

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА,
АРМИРОВАННОГО ПО ТОРЦАМ ТОНКИМИ ПЛАСТИНКАМИ

Л. С. ШЕЙБА, С. А. ШЛЯПОЧНИКОВ

(Ленинград)

Рассматриваются собственные осесимметричные колебания упругого цилиндра, боковая поверхность которого свободна от напряжений, а торцевые — армированы тонкими пластинками. Динамические задачи для упругих цилиндров конечной длины с различными краевыми условиями исследовались многими авторами. В работах [1-3] методом переопределенных рядов они сводятся к решению бесконечных систем линейных уравнений сложной структуры. Предлагаемая задача характерна тем, что касательные перемещения на торцах относительно малы вследствие значительного различия модулей упругости материалов цилиндра и армирующих пластинок. Это позволяет построить решение методом Бубнова — Галеркина, выбрав в качестве координатных функций собственные функции задачи о колебаниях цилиндра с простыми граничными условиями, выражающиеся в конечном виде. При относительной малой изгибной жесткости и инерционности пластинок найдены собственные частоты колебательной системы в первом порядке теории возмущений.

1. Малые осесимметричные колебания кругового цилиндра из материала с плотностью ρ и константами Ламе μ, λ (пока считаем их вещественными) описываются уравнением линейной теории упругости

$$AU = \rho \omega^2 U, \quad A = -(\lambda + 2\mu) \text{grad div} + \mu \text{rot rot} \quad (1.1)$$

Краевые условия на свободной от напряжений боковой поверхности цилиндра будут

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0 \quad \text{при } r = a \quad (1.2)$$

где U — вектор упругих смещений (множитель $e^{i\omega t}$ опускаем) с составляющими $u(r, z), v(r, z)$ в цилиндрической системе координат r, z, φ (фиг. 1).

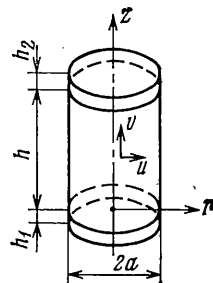
Кинематические условия армирования (жесткого контакта) упругого цилиндра по торцам тонкими неразжимными пластинами примем следующими:

$$u|_{z=h_i} = 0 \quad (i=1, 2), \quad z_1 = 0, \quad z_2 = h \quad (1.3)$$

Динамические условия имеют вид

$$D_i \Delta_r v - \rho_i h_i \omega^2 v = (-1)^{i+1} \sigma_{zz} \quad \text{при } z = z_i \quad (1.4)$$

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)} \quad (i=1, 2)$$



Фиг. 1

где h_i — толщина, E_i — модуль Юнга, ν_i — коэффициент Пуассона, ρ_i — плотность первой ($i=1$) и второй ($i=2$) пластин соответственно.

Влияние касательных напряжений на изгиб пластин не учитывается ввиду малости этого эффекта. Краевые условия для пластинок, соответствующие (1.2), будут при $r = a, z = z_i$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{v_i}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} (\Delta_r v) = 0 \quad (i=1,2) \quad (1.5)$$

Применим метод Бубнова — Галеркина к задаче (1.1) — (1.5), полагая

$$U = \sum_{m,n} b_{mn} U_{mn} \quad (1.6)$$

где U_{mn} — координатные векторы, b_{mn} — неизвестные коэффициенты. Выражение, фигурирующее в системе Бубнова — Галеркина для уравнения (1.1), может быть преобразовано с помощью формулы Бетти и краевых условий (1.2) — (1.4) к следующему виду:

$$\int_0^h \int_0^a U_{mn} \cdot A U_{m'n'} r dr dz = 2 \int_0^h \int_0^a W(U_{mn}, U_{m'n'}) r dr dz +$$

$$+ \sum_{i=1}^2 D_i \int_0^a v_{mn}(r, z_i) \Delta_r v_{m'n'}(r, z_i) r dr - \sum_{i=1}^2 \rho_i h_i \omega^2 \int_0^a v_{mn}(r, z_i) v_{m'n'}(r, z_i) r dr$$
(1.7)

