**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1976**

УДК 624.07:534.1

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

В. А. ТРОИЦКИЙ

(Ленинград)

Задачи оптимизации формы упругих элементов как при статических, так и при динамических нагрузках привлекают в последние годы очень большое внимание ученых и инженеров. Постановка их основывается на различных критериях оптимальности. Самым распространенным является, пожалуй, требование минимума веса или объема. Таким задачам минимизации веса посвящено очень большое число исследований [1, 2].

Среди них имеются работы, в которых решается задача минимизации веса упругого элемента при заданных собственных частотах. При этом используются методы вариационного исчисления [3–8] и новые методы теории оптимальных систем [9–11]. Процесс построения оптимальной формы базируется на исследовании одной из самосопряженных систем дифференциальных уравнений. В связи в этим можно, по-видимому, попытаться перейти к такой формулировке задачи оптимизации, в которой вторая система дифференциальных уравнений отсутствует.

Именно этот подход к задачам оптимизации формы упругих тел при свободных колебаниях используется ниже. Рассматриваются задача оптимизации частот и задача оптимизации веса. Устанавливаются связи между ними. Описывается численный метод решения этих оптимальных задач [12].

1. Постановка задачи. При вычислении собственных частот ω_k $k=1, 2,\ldots$ упругого тела можно пользоваться следующей формулой [13]:

$$\omega_k^2=\min\ (\Pi / T) \tag{1.1}$$

в которой под Π и T понимаются амплитудные значения потенциальной и кинетической энергий тела. Абсолютный минимум по всем допустимым смещениям упругого тела дает первую собственную частоту ω_1. Минимум при условии, что смещения ортогональны $k-1$ низшим собственным функциям, соответствует k-й собственной частоте ω_k.

Ограничимся рассмотрением технических теорий, таких, как сопротивление материалов, теория тонких стержней, теории тонких пластин и тонких оболочек. Для них энергии Π и T могут быть представлены в виде $\Pi=\Pi(u, F)$, $T=T(u, F)$, где через u обозначена совокупность смещений упругого тела, а через F — совокупность параметров, характеризующих его форму. Тогда вместо (1.1) будем иметь соотношение

$$\omega_k^2=\min_u[\Pi(u,F)/T(u,F)] \tag{1.2}$$

При заданных F абсолютный минимум соответствует первой частоте ω_1, а минимум по смещениям u, ортогональным первым $k-1$ собственным функциям,— собственной частоте ω_k.

В задаче оптимизации собственных частот ищутся такие функции F, при которых имеет место экстремум частоты или заданной функции частот. На упругое тело накладываются те или иные ограничения, отражающие задание граничных условий, размеров тела, его веса P или объема V и т. п.

Подчеркнем, что вес и объем упругого элемента могут быть выражены через параметры F, так что

$$V=V(F),\ P=P(F) \tag{1.3}$$

Тогда задача оптимизации становится достаточно сложной. Например, при разыскании максимума первой собственной частоты упругого элемента, имеющего заданный объем, смещения u и параметры F должны быть найдены из условия

$$\max_F \min_u [\Pi(u,F)/T(u,F)]$$

при выполнении требования $V=V_*$.

Нужно отметить, что функционал (1.3) проще функционала (1.2). По-видимому, этим, отчасти, объясняется то, что вместо задачи оптимизации частоты при заданном весе или объеме решается задача оптимизации веса или объема при заданной частоте. При этом в число связей задачи вводят, обычно, дифференциальные уравнения свободных колебаний, являющиеся уравнениями Эйлера для функционала Π/T. Это и приводит к необходимости изучения двух самосопряженных систем дифференциальных уравнений [9, 10].

