

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИФРАКЦИИ ВОЛН
В УПРУГОВЯЗКИХ СРЕДАХ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В. А. КОТЛЯРЕВСКИЙ, А. Г. ЧИСТОВ

(Москва)

Приводятся результаты расчета волн в упруговязкой среде при плоской деформации, полученные конечно-разностными методами на ЭЦВМ средней мощности. Контроль точности проведен сопоставлением расчета распространения волны Рэлея с известными решениями [1]. Даны примеры расчета дифракции волн в грунте вокруг прямоугольных тел с идеально жестким и деформируемым на участке контуром при действии скачка давления. Полученные результаты допускают обобщение сверткой с нагрузкой произвольной формы. Дано сравнение с расчетами, выполненными в одномерном приближении методом полудискретного аналога.

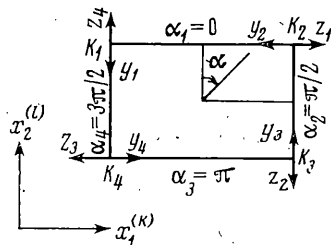
1. Для численных расчетов используется система уравнений в переменных Лагранжа для декартовой системы координат x_i в форме

$$\rho v_j \dot{=} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_j, \quad \varepsilon_{ij} \dot{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \Delta \dot{=} \varepsilon_{ij} \delta_{ij} \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij} - 1/3 \Delta \delta_{ij}) + 2\eta(\varepsilon_{ij} \dot{=} - 1/3 \Delta \dot{=} \delta_{ij}) + (K\Delta + K_*\Delta \dot{=}) \delta_{ij} + \sigma_{ij}^{\circ} \quad (1.2)$$

Здесь v_j , σ_{ij} , ε_{ij} — компоненты вектора скорости, тензоров напряжений и деформаций ($i, j=1, 2, 3$), σ_{ij}° — начальные напряжения, Δ — относительное объемное расширение, δ_{ij} — символ Кронекера, ρ — плотность, G — модуль сдвига, K — модуль объемного расширения, η — сдвиговая вязкость, K_* — объемная вязкость, F_j — компоненты массовых сил, точкой обозначено частное дифференцирование по времени t , суммирование ведется по нему (повторяющемуся в одночлене) индексу.

Решение разыскивается в прямоугольной области. Для случая плоской деформации $v_3 \dot{=} = \partial v_1 / \partial x_3 = \partial v_2 / \partial x_3 = 0$. На верхней (свободной) границе области задается давление, произвольным образом изменяющееся по координате x_1 и во времени. По остальным (твердым) границам предусмотрены условия прилипания частиц или проскальзывания без трения или с трением (по Кулону). Область решения делится на прямоугольные ячейки двумерной лагранжевой сеткой. Координаты сетки $x_1^{(k)}$, $x_2^{(l)}$ (фиг. 1) могут назначаться с произвольным шагом — сгущаться в местах, где следует интересоваться деталями процесса, или разрежаться к периферии для снижения влияния твердых границ. Начальные условия для системы уравнений нулевые. Напряжения σ_{ij} могут определяться с учетом поля силы тяжести вдоль $-x_2$.



Фиг. 1

Конечно-разностная аппроксимация частных производных проведена на основе теоремы Ноха [2] об интегральном выражении производной для точки внутри контура многоугольной ячейки. В данной работе для сплошной среды использованы аналогичные представления производных для прямоугольной ячейки, описанные Уилкинсом [2] применительно к численному методу для расчета упругопластических течений. Особенностью схемы является нулевая погрешность аппроксимации при интегрировании всех членов уравнений неразрывности. Функции напряженно-деформированного состояния центрируются в центрах ячеек, а кинематика — в узлах сетки. При вычислении σ_{ij} учтены поправки на поворот на угол $\Delta\omega_0$ элементарной массы, не связанный с деформацией, при изменении времени на шаг Δt .

Параметры ρ , G , η , K , K_* могут быть постоянными или меняться по координатам, что позволяет рассматривать градиентные, слоистые среды и выделять подобласти с различными свойствами. Так, для изучения дифракции волн в среде вокруг жесткого тела может быть выделена подобласть A , покрытая сеткой с мелким шагом. При этом вычисляются также параметры волнового поля в A .

Принятое выше уравнение состояния позволяет рассматривать также упругие среды. При этом члены, содержащие константы η , K_* , используются в качестве линейной искусственной вязкости. Как показали экспериментальные расчеты, удовлетворительное демпфирование флуктуаций достигается, если вязкости в ячейках (с наибольшими размерами λ_+) распределены согласно соотношению $K_* + \frac{4}{3}\eta = \mu = \frac{1}{5}\lambda_+(\rho C)^{1/2}$ ($C \equiv K + \frac{4}{3}G$). Шаг счета принимается по условию $\Delta t = K_*\lambda_-(\rho/C)^{1/2}$ (при числе Куранта $K_*\lambda_- = \frac{1}{3}$, λ_- — наименьшие размеры ячеек), причем значение $\lambda_-(\rho/C)^{1/2}$ здесь является минимальным во всей области. В расчетах для плотных упругих сред принимается $K_* = \frac{1}{2}\mu$, $\eta = \frac{3}{8}\mu$, а для воздуха $G = \eta = 0$, $K_* = \mu$.

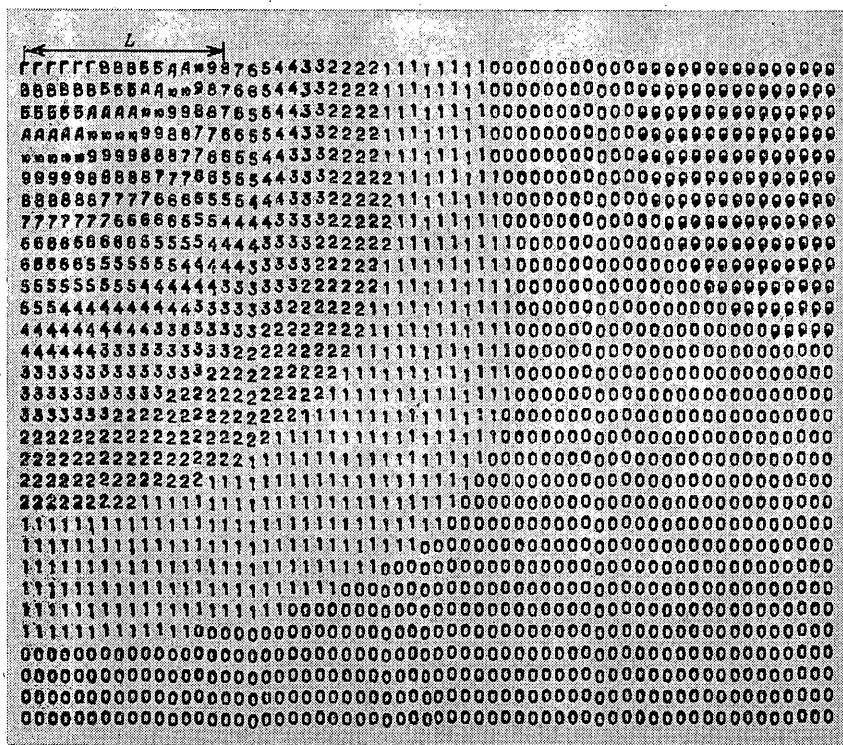
Для сред с высокой (естественной) вязкостью, если геометрия задачи не позволяет укрупнить шаг сетки до значений, удовлетворяющих условиям искусственной вязкости, решение является устойчивым при ограничении напряжения $|\sigma_{22}|$ в верхнем (приграничном) слое толщиной λ_2 , возникающего за первый шаг Δt от скачка давления P_m , величиной $\alpha|P_m|$ ($\alpha < 1$). Из разностных уравнений, аппроксимирующих (1.1), (1.2), получаем выражение для Δt , соответствующего (при $\alpha = \frac{1}{3}$) устойчивому решению: $\Delta t = [-\mu + (\mu^2 + 2\alpha C \rho \lambda_2^2)^{1/2}] (2C)^{-1}$.

