tau_1}^t e^{-\eta_*(\tau)}\,d\tau\int_{\tau_1}^{\tau} e^{\eta_*(z)}\varphi_*(z) f'(z)\,dz$$

$$\eta_*(\tau)=\gamma\int_{\tau_1}^{\tau}\left[1+E\varphi_*(z)\right]dz \tag{2.8}$$

Когда распределение температуры в стержне не зависит от времени $T(t, x)\equiv T(x)$, формула (2.8) упрощается и переходит в следующую:

---

[1] Условия, которым должны удовлетворять функция старения $\varphi(\tau)$, функция наследственности $f(t-\tau)$ и некоторые их приложения, приведены в обзорной статье [4]. Отметим, что этим методом могут быть получены решения для различных ядер, как например, $K(t, \tau)=g(\tau)h(t-\tau)$, где $h(t)=t^{-\alpha}e^{-\beta t}$ $(\beta>0,\ 0<\alpha<1)$.

$$\sigma_x(t)=-\alpha ET^*\left[1-\gamma E\varphi_*(\tau_1)\int_{\tau_1}^{t} e^{-\eta_*(\tau)}d\tau\right],\quad T^*=\frac{1}{l}\int_0^l T(x)\,dx \tag{2.9}$$

где T^* — средняя температура по длине стержня.

Если, следуя [1], для функции старения $\varphi(\tau)$ принять выражение

$$\varphi(\tau)=C_0+A_1/\tau \tag{2.10}$$

то функция $\varphi^*(\tau)$ в этом частном случае будет определяться формулой

$$\varphi_*(\tau)=C_0+\frac{A_1}{l}\int_0^l\frac{dx}{\tau+\rho(x)}$$

Параметры C_0, A_1 и γ, входящие в формулы (2.4), (2.10), характеризуют интенсивность изменения меры ползучести $C(t,\tau)$ как в молодом, так и в старом возрасте материала.

Рассмотрим простейший случай, когда возраст стержня по его длине изменяется по кусочно-постоянному закону

$$\tau_1(x)=\tau_1 \text{ при } 0\leqslant x<a$$
$$\tau_1(x)=\tau_2 \text{ при } a\leqslant x\leqslant l$$

Тогда, согласно (1.6)

$$\rho(x)=0 \text{ при } 0\leqslant x<a$$
$$\rho(x)=h_0=\tau_2-\tau_1 \text{ при } a\leqslant x\leqslant l$$

Далее, пользуясь формулами для $\varphi_*(\tau)$, $\eta_*(\tau)$ и принимая во внимание, что $\rho(x)=h_0H(x-a)=(\tau_2-\tau_1)H(x-a)$, где $H(x-a)$ – единичная функция Хевисайда, получим

$$\varphi_*(\tau)=\varphi(\tau)\frac{a}{l}+\varphi(\tau+\tau_2-\tau_1)\frac{l-a}{l}$$

$$\eta_*(\tau)=\gamma(\tau-\tau_1)+\gamma E\frac{a}{l}\int_{\tau_1}^{\tau}\varphi(z)\,dz+\gamma E\frac{l-a}{l}\int_{\tau_1}^{\tau}\varphi(z+\tau_2-\tau_1)\,dz$$

В частном случае, когда функция старения $\varphi(\tau)$ выражается формулой (2.10) для напряжения $\sigma_x(t)$, согласно (2.9), будем иметь следующее выражение:

$$\sigma_x(t)=-\alpha ET^*\left[1-\left(r_0-\gamma+\frac{q_1\gamma}{\tau_1}+\frac{q_2\gamma}{\tau_1+h_0}\right)\tau_1^{q_1\gamma}(\tau_1+h_0)^{q_2\gamma}e^{r_0\tau_1}\int_{\tau_1}^{t}e^{-r_0\tau}\tau^{-q_1\gamma}(\tau+h_0)^{-q_2\gamma}\,d\tau\right]$$

$$r_0=\gamma(1+C_0E),\qquad q_1=A_1E\frac{a}{l},\qquad q_2=A_1E\frac{l-a}{l},\qquad h_0=\tau_2-\tau_1$$

Таким образом, при температурном воздействии закон релаксации напряжений в неоднородно-стареющем стержне дается в виде квадратур.