Заметных упрощений можно добиться, если при оптимизации частоты ω_k предположить, что к сравнению допускаются лишь k-е собственные функции. Тогда можно будет использовать функционал

$$\omega_k^2=[\Pi(u,F)/T(u,F)] \tag{1.4}$$

при условии изопериметрического типа $V=V_*$. Расширенный функционал J будет иметь вид $J=\omega^2+\beta(V-V_*)$, где $\beta=\text{const}$ — неопределенный множитель Лагранжа. Если ограничиться рассмотрением необходимого условия стационарности $\Delta J=0$, то можно заметить, что первая вариация ΔJ состоит из слагаемых двух типов. Анализ слагаемых первого типа, зависящих от вариаций смещений, приведет к дифференциальным уравнениям свободных колебаний и к граничным условиям. Слагаемые второго типа, содержащие вариации параметров F, дают возможность составить условия оптимальности. Их можно использовать также при построении численных методов.

В задаче оптимизации веса при заданной частоте расширенный функционал J запишется в форме $J=V+\gamma(\omega^2-\omega_*^2)$. Изучение его приведет к описанным выше результатам. Сравнительный анализ расширенных функционалов позволит установить двойственные связи, существующие между указанными задачами.

Перейдем к рассмотрению конкретных задач оптимизации при свободных колебаниях упругих элементов.

2. Свободные продольные колебания прямолинейных стержней первого тона. Амплитудные значения T и Π кинетической и потенциальной энергий и объем стержня представляются формулами

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l \rho F u^2\,dx,\qquad \Pi=\frac{1}{2}\int_0^l EF(u')^2dx,\qquad V=\int_0^l F dx \tag{2.1}$$

Здесь u — продольное смещение сечений стержня, F — площадь сечения, ρ и E — плотность и модуль Юнга материала стержня, l — его длина. При разыскании максимума первой собственной частоты нужно использовать формулы (1.4) и (2.1) и выражение $J=\omega_1^2+\beta(V-V_*)$. Воспользовавшись необходимым условием стационарности получим равенство [14]

$$\Delta J = \frac{1}{T}\left\{-\int_0^l [(EFu')' + \rho\omega_1^2 Fu]\delta u\, dx + EFu'\delta u|_0^l + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^l [E(u')^2 - \rho\omega_1^2 u^2 + 2\beta T]\delta F\, dx\right\} = 0$$

Приравняв нулю два первых члена этой суммы, получим уравнение свободных продольных колебаний стержня

$$(EFu')' + \rho\omega_1^2 Fu = 0 \tag{2.2}$$

и граничные условия

$$EFu'\delta u|_0^l = 0 \tag{2.3}$$

Остается выражение

$$\Delta J = \frac{1}{2T}\int_0^l [E(u')^2 - \rho\omega_1^2 u^2 + 2\beta T]\delta F\, dx \tag{2.4}$$

которое приводит к условию оптимальности

$$E(u')^2 - \rho\omega_1^2 u^2 + 2\beta T = 0 \tag{2.5}$$

совпадающему с найденным в работах [5, 10] более сложным путем.

Соотношение (2.4) можно использовать для построения градиентной численной процедуры. Предположим, что $\overline{F} = \overline{F}(x)$ задано. Подставим эту функцию в уравнение (2.2) и решим его при граничных условиях (2.3). Будем иметь смещение $\overline{u} = \overline{u}(x)$. Подставим его в равенство (2.4) и составим формулу

$$\delta F = \alpha[2\beta\overline{T} + E(\overline{u}')^2 - \rho\overline{\omega}_1^2\overline{u}^2] \quad (0 < \alpha \leqslant 1)$$

которая обеспечивает наибольшее значение ΔJ. Постоянную β выберем так, чтобы выполнялось условие $V = V_*$, приводящееся к требованию

$$\int_0^l \delta F\, dx = 0$$

Тогда будем иметь

$$2\beta\overline{T}l = -\int_0^l [E(\overline{u}')^2 - \rho\overline{\omega}_1^2\overline{u}^2]dx$$

Следующее приближение для функции $F(x)$ имеет вид

$$\overline{\overline{F}}(x) = \overline{F}(x) + \delta F(x) \tag{2.6}$$

Вычисления продолжаются до тех пор, пока не будет выполняться неравенство

$$|\delta F| \leqslant \varepsilon \tag{2.7}$$

где ε — заданное малое число.