где $W(U, U')$ — квадратичная форма, соответствующая плотности потенциальной энергии упругой деформации. Учитывая, что интегралы в (1.7), содержащие бигармонический оператор, преобразуются к симметричной форме (с помощью формулы Грина и краевых условий (1.5)), получим следующую однородную систему уравнений Бубнова — Галеркина с симметричной матрицей:

$$\sum_{m'n'} \left[W_{mn,m'n'} + \sum_{i=1}^2 D_i w_{mn,m'n'}^{(i)} - \right.$$

$$\left. - \omega^2 \left(\rho E_{mn,m'n'} + \sum_{i=1}^2 \rho_i h_i e_{mn,m'n'}^{(i)} \right) \right] b_{m'n'} = 0 \quad (m, n, m', n' = 1, 2, 3, \dots)$$
(1.8)

$$W_{mn,m'n'} = \int_0^h \int_0^a W(U_{mn}, U_{m'n'}) r dr dz, \quad E_{mn,m'n'} = \int_0^h \int_0^a U_{mn} \cdot U_{m'n'} r dr dz$$

$$w_{mn,m'n'}^{(i)} = \int_0^a \Delta_r v_{mn}(r, z_i) \Delta_r v_{m'n'}(r, z_i) r dr -$$

$$- (1 - \nu_i) \left. \frac{dv_{mn}(r, z_i)}{dr} \frac{dv_{m'n'}(r, z_i)}{dr} \right|_{r=a}$$
(1.9)

$$e_{mn,m'n'}^{(i)} = \int_0^a v_{mn}(r, z_i) v_{m'n'}(r, z_i) r dr \quad (i=1,2)$$

2. При выборе координатных функций учтем, что подчинять их динамическим условиям контакта (1.4) и условиям (1.5) не обязательно [4]. Заменяя (1.4) на

$$\sigma_{zz} = 0 \quad \text{при} \quad z = z_i \quad (i=1, 2) \quad (2.1)$$

получим задачу (1.1) — (1.3), (2.1) (в дальнейшем будем называть ее эталонной) на собственные значения оператора теории упругости с граничными условиями самосопряженного типа. Как известно [5], собственные функции такого рода задач обладают ортогональностью и полнотой в L_2 . Замена (1.4) на (2.1) соответствует пренебрежению изгибной жесткостью и инерционностью армирующих пластинок.

После разделения переменных решения уравнений (1.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} v(r, z) &= A [J_0(k^{(2)}r) + B J_0(k^{(1)}r)] \cos(kz + \varepsilon) \\ u(r, z) &= A \left[\frac{k}{k^{(2)}} J_1(k^{(2)}r) - B \frac{k^{(1)}}{k} J_1(k^{(1)}r) \right] \sin(kz + \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} k^{(1)} &= \sqrt{k_e^2 - k^2}, & k^{(2)} &= \sqrt{k_i^2 - k^2} \\ k_e &= \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \omega, & k_i &= \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \omega \end{aligned} \quad (2.3)$$

Постоянные A, B, k, ε , входящие в (2.2), подлежат определению из граничных условий (1.2), (1.3), (2.1) и условия нормировки

$$\int_0^h \int_0^a [u^2(r, z) + v^2(r, z)] r dr dz = D \quad (2.4)$$

Компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial z}, & \sigma_{rr} &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), & \theta &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Зависимости (2.2), (2.5) показывают, что условия на торцах цилиндра (1.3), (2.1) удовлетворяются одновременно, если положить

$$\varepsilon = 0, \quad k = \frac{m\pi}{h} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

Граничные условия на боковой поверхности цилиндра (1.2) с учетом (2.5), (2.6) приводят к следующему уравнению собственных частот эталонной задачи для $m \neq 0$:

$$\begin{aligned} & [(k_i h)^2 - 2\pi^2 m^2]^2 J_0(k^{(1)}a) J_1(k^{(2)}a) + 4\pi^2 m^2 k^{(1)} h k^{(2)} h J_0(k^{(2)}a) J_1(k^{(1)}a) - \\ & - 2(k_i h)^2 k^{(1)} h \frac{h}{a} J_1(k^{(1)}a) J_1(k^{(2)}a) = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