2°. *О кручении неоднородно-стареющего призматического стержня с круговым или кольцевым поперечным сечением.* Определим тангенциальные напряжения в скрученном призматическом стержне с круговым или кольцевым поперечным сечением, изготовленном из неоднородно наследственно-стареющего материала. Для этого приведем основное реологическое уравнение однородно наследственно-стареющего стержня. Согласно [1], указанное уравнение в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\gamma_{z\varphi}(r,t)=\frac{\tau_{z\varphi}(r,t)}{G(t)}-\int_{\tau_1}^{t}\tau_{z\varphi}(r,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{G(\tau)}+\omega(t,\tau)\right]d\tau \tag{2.11}$$

$$G(t)=E(t)/2[1+\nu_1(t)],\qquad \omega(t,\tau)=2[1+\nu_2(t,\tau)]C(t,\tau)$$

Здесь $\gamma_{z\varphi}(r, t)$ — деформация сдвига, $\tau_{z\varphi}(r, t)$ — напряжение сдвига, $G(t)$ — переменный во времени модуль сдвига, $\nu_1(t)$ — коэффициент поперечного сжатия для упругомгновенной деформации, $\omega(t, \tau)$ — мера ползучести при чистом сдвиге, $\nu_2(t, \tau)$ — коэффициент поперечного сжатия для деформации ползучести.

В дальнейшем будем считать, что $G(t)=G$, $\nu_1(t)=\nu_2(t, \tau)=\nu=\mathrm{const}$[1]. Тогда формула (2.11) преобразуется к виду

$$G\gamma_{z\varphi}(r, t)=\tau_{z\varphi}(r, t)-E\int_{\tau_1}^{t} K(t, \tau)\,\tau_{z\varphi}(r, \tau)\,d\tau, \quad K(t, \tau)=\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \tag{2.12}$$

Пусть призматический стержень длины l с круговым или кольцевым поперечным сечением, ось которого совпадает с осью Oz, изготовлен из неоднородно наследственно-стареющего материала. На торцах $z=0$, $z=l$ приложены крутящие моменты величины $M(t)$. При этом будем считать, что возраст материала стержня во всех сечениях одинаков, а в радиальном направлении изменяется по произвольному закону. Введя в рассмотрение понятие возраста стержня относительно центра или внутренней окружности сечения (соответственно случаям сплошного кругового или кольцевого поперечного сечения), придем к функции $\rho(r)$, которая аналогична введенной выше функции $\rho(x)$. Тогда основное реологическое уравнение (2.2) в обсуждаемом случае неоднородно наследственно-стареющего стержня при помощи рассуждений, приведенных выше, запишется в виде

$$G\gamma_{z\varphi}(r, t)=\tau_{z\varphi}(r, t)-E\int_{\tau_1}^{t} K[t+\rho(r), \tau+\rho(r)]\,\tau_{z\varphi}(r, \tau)\,d\tau \tag{2.13}$$

Величина τ_1 в случае сплошного кругового сечения стержня радиуса a равна $\tau_1(0)$, а в случае кольцевого поперечного сечения (внутренний радиус b, внешний a), соответственно — $\tau_1(b)$.

Так как на основе гипотезы плоских сечений [5], $\gamma_{z\varphi}(r, t)=r\theta(t)$, где $\theta(t)$ — относительный угол закручивания стержня (крутка стержня), то уравнение (2.3) переходит в следующее:

$$rG\theta(t)=\tau_{z\varphi}(r, t)-E\int_{\tau_1}^{t} K[t+\rho(r), \tau+\rho(r)]\,\tau_{z\varphi}(r, \tau)\,d\tau \tag{2.14}$$

Реологическое уравнение (2.14) является разрешающим уравнением для задачи о кручении призматического стержня кругового или кольцевого поперечного сечения теории ползучести неоднородно наследственно-стареющих тел. В дальнейшем будем считать, что крутка стержня $\theta(t)$ постоянна во времени. Определим закон распределения тангенциальных напряжений в стержне в зависимости от времени t и координаты r.