В задаче оптимизации объема при заданной первой собственной частоте ω_1 нужно использовать расширенный функционал $J = V + \gamma(\omega_1^2 - \omega_*^2)$. Необходимое условие стационарности приводит к равенству

$$\Delta J = \frac{\gamma}{T}\left\{-\int_0^l [(EFu')' + \rho\omega_1^2 Fu]\delta u\, dx + EFu'\delta u|_0^l\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2T}\int_0^l \{\gamma[E(u')^2 - \rho\omega_1^2 u^2] + 2T\}\delta F\, dx = 0$$

С его помощью легко строится уравнение (2.2), граничные условия (2.3) и соотношение

$$\Delta J=\frac{1}{2T}\int_0^l \{\gamma[E(u')^2-\rho\omega_1^2u^2]+2T\}\delta F\,dx$$

справедливое при выполнении уравнения (2.2) и условий (2.3). Отсюда легко находится условие оптимальности, которое после замены $\gamma=1/\beta$ в точности совпадает с формулой (2.5).

При построении численной процедуры нужно использовать формулу

$$\delta F=\alpha\{\gamma[E(\bar u')^2-\rho\bar\omega_1^2\bar u^2]+2\bar T\}\qquad(0<\alpha\leqslant 1)$$

Постоянная γ находится из условия $\omega_1=\omega_*$. Нетрудно убедиться, что оно приводит к соотношению

$$\int_0^l [E(\bar u')^2-\rho\bar\omega_1^2\bar u^2]\delta F\,dx=0$$

на основании которого будем иметь

$$\gamma=2\bar T\int_0^l [E(u')^2-\rho\bar\omega_1^2\bar u^2]dx\left\{\int_0^l (E(\bar u')^2-\rho\bar\omega_1^2\bar u^2]^2dx\right\}^{-1}$$

Отметим, что решением задачи минимизации объема без дополнительных ограничений может оказаться функция $F(x)\equiv0$ и величина $V=0$.

Сопоставление задачи оптимизации частоты при заданном объеме и задачи оптимизации объема при заданной частоте показывает, что, построив решение одной из них, можно составить формулировку другой, имеющей то же самое решение.

Здесь не рассматривались ограничения на площадь поперечного сечения. Если такое ограничение задается неравенством $F_1\leqslant F(x)\leqslant F_2$, то учет его может быть осуществлен так же, как в теории оптимальных систем [15–17]. В соответствии с этим вводится вспомогательная функция $\psi=(F-F_1)(F_2-F)-v^2$, где v – вещественный параметр, и дополнительная связь $\psi=0$ вариационной задачи. Тогда, например, при оптимизации объема V рассматривается расширенный функционал $J=V+\gamma(\omega_1^2-\omega_*^2)+\mu\psi$.

Не останавливаясь на соответствующих выкладках, укажем, что наряду с оптимальным решением, определяемым равенством (2.5), придется изучить возможные оптимальные решения $F=F_1$ и $F=F_2$ и последовательные комбинации двух или всех трех оптимальных решений.

При проведении вычислений градиентным методом можно переходить к граничным значениям $\bar{\bar F}(x)=F_1$ или $\bar{\bar F}(x)=F_2$ в случаях $\bar{\bar F}(x)\leqslant F_1$ или $\bar{\bar F}(x)\geqslant F_2$ или же перестроить методику, введя в нее метод штрафных функций [18].

В задачах оптимизации формы стержней при наличии сосредоточенных масс или упругих закреплений кинетическая и потенциальная энергии должны быть дополнены слагаемыми $M_i\omega_1^2u^2(x_i)/2$ и $c_iu^2(x_i)/2$, M_i — масса, сосредоточенная в сечении x_i, а c_i – коэффициент жесткости закрепления сечения x_i. Все рассуждения и выкладки, описанные выше, сохранят свою силу.