причем аргументы функций Бесселя определяются соотношениями (2.3) с учетом (2.6). Амплитудные постоянные A_{mn}, B_{mn} в (2.2) равны

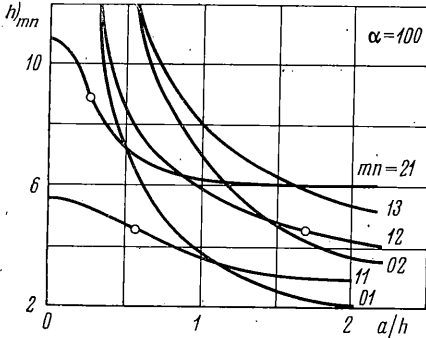
$$\begin{aligned} B_{mn} &= \frac{2(m\pi/h)^2 - k_{mn}^2}{2k_{mn}^{(1)} k_{mn}^{(2)}} \frac{J_1(k_{mn}^{(2)} a)}{J_1(k_{mn}^{(1)} a)} \\ A_{mn} &= \sqrt{\frac{D(2 - \delta_{0m})}{h}} \frac{1}{a} \left\{ \int_0^1 [B_{mn} J_0(k_{mn}^{(1)} ax) + J_0(k_{mn}^{(2)} ax)]^2 x dx + \right. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$+ \int_0^1 \left[B_{mn} \frac{k_{mn}^{(1)} h}{m\pi} J_1(k_{mn}^{(1)} ax) - \frac{m\pi}{k_{mn}^{(2)} h} J_1(k_{mn}^{(2)} ax) \right]^2 x dx \}^{-1/2}$$

где δ_{om} — символ Кронекера, индексом $k_{mn}^{(2)} \geq 1$ нумеруются решения (2.7) при данном m .

Уравнение (2.7) является дисперсионным для распространяющихся продольных волн в бесконечном цилиндре [6], в чем легко убедиться, положив высоту h в (2.7) равной полуделому числу длин продольных волн. При $m=0$ собственные частоты эталонной задачи определяются уравнением $J_1(k_1 a) = 0$, а соответствующие формы колебаний являются чисто продольными ($u=0$). Нечетным значениям индекса m соответствуют симметричные относительно плоскости $z=h/2$ типы колебаний, четным — антисимметричные.

Зависимость безразмерной собственной частоты $(k_i h)_{mn}$ эталонной задачи от отношения радиуса цилиндра к его высоте для низших типов колебаний конечного цилиндра показана на фиг. 2. При численном решении (2.7) принято $\alpha = (\lambda + 2\mu)/2\mu = 100$, поскольку это значение параметра α является типичным для разноподобных материалов [7], которые могут быть сравнительно просто армированы. Дисперсия продольных волн в бесконечном цилиндре из резиноподобного материала исследовалась в [8]. Анализ поведения собственных частот цилиндра показывает, что при увеличении отношения a/h от 0 до ∞ безразмерные собственные частоты $(k_i h)_{mn}$ уменьшаются: от ∞ до 0 для $m=0, n=1, 2, 3$; от 5.44 до 3.00 для $m \geq 1, n=1$; от ∞ до m или $3.00m$ для $m \geq 1, n \geq 2$, в зависимости от типа колебаний. Как следует из фиг. 2, нижней формой колебаний при $a/h \leq 1.10$ является мода 11, а при больших значениях a/h — 01; при соизмеримых высоте и радиусе цилиндра происходит двукратное вырождение собственных частот низших типов колебаний; мода 11, например, вырождается при $a/h = 1.10$.