Таким образом поставленная задача сводится к решению интегрального уравнения (2.14) (при $\theta(t)=\theta$), ядро которого, согласно (2.3) и (2.10), будет определяться формулой

$$K[t+\rho(r), \tau+\rho(r)]=-\frac{A_1}{[\tau+\rho(r)]^2}-e^{-\gamma(t-\tau)}\left\{\gamma C_0+\frac{\gamma A_1}{\tau+\rho(r)}-\frac{A_1}{[\tau+\rho(r)]^2}\right\}$$

[1] Отметим, что когда $\nu_2(t, \tau)\neq\mathrm{const}$, то принцип Вольтерра неприменим и при решении граничных задач теории ползучести для однородно наследственно-стареющих тел.

Из этой формулы следует, что ядро $K[t+s(r), \tau+s(r)]$ — вырожденное. Поэтому соответствующее интегральное уравнение можно свести к дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2\tau_{z\varphi}(r,t)}{dt^2}+\left[r_0+\frac{q_0}{t+\rho(r)}\right]\frac{d\tau_{z\varphi}(r,t)}{dt}=0 \qquad (2.15)$$

с начальными условиями

$$\tau_{z\varphi}(r,t)\,|_{t=\tau_1}=G\theta r, \quad \frac{d\tau_{z\varphi}(r,t)}{dt}\Big|_{t=\tau_1}=-\left[e_0+\frac{d_0}{\tau_1+\rho(r)}\right]r \qquad (2.16)$$

$$q_0=\gamma EA_1, \quad e_0=E\gamma G\theta C_0, \quad d_0=E\gamma G\theta A_1, \quad r_0=\gamma[1+C_0E]$$

Однородное дифференциальное уравнение (2.15), в котором r рассматривается как постоянный параметр, имеет ту же самую структуру, что и уравнение (2.6). Поэтому его решение можно построить аналогичным способом. После некоторых преобразований, решение дифференциального уравнения (2.15) при начальных условиях (2.16) запишется в виде

$$\tau_{z\varphi}(r,t)=rG\theta-\left[e_0+\frac{d_0}{\tau_1+\rho(r)}\right]re^{r_0\tau_1}\int\limits_{\tau_1}^{t}e^{-r_0\tau}\left[\frac{\tau_1+\rho(r)}{\tau+\rho(r)}\right]^{q_0}d\tau \qquad (2.17)$$

Итак, закон распределения тангенциальных напряжений $\tau_{z\varphi}(t, r)$ в неоднородно-стареющем стержне при его кручении будет определяться формулой (2.17). Этот закон является нелинейным в зависимости от r и определяется при помощи квадратур.

Крутящий момент $M(t)$ в стержне с круговым поперечным сечением будет определяться по формуле

$$M(t)=2\pi\int\limits_{b}^{a}r^2\tau_{z\varphi}(r,t)\,dr$$

а в случае стержня с кольцевым поперечным сечением

$$M(t)=2\pi\int\limits_{b}^{a}r^2\tau_{z\varphi}(r,t)\,dr$$

3°. *Контактная задача для полуплоскости со стрингером из неоднородно наследственно-стареющего материала.* Рассмотрим задачу Мелана [6] для полуплоскости в постановке теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих тел.

Пусть бесконечно длинный стрингер малой толщины h прикреплен к полуплоскости, находящейся в условиях плоской деформации. Будем считать, что материалы стрингера и полуплоскости обладают свойством ползучести, которое характеризуется неоднородностью процесса старения. Обозначим меру ползучести стрингера $C_1(t, \tau)$, переменный по его длине возраст — $\tau_1(x)$, модуль упругости — $E_1(t)$, а соответствующие характеристики для полуплоскости будут $C_2(t, \tau)$, $\tau_2(x)$ и $E_2(t)$. В дальнейшем примем, что $E_1(t)=E_1=\text{const}$, $E_2(t)=E_2=\text{const}$, $\tau_2=\text{const}$. Кроме того, как и выше, будем считать, что для материала полуплоскости коэффициенты поперечного сжатия для упругой деформации $\nu_1(t)$ и деформации ползучести $\nu_2(t, \tau)$ одинаковы и постоянны: $\nu_1(t)=\nu_2(t, \tau)=\nu$.