3. Свободные продольные колебания стержней высших тонов. В задаче оптимизации частоты ω_k при заданном объеме расширенный функционал J имеет вид $J=\omega_k^2+\beta(V-V_*)$. В соответствии с необходимым условием стационарности J получим дифференциальное уравнение свободных колебаний k-го тона

$$(EFu')'+\rho\omega_k^2Fu=0\qquad(3.1)$$

Концевые условия (2.3) и равенство

$$\Delta J = \frac{1}{2T}\int_0^l [E(u')^2 - \rho\omega_k^2 u^2 + 2\beta T]\,\delta F\,dx = 0$$

приводят к условию оптимальности $E(u')^2 - \rho\omega_k^2 u^2 + 2\beta T = 0$, где под u нужно понимать k-ю собственную функцию.

При построении градиентного процесса опять считаем заданной функцию $\bar{F} = \bar{F}(x)$. После подстановки ее в уравнение (3.1) в соответствии с условиями (2.3) получим k-ю собственную функцию $\bar{u}_k(x)$ и k-ю собственную частоту $\bar{\omega}_k$. Составим функцию

$$\delta F = \alpha[2\beta\bar{T} + E(\bar{u}_k')^2 - \rho\bar{\omega}_k^2\bar{u}_k^2] \qquad (0 < \alpha \leqslant 1)$$

$$2\beta\bar{T}l = -\int_0^l [E(u_k')^2 - \rho\bar{\omega}_k^2\bar{u}_k^2]\,dx$$

Следующее приближение для функции $F(x)$ находится с помощью формулы (2.6). Вычисления заканчиваются при выполнении неравенства $|\delta F| \leqslant \varepsilon$.

Так же, как это делалось выше, может быть изучена задача минимизации объема при заданной частоте ω_k и установлены связи между нею и рассмотренной выше задачей. Аналогично описанному выше строится градиентная процедура и формулы, позволяющие учитывать дополнительные ограничения.

Особый интерес представляет задача оптимизации разности между смежными собственными частотами. В связи с этим остановимся на исследовании функционала $\omega_2^2 - \omega_1^2$. Будем искать функцию $F(x)$, сообщающую максимум этой разности при заданном объеме $V = V_*$. Расширенный функционал запишется в форме $J = \omega_2^2 - \omega_1^2 + \beta(V - V_*)$, причем под ω_1^2 и ω_2^2 следует понимать выражения

$$\omega_1^2 = \Pi_1/T_1 = \int_0^l EF(u_1')^2 dx \Big/ \int_0^l \rho F u_1^2 dx$$

$$\omega_2^2 = \Pi_2/T_2 = \int_0^l EF(u_2')^2 dx \Big/ \int_0^l \rho F u_2^2 dx$$

а под $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — первую и вторую собственные функции.

Первая вариация функционала J имеет вид

$$\Delta J = \frac{1}{T_1}\left\{\int_0^l [(EFu_1')' + \rho\omega_1^2 F u_1]\,\delta u_1\,dx - EFu_1'\delta u_1|_0^l\right\} -$$

$$-\frac{1}{T_2}\left\{\int_0^l [(EFu_2')' + \rho\omega_2^2 F u_2]\,\delta u_2\,dx - EFu_2'\delta u_2|_0^l\right\} +$$

$$+\int_0^l \left\{-\frac{1}{2T_1}[E(u_1')^2 - \rho\omega_1^2 u_1^2] + \frac{1}{2T_2}[(E(u_2')^2 - \rho\omega_2^2 u_2^2] + \beta\right\}\delta F\,dx$$

Приравняв ее нулю, найдем дифференциальные уравнения вида (3.1) при $k=1$ и $k=2$, граничные условия (2.3) для обеих функций u_1 и u_2 и условие оптимальности

$$\beta - \frac{1}{2T_1}[E(u_1')^2 - \rho\omega_1^2 u_1^2] + \frac{1}{2T_2}[E(u_2')^2 - \rho\omega_2^2 u_2^2] = 0$$

Дальнейшее решение задачи может быть получено при численном задании параметров.

