

СТАЦИОНАРНЫЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЗАПОЛНИТЕЛЬ

Ю. В. МАСТИНОВСКИЙ, Ю. И. НАГОРНЫЙ

(Запорожье)

Обширная библиография по волновым процессам деформации тонкостенных конструкций содержится в обзорном докладе [1]. Распространение свободных неосесимметричных волн в оболочках изучалось в статье [2]. Исследование некоторых задач по динамике оболочек с наполнителем проведено в работах [3-5].

Ниже изучаются дисперсионные соотношения при распространении свободных неосесимметричных волн в бесконечной цилиндрической оболочке, содержащей упругий наполнитель. Деформации оболочки описываются линейными уравнениями теории пологих оболочек с учетом сдвига и инерции вращения, а также реакций наполнителя. Для наполнителя принимается приближенная модель, в которой осевое и окружное перемещения полагаются равными нулю. Сохраняется лишь радиальная составляющая перемещения и соответствующее ему одно уравнение теории упругости [4, 5]. Принятое допущение оправдывается малой величиной касательных перемещений по сравнению с нормальными в пологих оболочках. Предполагается, что указанное соотношение между перемещениями сохранится и в наполнителе.

Получены дисперсионные уравнения, на основе которых вычислены фазовые скорости волн при различных значениях параметров наполнителя.

1. Неосесимметричные уравнения движения оболочки с учетом реакций наполнителя, деформаций сдвига и инерции вращения элемента имеют вид (фиг. 1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{Eh} q_x = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{kG(1-\nu^2)}{ER} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \alpha_y \right) + \\ \frac{1-\nu^2}{Eh} q_y = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$kG \left(\nabla^2 w - \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right) - \frac{E}{R(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{q_z}{h} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned} KGh \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha_x \right) + D \left(\frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial y \partial x} \right) + D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial x \partial y} \right) + \\ + q_x \frac{h}{2} = \rho I \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} kGh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \alpha_y \right) + D \left(\frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial x \partial y} \right) + D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial x \partial y} \right) + \\ + q_y \frac{h}{2} = \rho I \frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial t^2} \end{aligned}$$

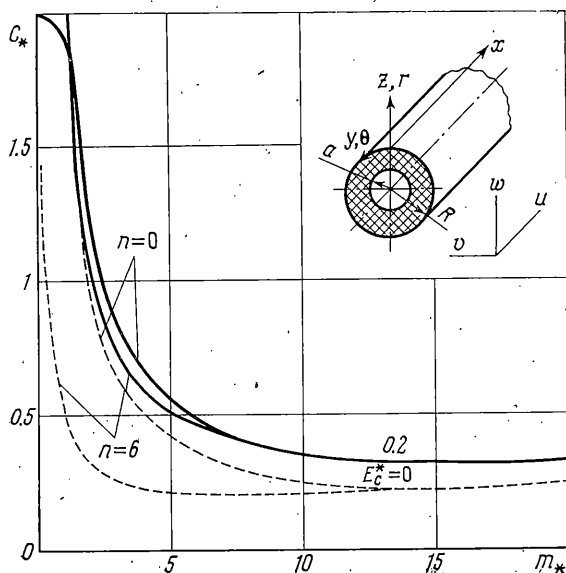
Здесь α_x, α_y — углы поворота нормалей, q_x, q_y, q_z — составляющие реакции заполнителя, $k = \frac{2}{3}$.

Рассматривая распространение синусоидальных волн, неизвестные функции $u, v, w, \alpha_x, \alpha_y$ представим следующими функциями координат и времени:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ W \\ \alpha_x \\ \alpha_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \cos ny / R \\ V_0 \sin ny / R \\ w_0 \cos ny / R \\ a_x \cos ny / R \\ a_y \sin ny / R \end{pmatrix} \exp [i (mx - \omega t)] \quad (1.2)$$

где u_0, v_0, w_0, a_x, a_y — постоянные, $m = 2\pi/\lambda_f, \omega = c_f m; \lambda_f$ и c_f — длина и фазовая скорость волн, n — число волн по окружности, $i = \sqrt{-1}$.

Составляющие реакции заполнителя находятся из уравнения движения заполнителя.



Фиг. 1

2. Представим заполнитель моделью, в которой учитывается только радиальное перемещение u_r , а $u_x = u_y = 0$. Движение такой модели описывается одним уравнением теории упругости относительно u_r [4, 5].