Пусть далее в момент времени τ_0 к границе, подкрепленной стрингером, приложена горизонтальная сила интенсивности $p_0(x, t)$. Требуется определить закон распределения контактных напряжений $q(x, t)$ на линии соединения стрингера с полуплоскостью. При этом, как обычно [6, 7], предполагается, что стрингер лишен изгибной жесткости и находится в одноосном напряженном состоянии. Тогда на линии соединения стрингера с полуплоскостью будут действовать только тангенциальные напряжения $q(x, t)$.

При этих предположениях выведем основное разрешающее уравнение. Предварительно определим напряженное состояние в стрингере. Основное реологическое уравнение стрингера, как и выше, имеет вид

$$\varepsilon_x^{(1)}(x,t)=\frac{\sigma_x(x,t)}{E_1}-\int_{\tau_0}^{t}K_1[t+\rho_1(x),\tau+\rho_1(x)]\sigma_x(x,\tau)\,d\tau$$

$$K_1(t,\tau)=\frac{\partial C_1(t,\tau)}{\partial\tau},\quad \rho_1(x)=\tau_1(x)-\tau_0=\tau_1(x)-\tau_1(0) \qquad (2.18)$$

где $\varepsilon_x^{(1)}(x, t)$ — осевая деформация стрингера, $\sigma_x(x, t)$ — осевое напряжение в стрингере.

Так как стрингер находится в одноосном напряженном состоянии, то, рассматривая равновесие его бесконечно малого элемента, будем иметь

$$h\frac{\partial\sigma_x(x,t)}{\partial x}=-p_0(x,t)-q(x,t)$$

где $q(x, t)$ — неизвестные тангенциальные контактные напряжения на линии соединения стрингера с полуплоскостью. Напряжения $\sigma_x(x, t)$ в стрингере при $x\to\pm\infty$ стремятся к нулю, поэтому

$$\sigma_x(x,t)=-\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{x}q(y,t)\,dy-\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{x}p_0(y,t)\,dy \qquad (2.19)$$

Уравнение (2.18) с учетом (2.19) примет вид

$$\varepsilon_x^{(1)}(x,t)=-\frac{1}{hE_1}\int_{-\infty}^{x}q(y,t)\,dy+\frac{1}{h}\int_{\tau_0}^{t}K_1[t+\rho_1(x),\tau+$$

$$+\rho_1(x)]\,d\tau\int_{-\infty}^{x}q(y,\tau)\,dy+p(x,t) \qquad (2.20)$$

$$p(x,t)=-\frac{1}{hE_1}\int_{-\infty}^{x}p_0(y,t)\,dy+\frac{1}{h}\int_{\tau_0}^{t}K_1[t+\rho_1(x),\tau+\rho_1(x)]\,d\tau\int_{-\infty}^{x}p_0(y,\tau)\,dy$$

Деформации $\varepsilon_x^{(2)}(x, t)$ граничных точек полуплоскости с учетом ползучести, при сделанных выше предположениях, определяются формулой

$$\varepsilon_x^{(2)}(x,t)=\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}=-\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q(y,t)}{y-x}\,dy+$$

$$+\frac{2(1-\nu^2)}{\pi}\int_{\tau_0}^{t}K_2(t+\rho_2,\ \tau+\rho_2)\,d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q(y,\tau)}{y-x}\,dy \qquad (2.21)$$

$$K_2(t,\tau)=\frac{\partial C_2(t,\tau)}{\partial\tau},\quad \rho_2=\tau_2-\tau_0,\quad \tau_0=\tau_1(0)$$

Здесь $u_2(x, t)$ — горизонтальные смещения граничных точек полуплоскости.

Учитывая граничное условие на линии соединения стрингера с полуплоскостью $\varepsilon_x^{(1)}(x,t)=\varepsilon_x^{(2)}(x,t)$ $(-\infty<x<\infty)$, получим основное разрешающее уравнение для определения неизвестных тангенциальных напряжений $q(x,t)$ в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi'(y,t)}{y-x}dy-\lambda\varphi(x,t)=E_2\int_{\tau_0}^{t}K_2(t+\rho_2,\tau+\rho_2)d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi'(y,\tau)}{y-x}dy-$$

$$-\mu\int_{\tau_0}^{t}K_1[t+\rho_1(x),\tau+\rho_1(x)]\varphi(x,\tau)d\tau-\theta p(x,t) \tag{2.22}$$

$$\varphi(x,t)=\int_{-\infty}^{x}q(y,t)dy,\quad \lambda=\frac{\pi E_2}{2(1-\nu^2)hE_1},\quad \mu=\frac{\pi E_2}{2(1-\nu^2)h}\quad \theta=\frac{\pi E_2}{2(1-\nu^2)}$$

где h — толщина стрингера; интегралы по x и y следует понимать в смысле главного значения Коши.