При расчетах дифракции волн вокруг тела с высокой жесткостью, открытого густой сеткой, шаг счета, предписываемый константами тела, оказывается весьма малым, что приводит к существенному возрастанию машинного времени. Для таких случаев предусмотрена замена сеточной подобласти A одной крупной прямоугольной ячейкой (тело A_0), впаивной в лагранжеву сетку. Контур Ω этой ячейки идеально жесткий, причем его отдельные участки (любая грань) могут обладать конечной (изгибной) жесткостью.

Движение тела, окаймленного большим числом ячеек среды, определяется с учетом моментных эффектов, причем на замкнутой подвижной границе Ω соблюдаются условия совместности скоростей (проскальзывания вдоль Ω и между ячейками среды запрещены). Если получаемые в расчете компоненты тензора напряжений в ячейках, окаймляющих прямоугольное тело, ассоциировать с его поверхностью, то концентрацию напряжений следует считать соответствующей закруглению углов с радиусом около полшага сетки.

2. Расчеты велись на сетке 31×31 ячеек. Программа состоит из четырех частей. Первая часть — для вычисления начальных параметров задачи, вторая — поля скоростей, третья — всех остальных функций, четвертая — выдачи результатов расчета на таблицы и матрицы уровней Y искомым функций F . Область решения для поля скоростей $v_j(k, l)$ разбита на пять полос, причем, если для A используется одна крупная ячейка, то она размещается в одной из полос, занимая по высоте пять средних

слоев. В одном магнитном оперативном запоминающем устройстве (МОЗУ) по второй части программы ведется решение последовательно для всех полос. Аналогично ведется расчет функций по третьей части программы во втором МОЗУ ЭЦВМ (для экономии оперативной памяти используется упаковка в одну ячейку двух величин — компонентов тензора напряжений и вязких напряжений). Информация по всем полосам на предыдущем шаге времени хранится во внешней памяти. Общий объем внешней памяти, используемый при счете, — 8 МОЗУ на двух магнитных барабанах. В зависимости от сложности задачи для одного шага Δt на ЭЦВМ БЭСМ-4 расходуется от 20 до 25 сек машинного времени. Компоненты матрицы Y соответствуют центрам



Фиг. 2

лагранжевых ячеек, а вдоль x_1 — также интерполированным значениям F между центрами ячеек (в связи с чем напряжения и деформации, выданные на вертикальных границах тела A_0 , не принимаются во внимание). Каждая выдача уровней Y состоит из матрицы модулей $|Y|$ и матрицы знаков. Кроме нулевого предусмотрено 40 уровней, причем $|Y|$ вычисляется как целое число от $(|F|/DD+0.5)$, где DD — цена уровня размерности F . Для последовательного ряда $|Y|$ приняты обозначения: 0, 1, 2, ..., 10, А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л, М, Н, П, Р, С, Т, У, Ф, Х, Д, F, G, I, J, L, N, R, S, U, V. На матрице знаков * означает плюс, ф — минус; положительными считаются смещения, скорости, вдоль осей x_i и растягивающие напряжения.

3. Проверка влияния непостоянства шага сетки на точность вычислений выполнена сравнением с численным (на сетке 5×5 м) и аналитическим решениями для вертикальных смещений свободной поверхности ($x_2 = H^+$) в волне Рэлея, взятыми из работы [1]. В расчет введены указанные в этой работе параметры упругой среды $G = 2.74 \cdot 10^{10}$ н/м², $K = 4.89 \cdot 10^{10}$ н/м², $\rho = 2.77 \cdot 10^3$ кг/м³ и изменение во времени равномерно распределенного на участке поверхности $L = 40$ м давления q_0 , аппроксимированного в виде ($q_m = 1.86 \cdot 10^7$ н/м², $a_0 = 0.01$ сек, $t_0 = 0.04$ сек)

$$q_0 = q_m a_0^2 [a_0^2 + (t - t_0)^2]^{-1} (0 < x_1 < L, \quad x_2 = H^+, \quad 0 < t < 2t_0).$$

Расчеты проведены для квадратной области ($H^+ = 767$ м); подобласть в левом верхнем углу 70×70 м имела сетку с шагом 5×5 м, которая к периферии укрупнялась по арифметической прогрессии с модулем 4 м. Результаты решения для $t = 0.14$ сек хорошо согласуются с данными [1]. Расчеты для области 150×150 м на равномерной сетке 5×5 м до $t = 0.06$ сек дали практически неразличимый результат. На фиг. 2 показана матрица уровней поля смещений u_2 для $t = 0.04$ сек, соответствующего амплитуде $q_0 = q_m$. Положительные значения параметров нулевого уровня имеют внизу штриховые метки; $DD = 0.1$ см.

4. Для расчета дифракции волн вокруг прямоугольного тела используется крупная ячейка A_0 с единичным размером вдоль x_3 . Смещение ее границы Ω определяется решением уравнений движения тела с удельными массой M и центральным моментом инерции I относительно оси, коллинеарной x_3 ,

$$M \frac{dV_i}{dt} = \oint_{(\Omega)} \sigma_{ij} d\Omega_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (4.1)$$

$$I \frac{d\varphi}{dt} = \oint_{(\Omega)} (\sigma_{il} l_j - \sigma_{jl} l_i) d\Omega_l \quad (i = 1, j = 2, l = 1, 2) \quad (4.2)$$

Здесь V_i и $d\Omega_i$ — соответственно компоненты вектора скорости центра массы и вектора элементарной поверхности, направленного по внешней нормали к Ω , φ — угловая скорость тела. Плечи $l_i^{(s)}$ элементарных сил взаимодействия среды с телом определяются как разности между эйлеровыми координатами точек на Ω и центра массы $l_i^{(s)} = X_i^{(s)} - U_i$. Интегралы в (4.1), (4.2) представляют собой проекции главного вектора сил взаимодействия на оси x_i и момент этого вектора относительно центральной оси тела.