Опишем градиентную процедуру. Считаем функцию $\bar{F}=\bar{F}(x)$ заданной. Подставим ее в уравнение (3.1) и, воспользовавшись условиями (2.3), найдем первые и вторые собственные частоты $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ и собственные формы $\bar{u}_1(x)$ и $\bar{u}_2(x)$. Вычислим функцию

$$\delta F(x)=\alpha\left\{\beta-\frac{1}{2\bar{T}_1}[E(\bar{u}_1')^2-\rho\bar{\omega}_1^2\bar{u}_1^2]+\frac{1}{2\bar{T}_2}[E(u_2')^2-\rho\bar{\omega}_2^2\bar{u}_2^2]\right\}$$

Входящий в нее параметр β определяется по формуле

$$\beta l=\frac{1}{2\bar{T}_1}\int_0^l[E(\bar{u}_1')^2-\rho\bar{\omega}_1^2\bar{u}_1^2]dx-\frac{1}{2\bar{T}_2}\int_0^l[E(\bar{u}_2')^2-\rho\bar{\omega}_2^2\bar{u}_2^2]dx$$

которая получается из условия $V=V_*$, приводящего к равенству

$$\int_0^l\delta F\,dx=0$$

Следующее приближение $\bar{\bar{F}}(x)$ можно найти с помощью равенства (2.6). Вычисления продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено неравенство (2.7).

Отметим здесь, что и при оптимизации высших частот в задачу могут быть внесены изменения, описанные при рассмотрении задачи оптимизации первой частоты. Они изучаются так же, как это делалось выше.

4. Свободные поперечные колебания стержней. В задаче о свободных поперечных колебаниях стержней с прямолинейной осью амплитудные значения кинетической и потенциальной энергий определяются формулами

$$2T=\int_0^l\rho Fv^2\,dx,\qquad 2\Pi=\int_0^l EA(v'')^2dx$$

Здесь v — поперечное смещение сечений стержня, а A — момент инерции сечений относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба. Объем стержня дается третьим соотношением (2.1).

При оптимизации k-й собственной частоты при заданном объеме следует использовать расширенный функционал $J=\omega_k^2+\beta(V-V_*)$.

Первая вариация его имеет вид

$$\Delta J=\frac{1}{T}\left\{\int_0^l[(EAv'')''-\rho\omega_k^2Fv]\delta v\,dx-(EAv'')'\delta v|_0^l+EAv''\delta v'|_0^l+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^l\left[E\frac{dA}{dF}(v'')^2-\rho\omega_k^2v^2+2\beta T\right]\delta F\,dx\right\}$$

Приравняв ее нулю и воспользовавшись основной леммой вариационного исчисления, получим дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний k-го тона

$$(EAv'')''-\rho\omega_k^2Fv=0\tag{4.1}$$

граничные условия

$$(EAv'')'\delta v|_0^l=0,\qquad (EAv'')\delta v'|_0^l=0\tag{4.2}$$

и условие оптимальности

$$E(dA/dF)(v'')^2-\rho\omega_k^2v^2+2\beta T=0\tag{4.3}$$

которое совпадает с условием, приведенным в работах [5, 10].

В задаче оптимизации объема при заданной собственной частоте ω_k расширенный функционал имеет вид $J=V+\gamma(\omega_k^2-\omega_*^2)$. Повторение описанных выше выкладок приведет к уравнению (4.1), граничным условиям (4.2) и условию оптимальности

$$\gamma[E(dA\,/\,dF)(v'')^2-\rho\omega_k^2v_k^2]+2T=0$$

Оно лишь обозначениями отличается от условия (4.3).