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1-2\nu_c}{2(1-\nu_c)} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) - \frac{(1+\nu_c)(1-2\nu_c)}{1-\nu_c} \frac{\rho_c}{E_c} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

Здесь r, θ и x — координаты вдоль радиуса, по дуге и вдоль оси. Граничные условия на боковых поверхностях заполнителя будут

$$u_r = w, q_z = -\sigma_r, r = R; \sigma_r = 0, r = a \quad (2.2)$$

где a и R — соответственно радиус канала и наружный радиус заполнителя, а напряжение σ_r определяется по закону Гука

$$\sigma_r = \frac{E_c(1-\nu_c)}{(1+\nu_c)(1-2\nu_c)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu_c}{1-\nu_c} \frac{u_r}{r} \right) \quad (2.3)$$

Таким образом в уравнениях движения (1.1) останется лишь нормальная составляющая q_z , а $q_x = q_y = 0$.

Если функцию u_r искать в виде $u_r = U(r) \exp[i(mx - \omega t)] \cos n\theta$, то решение уравнения (2.1) будет иметь вид

$$u_r = [A_1 J_p(b) + A_2 J_{-p}(b)] \exp[i(mx - \omega t)] \cos n\theta \quad (p - \text{не целое}) \quad (2.4)$$

$$u_r = [A_1 J_p(b) + A_2 Y_p(b)] \exp[i(mx - \omega t)] \cos n\theta \quad (p - \text{целое})$$

$$b = \left[\frac{\rho_c c_f^2 (1+\nu_c)(1-2\nu_c)}{E_c} - \frac{1-2\nu_c}{2(1-\nu_c)} \right]^{1/2} mr, \quad p = \left[1 + n^2 \frac{1-2\nu_c}{2(1-\nu_c)} \right]^{1/2}$$

где J_p, Y_p — функции Бесселя порядка p , A_1 и A_2 — постоянные.

Подчиним перемещение (2.4) условиям (2.2) и, учитывая (2.3), определим реакцию заполнителя q_z , в которой коэффициенты A_1 и A_2 будут выражаться через w_0 . Подставляя затем функции (2.2) вместе с найденной реакцией в систему (1.1), получим однородную систему пяти алгебраических уравнений относительно u_0, v_0, w_0, a_x, a_y . Приравнявая определитель этой системы нулю, получаем дисперсионное уравнение для оболочки с заполнителем

$$\det \|a_{ij}\| = 0 \quad (i, j = 1 \div 5) \quad (2.5)$$

$$a_{11} = (1-\nu) \left(\frac{c_*^2 m_*^2}{3} - \frac{n^2}{2} \right) - m_*^2, \quad a_{12} = -\frac{1+\nu}{2} m_* n, \quad a_{13} = -\nu m_*$$

$$a_{14} = 0, \quad a_{15} = 0, \quad a_{21} = \frac{1+\nu}{2} n m_*, \quad a_{22} = (1-\nu) \left(\frac{m_*^2}{2} - \frac{c_*^2 m_*^2}{3} \right) + n^2$$

$$a_{23} = 1 + \frac{1-\nu}{3}, \quad a_{24} = 0, \quad a_{25} = \frac{1-\nu}{3}, \quad a_{31} = \frac{\nu}{1-\nu^2} m_*, \quad a_{32} = \frac{n}{1-\nu^2}$$

$$a_{33} = \frac{m_*^2 + n^2 - c_*^2 m_*^2}{3(1+\nu)} + \frac{1}{1-\nu^2} + \Delta, \quad a_{34} = \frac{m_*}{3(1+\nu)}$$

$$a_{35} = \frac{n}{3(1+\nu)}, \quad a_{41} = 0, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = -\frac{m_*}{1+\nu}$$

$$a_{44} = \frac{1}{1+\nu} \left[\frac{\kappa^2}{4} \left(\frac{m_*^2 c_*^2}{3} - \frac{m_*^2}{1-\nu} - \frac{n^2}{2} \right) - 1 \right], \quad a_{45} = -\frac{m_* n \kappa^2}{8(1-\nu)}$$

$$a_{51} = 0, \quad a_{52} = 0, \quad a_{53} = \frac{n}{1+\nu}, \quad a_{54} = \frac{m_* n \kappa^2}{8(1-\nu)}$$

$$a_{55} = \frac{1}{1+\nu} \left[1 + \frac{\kappa^2}{4} \left(\frac{n^2}{1-\nu} + \frac{m_*^2}{2} - \frac{m_*^2 c_*^2}{3} \right) \right] \quad (2.6)$$