Конечно-разностная аппроксимация уравнений движения тела выполнена по формулам Ноха (см. (9)–(11) в [2]) для многоугольной ячейки (с числом узлов N), причем эйлеровы координаты $X_i^{(s)}$ узлов сетки на Ω определяются геометрическими соотношениями

$$\begin{aligned} X_1^{(s)} &= U_1 + r^{(s)} \cos(\beta^{(s)} - \varphi) - u^{(s)} \sin(\alpha_h + \varphi), \\ X_2^{(s)} &= U_2 + r^{(s)} \sin(\beta^{(s)} - \varphi) - u^{(s)} \cos(\alpha_h + \varphi) \quad (s = 1, 2, 3, \dots, N, h = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь $r = r(\beta)$ — уравнение Ω при $t = 0$ в полярных координатах (положительное значение угла φ принято по часовой стрелке, а β — против нее, отсчет углов ведется от оси x_1), u — прогиб контура по уравнению (5.1), α_h — углы, фиксирующие грани тела по фиг. 1.

Приводятся числовые примеры расчета дифракции волн вокруг твердых тел. Используются материальные константы для среды, близкие к характеристикам одной разновидности плотного суглинка ненарушенной структуры ($\rho = 2.15 \cdot 10^3$ кг/м³), полученные авторами совместно с А. И. Шипициным в опытах на кратковременную ползучесть при осевом сжатии давлениями до $0.7 \cdot 10^5$ н/м². Из опытов получена равновесная осевая податливость $\varphi_m = 6.7 \cdot 10^{-8}$ м²/н; главный максимум спектра запаздывания L соответствует $\tau = 3.3 \cdot 10^{-3}$ сек, коэффициент бокового давления $K_b = 0.55$. Используя гипотезу постоянства коэффициента Пуассона (или $K_b = \text{const}$), получим соответствие спектров запаздывания осевого сжатия (L), объемного сжатия (L_0) и сдвига (L_c) $L = 1/3(1 + 2K_b)L_0 = (1 - K_b)L_c$ (а также ядер ползучести и равновесных податливостей $\varphi_m, \varphi_0, \varphi_c$). Соответствие спектров позволяет принять равными времени запаздывания $\tau = \tau_0 = \tau_c$ для указанных видов деформации. Отсюда получаем значения констант $K = \varphi_0^{-1} = 1/3(1 + 2K_b)/\varphi_m = 1.05 \cdot 10^7$ н/м², $G = (2\varphi_c)^{-1} = 1/2(1 - K_b)/\varphi_m = 3.4 \cdot 10^6$ н/м², $K_* = \tau K = 3.46 \cdot 10^4$ нсек/м², $\eta = \tau G = 1.12 \cdot 10^4$ нсек/м².

Расчеты проведены на сетке 0.5×0.5 , причем область решения расширена до 24.5×20 м за счет трех слоев у ее твердых границ. Координаты узлов сетки, необходи-

мые для расфировки выданы размерных параметров на матрицах, следующие: $x_1^{(h)}=0, 2.5, 4.5, 6, 6.5, \dots, 18.5, 20, 22, 24.5$ м; $x_2^{(l)}=0, 2.5, 4.5, 6, 6.5, \dots, 20$ м.

В приводимых ниже примерах приняты нулевые начальные условия; $F_j = \sigma_{ij}^0 = 0$. Скачок давления приложен синхронно ко всей свободной поверхности $x_2 = H^+(-\sigma_{22} = -qH(t))$, H — функция Хевисайда) или движется с постоянной скоростью D_0 вдоль оси x_1 с началом, соответствующим началу отсчета времени t ($-\sigma_{22} = qH(\chi)$, $\chi = D_0 t - x_1$), причем $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$. По твердым границам области решения приняты условия проскальзывания без трения. При синхронном нагружении тело размещалось симметрично относительно вертикальных границ области, а при движущемся скачке — асимметрично. Размещение тела показано контуром на матрицах, причем каждая из вертикальных границ тела расположена между двойными линиями, где выданы интерполированные значения между соседними узлами сетки.

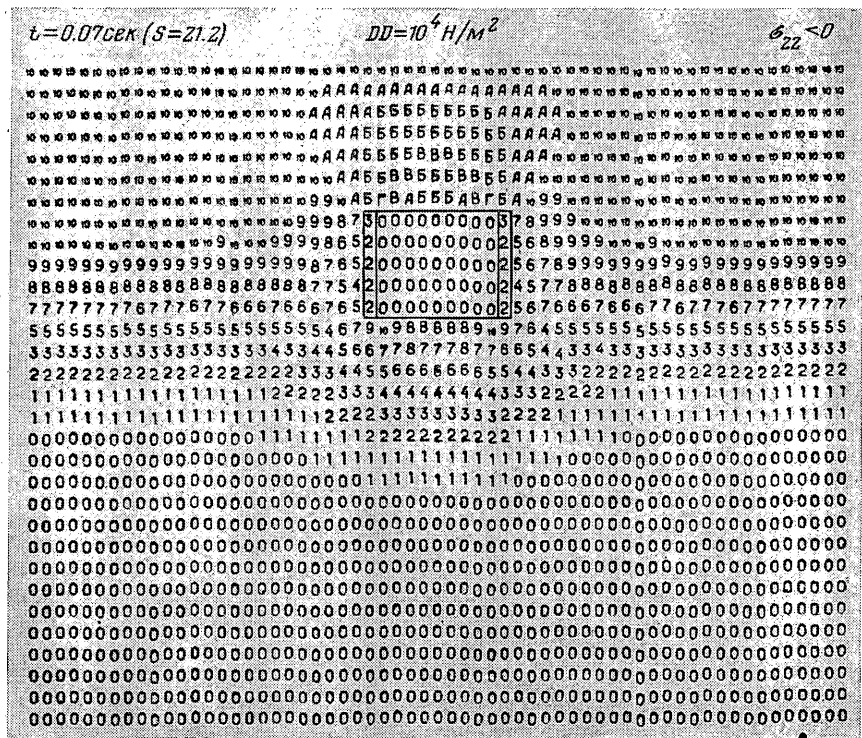
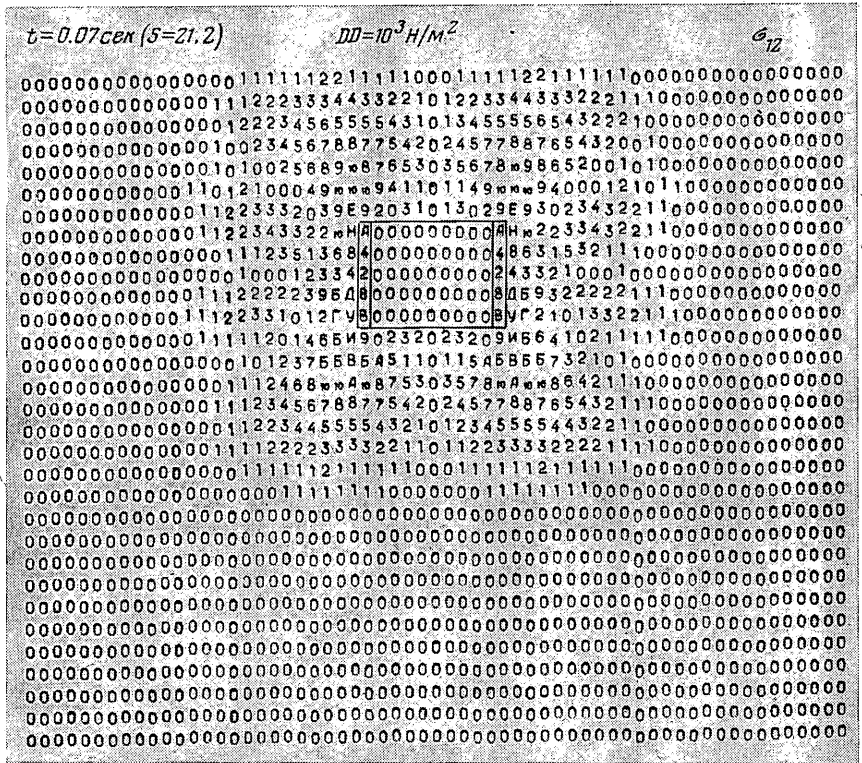
В расчетах использованы параметры $q = 10^5$ н/м², $D_0 = 465$ м/сек, высота тела $a = 2.5$ м; в основном варианте — ширина тела $b = a$, толщина слоя над телом 3.50 м, удельная масса тела $M = \rho ab$ (т. е. его средняя плотность равна плотности среды), момент инерции I определен в предположении, что вся масса равномерно распределена вдоль контура тела. Некоторые параметры варьировались, что оговаривается. Ниже использованы безразмерные величины: время $s = t/t_*$, координаты $x_i^0 = x_i/x_*$, смещения $u_i^0 = u_i/x_*$, размеры $l^0 = l/x_*$, скорости $v_i^0 = v_i t_*/x_*$, $\varphi^0 = \varphi t_*$ (знак градуса в дальнейшем опущен), причем характерные параметры вводятся по формулам: длина $x_* = \mu(\rho C)^{-1/2} = 28.52$ см, время $t_* = \mu/C = 3.3 \cdot 10^{-3}$ сек ($C \equiv K + 4/3G$).