Фиг. 2

Общая картина зависимости $(k_i h)_{mn}$ от геометрии цилиндра мало чувствительна к изменению параметра α при $\alpha \gg 1$, т. е. для резиноподобных материалов. Нетрудно видеть, что $(k_i h)_{0n}$, вообще не зависят от α , а для каждой из мод с $m \geq 1$, имеется значение параметра α , для которого $(k_i h)_{mn}$ от α также не зависит (положение соответствующих точек на фиг. 2 отмечено кружочками). Указанные значения a/h согласно (2.7) равны

$$a/h = \beta_n / m\pi \tag{2.9}$$

где β_n — корни производной первой функции Бесселя. Собственные колебания в этом случае являются модами Ламе цилиндра.

3. Перейдем к анализу бесконечной системы уравнений (1.8) с учетом свойств координатных функций, построенных в п. 2. В силу ортогональности собственных функций оператора теории упругости с граничными условиями самосопряженного типа имеем

$$W_{mn, m'n'} = \rho \omega_{mn}^2 \delta_{mm'} \delta_{nn'} \tag{3.1}$$

Рассмотрим в дальнейшем случай, когда армирующие пластинки одинаковы; согласно (1.9), (2.2) находим

$$w_{mn, m'n'}^{(1)} + w_{mn, m'n'}^{(2)} = 2w_{mn, m'n'}^{(1)} \gamma_{mm'}$$

$$e_{mn,m'n'}^{(1)} + e_{mn,m'n'}^{(2)} = 2e_{mn,m'n'}^{(1)} \gamma_{mm'}$$

$$\gamma_{mm'} = \begin{cases} 1, & m-m'=2p \\ 0, & m-m'=2p+1 \end{cases} \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

Система (1.8) в силу (3.1), (3.2) распадается на две независимые, одна из которых описывает симметричные относительно плоскости симметрии колебательной системы $z=h/2$ типы колебаний, другие — антисимметричные. Рассмотрим для определенности первую систему; уравнение собственных частот согласно (1.8), (3.1) и (3.2) будет

$$\det \{ \rho (\omega_{mn}^2 - \omega^2) \delta_{mn} \delta_{n'n'} + 2D_1 w_{mn,m'n'}^{(1)} - 2\rho_1 h_1 \omega^2 e_{mn,m'n'}^{(1)} \} = 0 \quad (3.3)$$

($m, m', n, n' = 1, 3, 5, \dots$)

При относительно малой изгибной жесткости и инерционности армирующих пластинок уравнение (3.3) целесообразно решать методом теории возмущений. Введем в рассмотрение следующие функции $\Omega_{mn,m'n'}$ параметров пластинок:

$$\Omega_{mn,m'n'} = \frac{D_1}{\rho \omega_{mn}^2} w_{mn,m'n'}^{(1)} - \frac{\rho_1}{\rho} h_1 e_{mn,m'n'}^{(1)} \quad (3.4)$$

Слагаемые в (3.4) полагаем величинами первого порядка малости. Если собственная частота ω_{mn} эталонной задачи не вырождена, то в первом порядке теории возмущений для соответствующей формы колебаний $U_{mn}^{(1)}$ и частоты $\omega_{mn}^{(1)}$ имеем

$$U_{mn}^{(1)} = U_{mn} + 2 \sum_{m',n'} \frac{\Omega_{mn,m'n'}}{1 - \omega_{m'n'}^2 / \omega_{mn}^2} U_{m'n'} \quad (m' \neq m, n' \neq n)$$

$$\omega_{mn}^{(1)} = \omega_{mn} (1 + \Omega_{mn,mn}) \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что при толщине пластинок h_1 , меньшей h_{1mn}

$$h_{1mn} = 2\omega_{mn} \left(\frac{3(1-\nu_1^2)\rho e_{mn,mn}^{(1)}}{E_1 w_{mn,mn}^{(1)}} \right)^{1/2}$$

пластинки вносят на моде mn в колебательную систему инерционность, максимальную при $h_1 = h_{1mn} / \sqrt{3}$; при большой толщине пластинки вносят упругость, быстро возрастающую с увеличением h_1 .