Здесь слагаемое Δ , учитывающее влияние заполнителя, равно

$$\Delta = E_c \nu_{c1} [(h_1 h_2 - h_3 h_4) h_5^{-1} + \nu_{c2}] \quad (2.7)$$

$$h_1 = \gamma J_{p-1}(\gamma) + (\nu_{c2} - p) J_p(\gamma), \quad h_2 = \alpha J_{-(p+1)}(\alpha) + p J_{-p}(\alpha) \quad (2.8)$$

$$h_3 = \gamma J_{-(p+1)}(\gamma) + (\nu_{c2} + p) J_{-p}(\gamma), \quad h_4 = \alpha J_{p-1}(\alpha) - p J_p(\alpha)$$

$$h_5 = h_1 J_{-p}(\alpha) - h_3 J_p(\alpha) \quad (p - \text{не целое})$$

$$h_1 = \gamma J_{p-1}(\gamma) + (\nu_{c2} - p) J_p(\gamma), \quad h_2 = \alpha Y_{p-1}(\alpha) - p Y_p(\alpha) \quad (2.9)$$

$$h_3 = \gamma Y_{p-1}(\gamma) + (\nu_{c2} - p) Y_p(\gamma), \quad h_4 = \alpha J_{p-1}(\alpha) - p J_p(\alpha)$$

$$h_5 = h_1 Y_p(\alpha) - h_3 J_p(\alpha) \quad (p - \text{целое})$$

В выражениях (2.5) — (2.9) введены безразмерные параметры

$$c_* = c_f \left(\frac{2G}{3\rho} \right)^{-1/2}, \quad m_* = \frac{2\pi R}{\lambda_f}, \quad E_c^* = \frac{E_c R}{Eh}, \quad \rho_c^* = \frac{\rho_c R}{\rho h} \quad (2.10)$$

$$\kappa = \frac{h}{R} \quad \varepsilon = \frac{a}{R} \quad \alpha = \left[\frac{c_*^2 \rho_c^*}{E_c^*} \frac{1}{3\nu_{c1}(1+\nu)} - \frac{1-2\nu_c}{2(1-\nu_c)} \right]^{1/2} m_*$$

$$\gamma = \alpha \varepsilon, \quad \nu_{c1} = \frac{1-\nu_c}{(1+\nu_c)(1-2\nu_c)}, \quad \nu_{c2} = \frac{\nu_c}{1-\nu_c}$$

Если заполнитель сплошной ($\varepsilon=0$), в решении (2.4) в силу конечности перемещений при $r=0$ необходимо принять $A_2=0$. Тогда слагаемое Δ в (2.6) примет вид

$$\Delta = E_c^* \nu_{c1} \left[\frac{J_{p-1}(\alpha)}{J_p(\alpha)} \alpha - p + \nu_{c2} \right] \quad (2.11)$$

Вычисление скоростей волн значительно упрощается, если предположить, что заполнитель невесомый. Такое предположение правомерно для заполнителя с большой жесткостью или малой плотностью. Однако получить соответствующее дисперсионное уравнение из (2.5) предельным переходом $\rho_c^* \rightarrow 0$ нельзя, так как при этом теряется линейно-независимое решение в выражении (2.4). Поэтому примем $\rho_c=0$ в исходном уравнении (2.1) и тогда его решение запишем так:

$$u_r = [A_1 I_p(b) + A_2 K_p(b)] \exp [i(mx - \omega t)] \cos n\theta$$

$$b = mr \left[\frac{1}{2}(1-2\nu_c) / (1-\nu_c) \right]^{1/2} \quad (2.12)$$

где I_p и K_p — функции Бесселя мнимого аргумента.

Поступая, как и выше, приходим к дисперсионному уравнению вида (2.5) с коэффициентами (2.6), где слагаемое Δ , учитывающее влияние заполнителя, имеет вид

$$\Delta = E_c^* \nu_{c1} [(g_1 g_2 - g_3 g_4) g_5^{-1} + \nu_{c2}], \quad g_1 = \beta_1 K_{p-1}(\beta_1) + (p - \nu_{c2}) K_p(\beta_1)$$

$$g_2 = \beta I_{p-1}(\beta) - p I_p(\beta), \quad g_3 = \beta_1 I_{p-1}(\beta_1) - (p - \nu_{c2}) I_p(\beta_1)$$

$$g_4 = \beta K_{p-1}(\beta) + p K_p(\beta)$$

$$g_5 = g_1 I_p(\beta) + g_3 K_p(\beta), \quad \beta = m_* \left[\frac{1}{2}(1-2\nu_c) / (1-\nu_c) \right]^{1/2}, \quad \beta_1 = \beta \varepsilon$$

В случае невесомого сплошного заполнителя коэффициент Δ запишется в форме

$$\Delta = E_c^* \nu_{c1} [\beta I_{p-1}(\beta) / I_p(\beta) - p + \nu_{c2}]$$

Это выражение может быть получено и предельным переходом $\rho_c^* \rightarrow 0$ из формулы (2.11).