Таким образом, решение задачи Мелана в постановке теории ползучести неоднородно наследственно-стареющих сред, когда возраст стрингера по длине изменяется по произвольному закону, сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (2.22).

Решение этого уравнения при произвольной (определенного класса) функции $\rho_1(x)$ затруднительно. В частном случае, когда возраст стрингера не зависит от x, но отличен от возраста полуплоскости ρ_2, т. е. $\rho_1(x)=\rho_1=\mathrm{const}$ (не нарушая общности, можно принять $\rho_1=0$), решение интегро-дифференциального уравнения (2.22) можно получить в замкнутой форме. Применяя в этом случае к обеим частям уравнения (2.22) преобразование Фурье, приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$(\lambda+\pi|s|)\Phi(s,t)=\int_{\tau_0}^{t}[\mu K_1(t,\tau)+\pi E_2|s|K_2(t+\rho_2,\ \tau+\rho_2)]\Phi(s,\ \tau)d\tau-is\theta P(s,\ t) \tag{2.23}$$

где $\Phi(s,t)$, $P(s,t)$ — трансформанты Фурье соответственно для $\varphi'(y,t)$ и $p(y,t)$, s — параметр преобразования Фурье.

Для решения уравнения (2.23) меры ползучести материала стрингера $C_1(t,\tau)$ и полуплоскости $C_2(t,\tau)$ примем в форме (2.4):

$$C_1(t,\ \tau)=\varphi_1(\tau)[1-e^{-\gamma(t-\tau)}],\qquad C_2(t,\ \tau)=\varphi_2(\tau)[1-e^{-\gamma(t-\tau)}]$$

где $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ — функции, определяющие соответственно процесс старения материала стрингера и полуплоскости; для простоты принято $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$.

Тогда будем иметь

$$K_2(t,\ \tau)=\varphi_2'(\tau)-[\varphi_2(\tau)+\gamma\varphi_2(\tau)]e^{-\gamma(t-\tau)}$$

Можно показать, что решение интегрального уравнения (2.23) в этом случае эквивалентно решению дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$\Phi''(s,t)+A(s,t)\Phi'(s,t)=f(s,t) \tag{2.24}$$

с начальными условиями

$$
\begin{aligned}
&\Phi(s,t)\,|_{t=\tau_0} = -\frac{is\theta}{\lambda+\pi|s|}P(s,\tau)\\
&\Phi'(s,t)\,|_{t=\tau_0} = \gamma\theta[\mu\varphi_1(\tau_0)+\pi E_2|s|\varphi_2(\tau_2)]\times\\
&\qquad\times\frac{is}{(\lambda+\pi|s|)^2}P(s,\tau_0)-\frac{is\theta}{\lambda+\pi|s|}P'(s,\tau_0)
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

$$
A(s,t)=\frac{\gamma}{\lambda+\pi|s|}[\lambda+\pi|s|+\mu\varphi_1(t)+\pi E_2|s|\varphi_2(t+\tau_2-\tau_0)]
$$

$$
f(s,t)=-\frac{is\theta}{\lambda+\pi|s|}[P''(s,t)+\gamma P'(s,t)]
$$

где все производные берутся по времени.