Задача оптимизации разности смежных частот ω_1 и ω_2 имеет расширенный функционал $J=\omega_2^2-\omega_1^2+\beta(V-V_*)$. Здесь считается заданным объем. Для собственных функций v_1 и v_2 и собственных частот ω_1 и ω_2 опять получится уравнение вида (4.1) и граничные условия (4.2). Условие оптимальности запишется в форме

$$2\beta-\frac{1}{T_1}\left[E\frac{dA}{dF}(v'')^2-\rho\omega_1^2v_1^2\right]+\frac{1}{T_2}\left[E\frac{dA}{dF}(v_2'')^2-\rho\omega_2^2v_2^2\right]=0$$

Здесь v_1, v_2 и ω_1, ω_2 — первые собственные функции и собственные значения уравнения (4.1) при граничных условиях (4.2).

Приведем численную процедуру, использующую градиентный метод. Будем рассматривать сначала задачу оптимизации частоты ω_k при заданном объеме. Считаем $\bar{F}=\bar{F}(x)$ заданной и удовлетворяющей условию $\bar{V}=V_*$. Подставим ее в уравнение (4.1) и найдем k-ю собственную функцию $\bar{v}_k$ и частоту $\bar{\omega}_k$ при граничных условиях (4.2). Тогда для приращения функционала будем иметь

$$\Delta J=\frac{1}{2\bar{T}}\int\limits_0^l\left[E\frac{dA}{dF}(\bar{v}_k'')^2-\rho\bar{\omega}_k^2\bar{v}_k^2+2\beta\bar{T}\right]\delta F\,dx$$

В соответствии с этой формулой вычислим функцию

$$\delta F=\alpha[E(dA/dF)(\bar{v}_k'')^2-\rho\bar{\omega}_k^2\bar{v}_k^2+2\beta\bar{T}]\ (0<\alpha\leqslant 1)$$

и из условия $V=V_*$ найдем величину

$$2\beta\bar{T}l=-\int\limits_0^l\left[E\frac{dA}{dF}(\bar{v}_k'')^2-\rho\bar{\omega}_k^2\bar{v}_k^2\right]dx$$

Построим приближение $\bar{\bar{F}}=\bar{F}+\delta F$. Вычисления продолжаем до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $|\delta F|\leqslant\varepsilon$.

Аналогично изложенному строится градиентная процедура и для других функционалов. Например, в случае оптимизации разности частот нужно пользоваться формулой

$$\delta F=\alpha\left\{2\beta-\frac{1}{\bar{T}_1}\left[E\frac{dA}{dF}(\bar{v}_1'')^2-\rho\bar{\omega}_1^2\bar{v}_1^2\right]+\frac{1}{\bar{T}_2}\left[E\frac{dA}{dF}(\bar{v}_2'')^2-\rho\bar{\omega}_2^2\bar{v}_2^2\right]\right\}$$

причем β находится из соотношения

$$2\beta l=\int\limits_0^l\left\{\frac{1}{T_1}\left[E\frac{dA}{dF}(\bar{v}_1'')^2-\rho\bar{\omega}_1^2\bar{v}_1^2\right]-\frac{1}{T_2}\left[E\frac{dA}{dF}(\bar{v}_2'')^2-\rho\bar{\omega}_2^2\bar{v}_2^2\right]\right\}dx$$

Различные ограничения учитываются так, как это делалось выше.

5. Заключительные замечания. Задачи оптимизации веса или объема стержня при продольных колебаниях решались аналитически в работах [4,5,10]. Описанными приемами могут быть решены и задачи оптимизации первой или высшей собственной частоты при заданном весе или объеме.