Результаты расчета для основного варианта и для случая когда $b/a = 2$ (масса тела удвоена и равномерно распределена вдоль контура), иллюстрируются матрицами фиг. 3, а, б (синхронная) и фиг. 4, а, б (бегущая волна) для моментов времени, когда волна сжатия распространялась вдоль $-x_2$ примерно на $3a$. Такой же порядок имеет размер зоны дифракции, выделяющейся на фоне нулевого уровня матрицы σ_{12} (фиг. 3, а). Для этого случая горизонтальное движение среды выше и ниже тела происходит к периферии, а на уровне тела — к нему. Вертикальная скорость тела заметно отстает от скорости частиц среды на уровне центра, в связи с чем над телом видна зона отраженной волны. Скорости частиц в невозмущенной волне сжатия на уровне нижней грани тела примерно в два раза меньше скорости тела. В результате различия в скоростях происходит излучение поперечных волн, а нижней гранью — продольной волны. Модули напряжения σ_{22} вблизи центров вертикальных граней примерно вдвое меньше, чем в волне. Касательные напряжения вдоль вертикальных граней распределены так, что их верхние участки нагружены усилиями, ускоряющими тело, а нижние — тормозящими, причем нейтральная линия в процессе набегания волны смещается вниз.

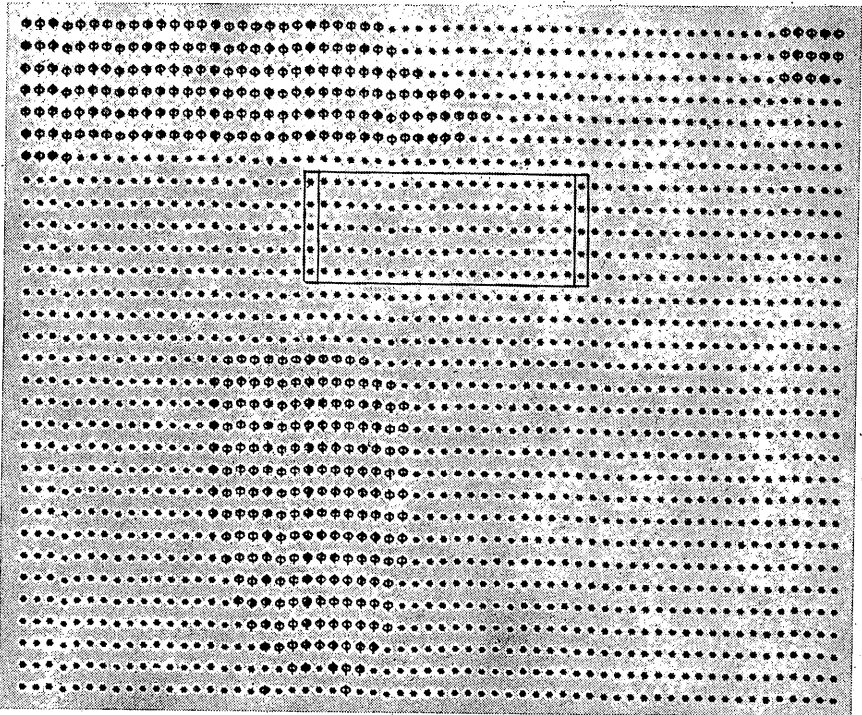
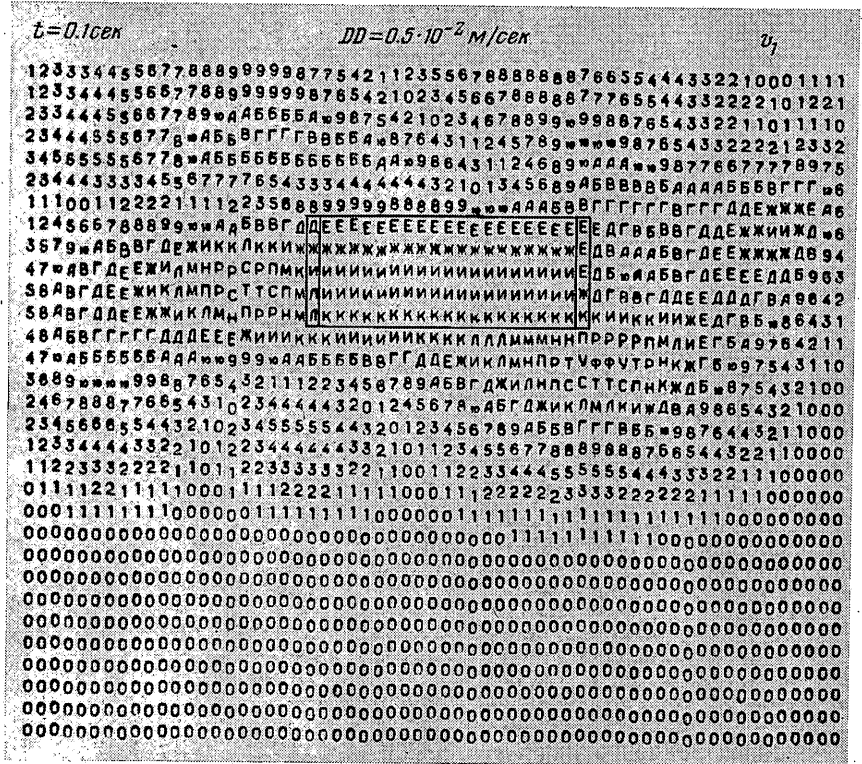
На фиг. 5 справа от вертикальных осей показано изменение со временем распределения компонентов тензора напряжений по контуру тела с $b/a = 1$ на расстоянии полшага сетки для случая синхронной волны. Концентрация напряжений σ_{22} заметно выражена перед углами тела ближе к его вертикальной оси, а σ_{12} — перед верхними углами дальше от оси симметрии. Характер неравномерности для σ_{11} связан в основном с набеганием волны.