Решение дифференциального уравнения (2.24) при начальных условиях (2.25) записывается в виде

$$
\Phi(s,t)=\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}\,d\tau\int_{\tau_0}^{\tau}e^{\eta(s,z)}f(s,z)\,dz+\Phi'(s,\tau_0)\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}\,d\tau+\Phi(s,\tau_0)
$$

$$
\eta(s,t)=\int_{\tau_0}^{t}A(s,\tau)\,d\tau
$$

После некоторых преобразований последнюю формулу можно представить в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
\Phi(s,t)=\frac{is\theta}{\lambda+\pi|s|}\Big\{&-P(s,t)+[A(s,\tau_0)-\gamma]P(s,\tau_0)\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}\,d\tau+\\
&+\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}\,d\tau\int_{\tau_0}^{\tau}[A(s,z)-\gamma]e^{\eta(s,z)}P'(s,z)\,dz\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Таким образом, решение исходного уравнения (2.22) будет определяться при помощи обратного преобразования Фурье

$$
\varphi'(x,t)=q(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(s,t)\,e^{-isx}\,ds \tag{2.27}
$$

Рассмотрим частный случай внешней нагрузки, $p_0(x,t)=P\delta(x)\times\times H(t-\tau_0)$, где $\delta(x)$ — функция Дирака, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, т. е. в момент времени $t=\tau_0$ к стрингеру прилагается сосредоточенная в начале координат $x=0$ сила величины P (которая затем остается постоянной во времени).

При указанной нагрузке (в формуле для $p(x,t)$ нужно положить $\rho_1(x)=0$) будем иметь [1]

$$
p(x,t)=-\frac{P}{hE_1}H(x)H(t-\tau_0)+\frac{P}{h}H(x)\int_{\tau_0}^{t}K_1(t,\tau)H(\tau-\tau_0)\,d\tau
$$

---

[1] Это означает, что сила P приложена к стрингеру в возрасте $\tau=\tau_1(0)=\tau_0$.

Далее находим

$$P(s,t)=\frac{P}{h}\left[\frac{1}{is}-\pi\delta(s)\right]\left\{\frac{1}{E_1}+\varphi_1(\tau_0)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau_0)}\right]\right\}, \quad t\geqslant\tau_0 \qquad (2.28)$$

Подставив $P(s, t)$ из формулы (2.28) в (2.26), получим

$$\Phi(s,t)=-P\frac{\lambda}{\lambda+\pi|s|}\left[1+\gamma\pi|s|\frac{E_1\varphi_1(\tau_0)-E_2\varphi_2(\tau_2)}{\lambda+\pi|s|}\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}\,d\tau\right] \qquad (2.29)$$

Таким образом, согласно (2.27) и (2.29), закон распределения контактных напряжений $q(x, t)$ будет выражаться квадратурами.

Если деформации ползучести стрингера и полуплоскости, вызванные постоянным напряжением, приложенным к ним в один и тот же момент времени (соответственно в различном возрасте τ_0 и τ_2), пропорциональны их упругим деформациям (имеет место равенство $E_1\varphi_1(\tau_0)=E_2\varphi_2(\tau_2)$), то для контактных напряжений $q(x, t)$, согласно (2.27) и (2.29), получим

$$q(x)=-\frac{P\lambda}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-isx}}{\lambda+\pi|s|}\,ds=\frac{\lambda_0 P}{\pi}(\cos\lambda_0 x\,\mathrm{Ci}\,\lambda_0 x+\sin\lambda_0 x\,\mathrm{Si}\,\lambda_0 x)$$

$$\lambda_0=\frac{E_2}{2(1-\nu^2)hE_1}$$

где $\mathrm{Ci}(x)$, $\mathrm{Si}(x)$ — интегральные косинус и синус функции.

Таким образом, распределение контактного напряжения $q(x)$ в этом случае оказывается не зависящим от времени t и определяется известной формулой Мелана [6], причем, как это видно из соотношений (2.20) и (2.21), деформации будут непостоянны во времени.

Полученные исходные уравнения теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих тел показывают, что из-за некоммутативности операторов наследственности, описывающих свойства в разных точках этих тел, (кроме некоторых частных случаев) принцип Вольтерра неприменим.

Институт механики АН АрмССР

Поступила 18 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.– Л., Гостехиздат, 1952.
2. *Савин Г. Н., Уразгильдяев К. У.* Влияние старения материала на напряженно-деформированное состояние около отверстий. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 5.
3. *Уразгильдяев К. У.* Плоская задача вязкоупругости для неоднородного материала. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 1.
4. *Арутюнян Н. Х.* Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона. В кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3. М., «Наука», 1972.
5. *Тимошенко С. П.* Сопротивление материалов, т. 1, 2. М., «Наука», 1965.
6. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ingr-Arch., 1932, Bd 3, H. 2.
7. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.