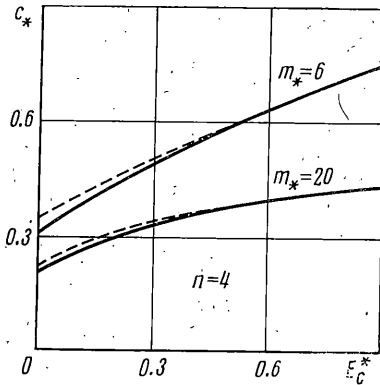
Были вычислены фазовые скорости волн в оболочке со сплошным заполнителем при $\kappa=1/50$, $\nu=\nu_c=0.3$, $\rho_c^*=0$ для различных значений жесткости заполнителя E_c^* и числа волн n по окружности. Результаты расчетов скоростей волн, соответствующих нижней моде движения, приведены на фиг. 1–3. Как показали вычисления, влияние заполнителя на высокочастотные моды пренебрежимо мало.

На фиг. 1 дано изменение фазовой скорости c_* при несимметричной ($n=6$) и осесимметричной ($n=0$) деформации оболочки (соответственно пары линий). По оси ординат отложены скорости c_* , по оси абсцисс — волновые числа m_* . Скорости осесимметричных волн были рассчитаны по формулам, приведенным в работе [5]. Сплошные кривые относятся к оболочке с заполнителем ($E_c^*=0.2$), пунктирные — к пустой оболочке ($E_c^*=0$).

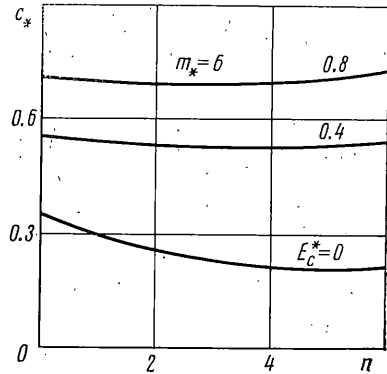
Графики показывают, что наличие заполнителя оказывает существенное влияние на процесс распространения волн в оболочке. Так, для пустой оболочки наблюдается значительное расхождение между скоростями осесимметричных волн и несимметричных, тогда как в оболочке с заполнителем разница между соответ-

вующими значениями скоростей мала для всех значений волнового числа m_* , кроме m_* , близких к нулю (область очень длинных волн).

На фиг. 2 приведены графики зависимостей скоростей волн от жесткости заполнителя E_c^* для некоторых значений волнового числа ($m_*=6, 20$). Сплошные линии соответствуют неосесимметричным волнам ($n=4$), пунктирные — осесимметричным ($n=0$). Сравнивая сплошные и пунктирные кривые, можно видеть, что с увеличением жесткости заполнителя скорости обоих типов волн растут, причем расхождение между ними быстро уменьшается и близко к нулю для $E_c^* \geq 0.3$. Весьма слабое влияние на скорости волн в оболочке с заполнителем оказывает и изменение



Фиг. 2



Фиг. 3

числа n . Это видно из графиков на фиг. 3. Здесь вычисления проведены при $m_*=6$. Таким образом, распространение возмущений в оболочке с заполнителем имеет тенденцию происходить с образованием кольцевых осесимметричных волн. Из графиков на фиг. 3 следует также, что с увеличением жесткости заполнителя число n , соответствующее минимальной скорости, уменьшается.

Поступила 16 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигул У. К. Волновые процессы деформации оболочек и пластин. Тр. VII Всес. конференции по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1970.
2. Cooper R. M., Naghdi P. M. Propagation of nonaxially symmetric waves in elastic cylindrical shells. J. Acoust. Soc. America, 1957, vol. 29, No. 12, p. 1365–1373.
3. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М., «Наука», 1969.
4. Корбут Б. А., Нагорный Ю. И. К задаче о собственных колебаниях цилиндрической оболочки с упругим заполнителем. Изв. АН АрмССР. Механика, 1970, т. 23, № 3.
5. Корбут Б. А., Нагорный Ю. И. Распространение упругих волн в цилиндрической оболочке, содержащей заполнитель. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6.