На фиг. 6, а показано изменение со временем компоненты v_2 вектора скорости частиц среды в невозмущенной волне на глубинах 6.15 (кривая 1), 11.4 (2) и 16.7 (3) (глубина центра тела). Скорость тела (кривая 4) вначале несколько превышает скорость среды (3), а затем становится ниже, что можно объяснить влиянием отраженной от верхней грани волны. Изменение напряжений в невозмущенной волне на тех же глубинах показано на фиг. 6, б соответственно σ_{11} (кривые 1°–3°), σ_{22} (1–3). Модуль напряжения σ_{22} у центра верхней грани (кривая 4) значительно больше, чем на том же уровне в волне (2), тогда как σ_{22} под центром нижней грани (5) в начальной фазе обтекания слабо отличается от напряжения в волне на уровне центра тела (3). Изменение напряжения σ_{11} у центра боковой грани (6) слабо отличается от волнового (3°).

Сравнение решений одномерного и двумерного приближения может дать некоторое представление о влиянии касательных напряжений и концентрации напряжений по контуру тела, а также о возможности распространения полученных количественных оценок на пространственную схему. Решение по одномерной схеме проведено при аппроксимации уравнений полудискретным аналогом (прием, тождественный методу конечных элементов). Краевая задача п. 1 для случая одной пространственной переменной $x_2 \equiv x$ сведена к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной t . При помощи разностных операторов для узловых точек $l=1, 2, \dots$ (с шагом h) $\Delta F_l = F(x_l + h) - F(x_l)$, $\nabla F_l = F(x_l) - F(x_l - h)$ частные производные по x аппрок-



Фиг. 3



Фиг. 4

смиривались соотношениями $(\sigma_{22})'_i = \nabla \sigma_i h^{-1}$, $(u_2)_i' = \Delta u_{i-1/2} h^{-1}$. Уравнение состояния для одноосной деформации $\sigma_i = C \varepsilon_i + \mu \varepsilon_i$ соответствовало закону (1.2) при $C = K + 1/3 G$, $\mu = K_* + 1/3 \eta$. Уравнение движения тела, впаянного в столб среды, естественным образом входит в аппроксимирующую для всей совокупности l систему обыкновенных уравнений, которая решалась методом Рунге — Кутты.

Полученные результаты наложены на фиг. 6, а, где кривая 5 соответствует скорости тела, и на фиг. 6, б, где кривые 7, 8 изображают те же функции, что и кривые 4, 5. Существенное различие наблюдается лишь для поздней стадии процесса ($s > 25$), причем в двумерном варианте напряжения σ_{22} (по модулю) над центром верхней грани и под центром нижней больше, чем в одномерном. Лучшая сходимость наблюдается для усредненных напряжений, а также в случае широких тел.

При воздействии бегущей волны наблюдается угловое движение тела, причем разница в линейных скоростях крайних точек тела от поворота находится в пределах одного уровня и существенно меньше вертикальной скорости центра инерции.

На фиг. 7 показаны распределения в различные моменты времени напряжений вокруг тел различной ширины. Концентрация напряжений σ_{ii} против углов тела с $b/a = 2$ наблюдается в достаточно узких зонах и слабо влияет на средние значения. Заметно шире зоны концентрации σ_{12} у углов ближе к вертикальным граням, причем касательные напряжения вдоль горизонтальных граней создают небольшой положительный момент. Значительно больший момент противоположного знака возникает в процессе набегания волны от напряжений σ_{22} по верхней грани тела, в связи с чем тело вращается против часовой стрелки.

Изменение со временем напряжений в волне и у граней тела показано на фиг. 8, а, причем номера кривых означают те же параметры, что и для фиг. 6, б, кроме кривых 6, 7, соответствующих напряжению σ_{11} у центров левой и правой (вертикальных) граней. Несущественное различие в этих напряжениях является следствием малых амплитуд и довольно быстрого угасания скорости v_1 частиц среды в связи с вращением вектора скорости. На фиг. 8, б слева показаны траектории частиц среды, причем масштаб изображения горизонтальных смещений u_1 в пять раз крупнее, чем вертикальных u_2 . Кривые 1—3 соответствуют точкам вдали от тела на глубинах 6.15, 11.4 и 16.7. Метки на кривых и точки (4), соответствующие траектории центра тела с $b/a = 1$, даны через $\Delta s = 3.03$, причем последние из них — для $s_k = 42.4$. Траектория тела слабо отличается от таковой для частицы среды на той же глубине, но заметно выражено фазовое различие, к s_k достигающее 6.05. Справа на фиг. 8, б показано изменение с $\chi_D = \chi/x_*$ угла поворота ω_0 диагонали элемента среды в волне на уровне центра тела, угла поворота φ тела (с $b/a = 1$ — кривая 1, $b/a = 2$ — кривая 3) и соответствующих скоростей (кривые 2, 4). Вращение квадратного тела слабо отличается от поворота элемента среды. Для широкого тела при различии вида функций φ амплитудные значения также близки к таковым для среды. На фиг. 8, в показано векторное поле массовой скорости среды в зоне дифракции при $s = 21.2$ ($b/a = 1$).

5. Рассматривается дифракция волн вокруг тел с деформируемым участком контура Ω . Таким участком является одна (любая) из граней тела, представляемых балкой с известной схемой опорных закреплений. Положение балки со своей координатной системой $y_k z_k$ на Ω фиксируется параметром α_k (или индексом $k = 1, 2, 3, 4$ опорной точки K_k ($z_k = 0$), фиг. 1). Значения прогибов $u^{(s)}$ (вдоль y_k) в узловых точках s на Ω определяются решением уравнения вынужденных упругих колебаний балки, в котором опущены члены, отражающие влияние цепных усилий, деформаций сдвига, центробежной силы и инерции вращения при изгибе

$$D \frac{\partial^4 u}{\partial z_k^4} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q^*(z_k, t) - m \left[z_k \frac{d\varphi}{dt} + X_1^{(k)} \sin(\alpha_k - \varphi) - X_2^{(k)} \cos(\alpha_k - \varphi) \right] \quad (5.1)$$