Покажем, что условие применимости формул теории возмущений (3.5)

$$\left| \frac{\Omega_{mn,m'n'}}{1 - \omega_{m'n'}^2 / \omega_{mn}^2} \right| \ll 1 \quad (m' \neq m, n' \neq n) \quad (3.6)$$

выполняется для армирующих пластин достаточно малой толщины. Поскольку частота ω_{mn} по условию не вырождена, соотношение (3.6) справедливо для мультииндексов $m'n'$, соответствующих нескольким низшим типам колебаний, если h_1 мало. Остается рассмотреть поведение $\Omega_{mn,m'n'} \omega_{mn}^2 / \omega_{m'n'}^2$ при $m'+n' > N$, где N — достаточно большое число.

Согласно (3.4) имеем

$$|\Omega_{mn,m'n'}| \frac{\omega_{mn}^2}{\omega_{m'n'}^2} \leq \frac{\rho_1 h_1 e_{mn,m'n'}^{(1)}}{\rho \omega_{m'n'}^2} + \frac{D_1 w_{mn,m'n'}^{(1)}}{\rho \omega_{m'n'}^2} \quad (3.7)$$

Оценивая интегралы $e_{mn,m'n'}^{(1)}$ с помощью неравенства Коши — Буняковского

$$e_{mn,m'n'}^{(1)} \leq \left(\int_0^a v_{mn}^2(r, 0) r dr \int_0^a v_{m'n'}^2(r, 0) r dr \right)^{1/2}$$

при нормировке (2.4) и ограниченности снизу спектра эталонной задачи в этом случае нетрудно видеть, что первое слагаемое в (3.7) ограничено сверху выражением вида $C_{mn} h_1$, где C_{mn} — постоянная, зависящая от ω_{mn} . Для анализа второго слагаемого в (3.7) применим формулу Грина к интегральной части $w_{mn,m'n'}^{(1)}$. В результате получим, что второе слагаемое в

(3.7) ограничено сверху выражением вида $C_{mn} h_1^3$ при условии, что радиальные смещения $u_{m'n'}(r)$ не локализируются вблизи боковой поверхности цилиндра. В противном случае, т. е. для колебаний типа рэлеевских, для $u_{mn}(r)$ пригодно приближенное представление

$$u_{m'n'}(r) \approx A'_{m'n'} \exp[q\omega_{m'n'}(r-a)]$$

где $q > 0$ — некоторая постоянная. Таким образом, учитывая (2.4), вновь получаем требуемую оценку.

Пусть теперь собственная частота эталонной задачи двукратно вырождена $\omega_{mn} = \omega_{m'n'}$ или имеются две близкие частоты, тогда вместо второго соотношения (3.5) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\omega^{(1)}}{\omega_{mn}} &= 1 + \frac{\Omega_{mn,mn} + \Omega_{m'n',m'n'}}{2} \pm \\ &\pm \left[\frac{(\Omega_{mn,mn} - \Omega_{m'n',m'n'})^2}{4} + \Omega_{mn,m'n'}^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Как видно из (3.8), инерционность и изгибная жесткость армирующих пластинок снимает вырождение собственных частот эталонной задачи одинакового типа (симметричных или антисимметричных) при любой малой толщине пластинок. При вырождении колебаний разных типов дело обстоит несколько иначе: изменение частот колебаний каждого типа определяется формулой (3.5), так что при некоторой толщине h_1 вырождение может не сниматься.

На фиг. 3 показано относительное изменение собственных частот в зависимости от толщины армирующих пластинок для цилиндров с $a/h = 1.10$ (вырождению мод 01 и 11 разной симметрии) и для цилиндров с $a/h = 0.55$ (вырождение мод 01 и 21 одинаковой симметрии, пунктирные кривые). При расчете принято $E_1/\mu = 3 \cdot 10^4$, $\rho_1/\rho = 6.3$, $\nu_1 = 0.30$.