Задачи оптимизации веса стержня при поперечных колебаниях допускают аналитическое решение при линейной зависимости момента инерции сечения от его площади. В общем случае решение может быть найдено лишь численными методами. Эти же методы могут быть использованы и при решении задач оптимизации частоты при заданном весе.

Численные методы нужно использовать и при построении решения задач оптимизации разности смежных собственных частот продольных или поперечных колебаний прямолинейных стержней. При этом можно применять описанный выше градиентный метод.

Нужно отметить, что процесс построения оптимальной формы стержня с помощью градиентного метода в описанных выше задачах обязательно содержит определение собственных частот и форм колебаний. Эта задача о собственных частотах может быть решена как задача о собственных значениях и собственных функциях для дифференциальных уравнений продольных или поперечных колебаний при соответствующих граничных условиях. Однако при нахождении собственных частот и форм можно использовать и другие методы, например вариационные и энергетические методы или методы последовательных приближений. Они не всегда требуют построения дифференциальных уравнений свободных колебаний. Однако, применяя их, нужно помнить, что в условие оптимальности входят собственные формы и их производные. Поэтому оценку точности вычислений нужно производить по формам, а не по частотам.

Нужно отметить еще, что описанные выше построения без особого труда распространяются на другие одномерные элементы, такие, как естественно закрученные стержни, стержни с криволинейной осью, круглые пластины или цилиндрические оболочки при симметричных колебаниях и т. п. Более важной является возможность распространения их на двумерные упругие элементы. Среди них нужно указать тонкие пластины и тонкие оболочки произвольных очертаний. При построении оптимальных решений в соответствующих оптимальных задачах много внимания и времени потребует процесс определения собственных форм.

Поступила 11 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prager W.* Optimization of structural designs. J. Optimizat. Theory and Appl., 1970, vol. 6, No. 1.
2. *Ниордсон Ф. И., Педерсен П.* Обзор исследований по оптимальному проектированию конструкций. Механика. Сб. перев., 1973, № 2.
3. *Niordson F. I.* On the optimal design of a vibrating beam. Quart. Appl. Math., 1965, vol. 23, No. 1.
4. *Taylor J. E.* Minimum-mass bar for axial vibration at specified natural frequency. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 10. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 10.)
5. *Turner J. M.* Design of minimum-mass structures with specified natural frequencies. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 3. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 3.)
6. *Cardou A., Warner W. H.* Minimum-mass design of sandwich-structures with frequency and section constraints. J. Optimizat. Theory and Appl., 1974, vol. 15, No. 1.
7. *Masur E. F.* Optimal placement of available sections in structural eigenvalue problems. J. Optimizat. Theory and Appl., 1975, vol. 15, No. 1.
8. *Warner W. H., Vavrick D. J.* Optimal design in axial motion for several frequency constraints. J. Optimizat. Theory and Appl., 1975, vol. 15, No. 1.
9. *Лурье А. И.* Применение принципа максимума к простейшим задачам механики. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 252, 1965.
10. *Гринев В. Б., Филиппов А. П.* Оптимальное проектирование конструкций, имеющих заданные собственные частоты. Прикл. механ., 1971, т. 7, вып. 10.
11. *Лепик Ю. Р.* Применение принципа максимума Понтрягина в задачах прочности, устойчивости и колебаний тонкостенных конструкций (обзор). Механика. Сб. перев. 1974, № 6.
12. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М., «Мир», 1972.
13. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики, ч. 1, 2. М.– Л., Гостехиздат, 1945.
14. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
15. Теория оптимальных аэродинамических форм (под ред. А. М. Миеле). М., «Мир», 1969.
16. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета (под ред. Дж. Лейтмана). М., «Наука», 1965.
17. *Троицкий В. А.* Вариационные методы решения задач оптимизации процессов управления. В сб.: Оптимальные системы. Статистические методы. Тр. 3 Всес. совещания по автоматическому управлению. М., «Наука», 1967.
18. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. Единый подход. М., «Мир», 1974.