Здесь m , D — удельная масса и цилиндрическая жесткость балки-полоски, постоянные вдоль z_k , $X_j^{(k)}$ — компоненты вектора ускорения опорной точки K_k , вычисляемые по проинтегрированным по t соотноше-

ниям (4.3). Вторым членом правой части (5.1) учтена инерционная нагрузка на балку за счет смещения ее опор. Поперечная нагрузка (давление) q^* на балку-полоску вырабатывается в результате ее взаимодействия со средой и вычисляется интегрированием проекций компонентов тензора напряжений на внутреннюю нормаль

$$q^* = -\sigma_{11} \sin^2(\alpha_k + \varphi) - \sigma_{22} \cos^2(\alpha_k + \varphi) + \sigma_{12} \sin 2(\alpha_k + \varphi)$$

Для вычисления u используется решение уравнения (5.1) разложением в ряд по собственным формам колебаний $X_n(z_k)$ ($n=1, 2, 3, \dots$).

$$u(z_k, t) = \sum_n T_n(t) X_n(z_k), \quad T_n = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t P_n(\xi) \sin \omega_n(t - \xi) d\xi$$

$$\omega_n^2 = \frac{\lambda_n^4 D}{m}, \quad \lambda_n = \frac{\alpha_n^\circ}{l}, \quad P_n = \int_0^l F_\alpha(z_k, t) X_n(z_k) dz_k \left(\int_0^l X_n^2(z_k) dz_k \right)^{-1} \quad (5.2)$$

где собственные числа λ_n определяются корнями α_n° частотного уравнения, а под F_α подразумевается вся правая часть (5.1). Вычисление первого интеграла в (5.2) проводится по 30 участкам, на которые делится пролет l , а для нахождения T_n используются значения $P_n(t)$, запоминаемые на каждом шаге времени. Как показали пробные расчеты, высокая точность вычислений обеспечивается, если по пролету балки размещено не менее пяти ячеек среды и используется только первый член ряда. Для этого в оперативной памяти отведено место для 10^3 величин P_n , причем учитывается ограничение на круговую частоту балки $0.005 < \omega_1 \Delta t < 0.2$ (граница снизу соответствует длительности процесса $t_m = 10^3 \Delta t \sim 2\pi/\omega_1$, Δt — шаг счета по времени).

Приводятся числовые примеры для расположенной на Ω балки, шарнирно-закрепленной на опорах (для которой $X_n = \sin n\pi x/l$, а корни частотного уравнения $\sin \alpha_n^\circ = 0$ имеют значения $\alpha_n^\circ = n\pi$). Параметры балки фиксированы: $\omega_1 = 157 \text{ рад/сек}$, $m = 535 \text{ кг/м}^2$, для балок с $k=1$ и 3 $l/b=1$, а с $k=2$ и 4 $l/a=1$ ($\omega_1 \tau = 0.52$). Положение тел в среде прежние.

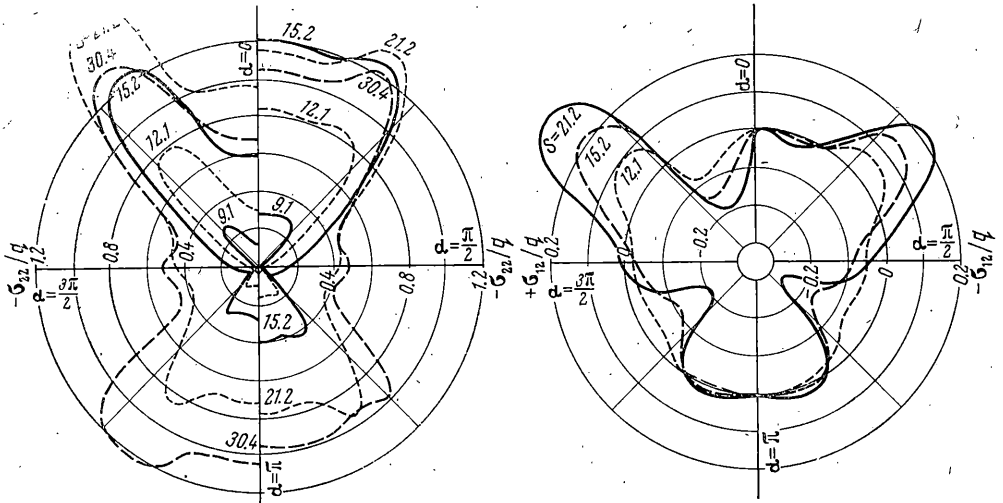
Деформация контура тела заметно меняет дифракционную картину, особенно в зонах у опор балки. Например, наличие балки снизу тела ($b/a=1$, $k=3$, $\alpha_3=\pi$) значительно уменьшает вертикальную реакцию ($|\sigma_{22}|$ снизу), в связи с чем скорость тела возрастает, а давление отражения на верхней грани снижается.

Происходит также перераспределение касательных напряжений, особенно заметное вдоль балки и вертикальных граней (на нижних участках граней возрастают тормозящие тело напряжения σ_{12} , а на верхних падают напряжения, ускоряющие тело). Распределение σ_{ij} по контуру тела $b/a=1$ с верхней балкой ($k=1$) для случая синхронной волны дано на фиг. 5 (слева от осей). Здесь давление на среднюю часть балки возрастает значительно медленней, чем на верхнюю грань твердого тела (справа), концентрация напряжений над верхними углами выражена более резко.

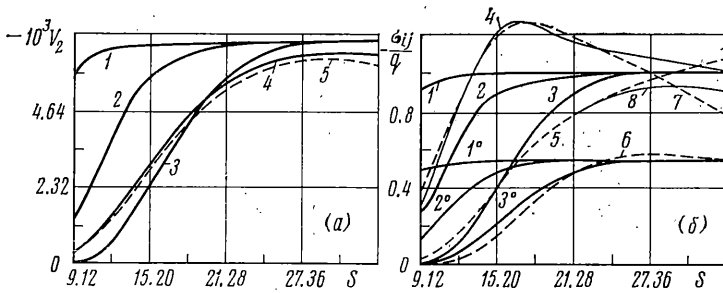
На фиг. 9, а приведены графики скоростей различных тел с верхней ($b/a=1$, кривая 1; $b/a=l/a=5.4$, кривая 2) и с нижней балками ($b/a=l/a=1$, кривая 4) от действия синхронной волны. Слабое различие в скоростях для тел разной ширины можно объяснить малым вкладом касательных напряжений вдоль вертикальных граней в главный вектор сил взаимодействия, направленный против оси x_2 (на верхней и нижней частях этих граней напряжения σ_{12} действуют в различных направлениях и взаимно компенсируются). Движение этих тел вначале заметно отстает от тела с нижней балкой, торможение которого затем происходит более интенсивно.