4. Выше предполагалось, что материал цилиндра не обладает потерями, поэтому его константы Ламе λ , μ вещественные. Диссипация энергии в резиноподобной среде связана в основном со сдвиговыми деформациями [7]; учет потерь в материале при этом может быть произведен введением комплексного модуля сдвига $\bar{\mu} = \mu(1 + i\eta)$, где η — коэффициент сдвиговых потерь. Собственные частоты $\bar{\omega}_{mn}$ следует взять так, чтобы выполнялось соотношение

$$\bar{\omega}_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 (1 + i\eta) \quad (4.1)$$

При этом выражения типа $k, h, k^{(2)}a$, входящие в (2.2) — (2.8), остаются без изменения, а приращение $k^{(1)}a$ мало при условии

$$\eta \ll \alpha^2 \left[\frac{\pi m}{(k, h)_{mn}} \right]^2 \quad (4.2)$$

Таким образом, собственные функции эталонной задачи с потерями при условии (4.2) по-прежнему определяются формулами (2.2) — (2.8), а собственные частоты сдвигаются в комплексную область; уравнение (3.3) остается справедливым с учетом (4.1). Поскольку для резиноподобных материалов $\alpha \gg 1$, то условие (4.2) не накладывает жестких ограничений на коэффициент потерь η .

При постановке задачи использовалось условие идеального армирования (1.3). Оценим возможность его реализации при относительно малых изгибной жесткости и инерционности пластинок. Армирующий эффект проявляется на частотах, меньших частоты продольного (радиального) резонанса пластинок, в частности, при условии $\omega \ll (E_1 / \rho_1)^{1/2} / a$ радиальные перемещения пластинок $u(r, 0)$ под действием касательных напряжений σ_{rz} имеют вид

$$u(r, 0) = \frac{1}{E_1 h_1} \int_0^r \left[\int_0^x \sigma_{rz}(y) y dy \right] \frac{dx}{x} \quad (4.3)$$

Условие идеального армирования оправдано, если радиальные перемещения пластинок $u(r, 0)$ много меньше аксиальных $v(r, 0)$

$$|u(r, 0)| \ll |v(r, 0)| \quad (4.4)$$

Касательные напряжения для моды mn , действующие на пластинку со стороны цилиндра, согласно решению эталонной задачи удовлетворяют соотношению

$$\sigma_{rzmn} = \frac{\mu A_{mn} [2m^2 \pi^2 - (k, h)_{mn}^2]}{h J_1(k_{mn}^{(1)} a) k_{mn}^{(2)} h} [J_1(k_{mn}^{(1)} a) J_1(k_{mn}^{(2)} a) - J_1(k_{mn}^{(2)} a) J_1(k_{mn}^{(1)} a)] \quad (4.5)$$

Как следует из (4.3), (4.5), для каждой моды имеется определенное соотношение высоты и радиуса цилиндра (2.9), при котором условие (4.4) выполняется для любой малой толщины армирующих пластинок, поскольку в этом случае $\sigma_{rz} = 0$. При произвольной геометрии цилиндра условие (4.4) приводит к ограничению снизу на толщину армирующих пластинок. Для моды 11 при $a/h < 0.6$, в частности, необходимо выполнение условия $(E_1 h_1 / \mu h) (h/a)^5 \gg 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. Г. Метод переопределенных рядов в некоторых краевых задачах математической физики. В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Изд-во ЛГУ, 1959, № 3.
2. Hutchinson J. R. Axisymmetric vibrations of a solid elastic cylinder encased in a rigid container. J. Acoust. Soc. America, 1967, vol. 42, No. 2.
3. Hutchinson J. R. Axisymmetric vibrations of a free finite-length rod. J. Acoust. Soc. America, 1972, vol. 51, No. 1, pt. 2.
4. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
5. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М., Гостехиздат, 1952.
6. Kolsky H. Stress waves in solids. Oxford, 1953. (Рус. перев.: Волны напряжений в твердых телах. М., Изд-во иностр. лит., 1955.)
7. Treloar L. R. The physics of rubber elasticity. Oxford, Clarendon Press, 1949. (Рус. перев.: Физика упругости каучука. М., Изд-во иностр. лит., 1953.)
8. Воек А. Е., Гудков В. В. Нормальные продольные волны в упругом цилиндрическом волноводе. Акуст. ж., 1967, т. 13, вып. 3.