Для оценки влияния смещения тела и концентрации напряжений вблизи концов балки сравнивается напряжение у ее центра с усредненным равномерно распределенным вдоль z_k давлением $P_*(t) = P_1(t)/K_*^+$, вызывающим тот же прогиб $T_1(t)$, что и неравномерное давление в комбинации с инерционным воздействием за счет движения опор балки. Параметр $K_*^+ = L_p/L_m$, т. е. выражается соответственно через коэффициенты приведения нагрузки и массы

$$L_p = \frac{1}{l} \int_0^l X_1(z_k) dz_k, \quad L_m = \frac{1}{l} \int_0^l X_1^2(z_k) dz_k$$



Фиг. 5



Фиг. 6

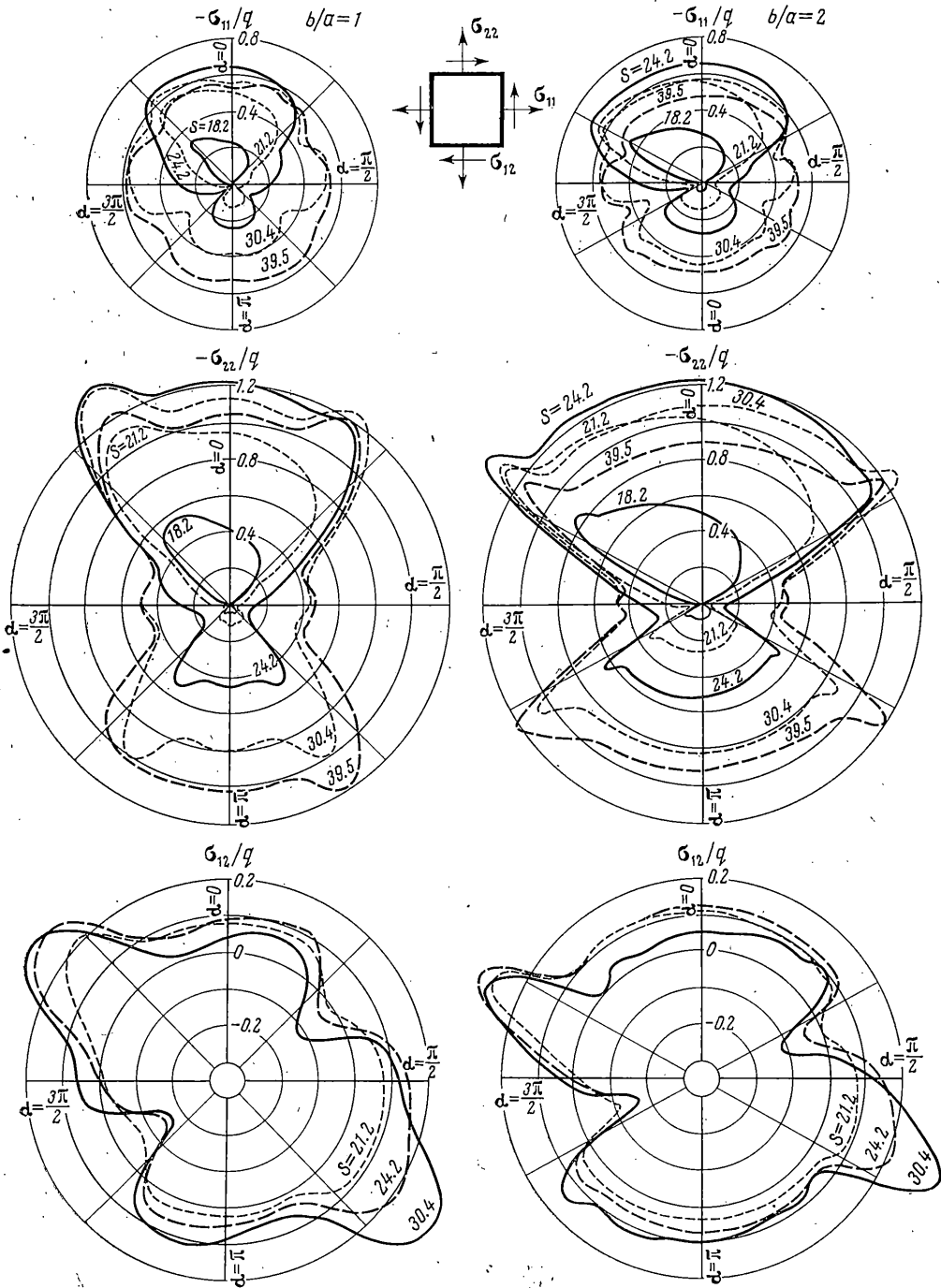
Эти данные для тела $b/a=1$ с верхней балкой приведены на фиг. 9, б: напряжение σ_{22} у центра верхней грани показано кривой 1, нижней — 2, а P_* (с обратным знаком) — 3. Видно, что среднее давление больше модуля напряжения в среде у центра балки. Изменение эквивалентного квазистатического давления на балку $P_{\Delta} = \omega_1^2 m T_1 / K_*^+$ показано кривой 4. Максимум этой функции, отнесенный к величине q , может рассматриваться как динамический коэффициент взаимодействия K_b . Небольшое различие между максимумами кривых 3 и 4 связано с монотонностью нарастания давления. Отношение длительности нарастания давления до максимума к периоду $2\pi/\omega_1$ составило ~ 1.7 (а для случая тела с нижней балкой 2.9), в связи с чем инерционные эффекты от изгиба и смещения опор проявляются слабо. Эти эффекты можно оценить по функции $f = P_{\Delta} K_*^+ / P_1$, выражающей отношение динамического прогиба T_1 к статическому $T_0 = P_1 / (\omega_1^2 m)$ и показанной кривой 5.

Для сравнения с поведением тела с деформируемыми элементами в одномерном приближении проведены расчеты методом полудискретного аналога впаиванной в столб среды (см. п. 4) двухмассовой системы с уравнением движения

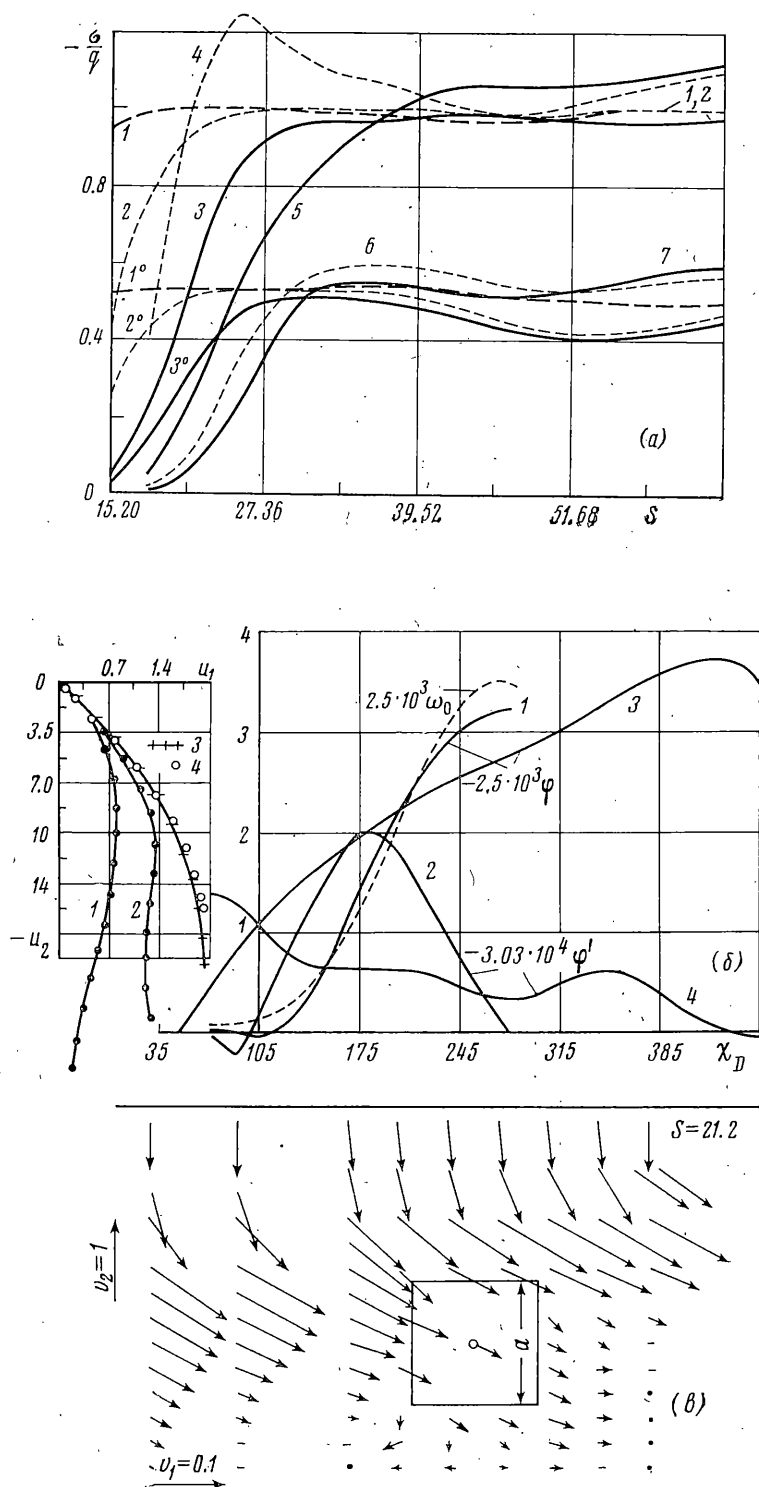
$$m_j L_{mj} v_{(j)} - (-1)^j [L_{pj} (N_0 T L_p^{-1} - P_{*j}^{\circ}) - E] = 0$$

$$N_0 = D l^{-1} \int_0^l [X_1''(z_k)]^2 dz_k, \quad E = \frac{m_j}{m_{3-j}} (L_{mj} - L_{pj}) (N_0 T L_p^{-1} - P_{*3-j}^{\circ})$$

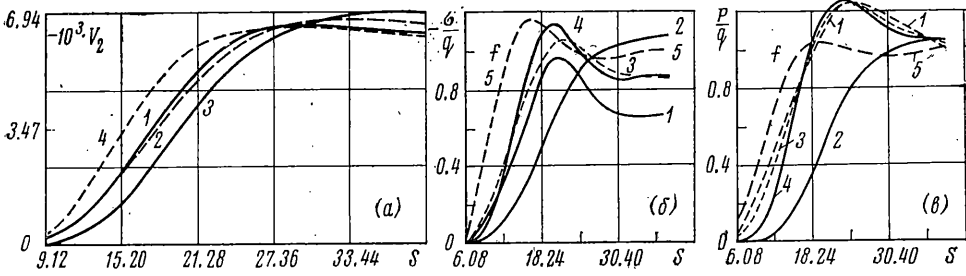
Здесь штрихом обозначено дифференцирование по аргументу, $v_{(j)}$ — скорости масс: для нижней массы $j=1$, для верхней $j=2$, N_0 — удельная приведенная жест-



Фиг. 7

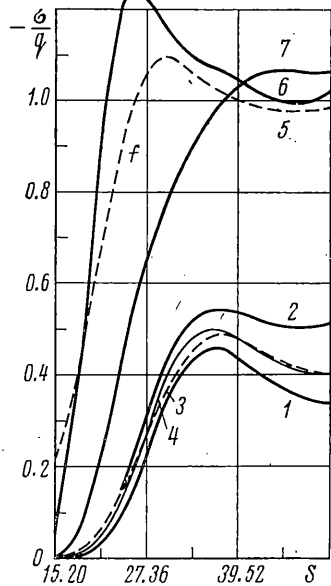


Фиг. 8



Фиг. 9

кость системы. Балка схематизируется одной из находящихся под волновым давлением P_{*j}° среды удельных (отнесенных к единице площади) масс m_j , смещение которой отображает движение центральной точки (приведения) балки с $k=1$ ($j=2$) или $k=3$ ($j=1$), причем прогиб T определяется через эйлеровы координаты масс, т. е. $T^{\circ} = v_{(1)} - v_{(2)}$. Коэффициенты приведения L_{ij} ($i=m, p$) вводятся только для балки, т. е. $L_{i1}=1, L_{i2}=L_i$ ($k=1$); $L_{i1}=L_i, L_{i2}=1$ ($k=3$). Давление на деформируемый элемент с учетом смещения опор (т. е. ускорения $v_{(3-j)}$), сопоставимое с функцией P_* в плоской задаче для $k=1, 3$, будет $P_{*j}^{\circ} = P_{*j}^{\circ} + (-1)^j m_j v_{(3-j)}$, а эквивалентное давление $P_{\Delta} = N_0 T / L_p$. Расчеты по одномерной схеме тела с $b/a=1, k=1$ на синхронную волну, соответствующие данным на фиг. 9, б для плоского случая, проведены с сохранением геометрии вдоль x_2 . На фиг. 9, а кривой 3 показано изменение скорости $v_{(1)}$ основной массы тела, а на фиг. 9, в — давлений $P_{*2}^{\circ}, P_{*1}^{\circ}, P_{*2}, P_{\Delta}$ и функции f (соответственно кривые 1—5). Видно, что одномерное приближение дает завышенные давления на деформируемый элемент, причем различие в экстремумах функций $P_{*2}, P_{*2}^{\circ}, P_{\Delta}$ несущественно, т. е. в данном расчете инерционные эффекты деформирования проявляются крайне слабо. Давление под телом в одномерном расчете оказалось несколько меньшим, чем в двумерном.



Фиг. 10

Результаты расчета воздействия бегущей волны на тело, показанные на фиг. 10, относятся к случаю $k=4$ (балка слева). Приведены изменения напряжений σ_{11} у центров левой (кривая 1), правой (2) граней, давлений $P_*(3), P_{\Delta}(4)$ (с обратным знаком), функции f (5) и напряжений σ_{22} у центров верхней (6) и нижней (7) граней тела с $b/a=1$. Скорости v_1 среды на начальной стадии дифракции превышают скорость тела, и вклад напряжений σ_{12} по горизонтальным граням возбуждает движение тела вдоль x_1 и высокие реакции σ_{11} справа.

Для сравнительной оценки влияния параметров задачи в таблице дана сводка максимумов напряжений у центров граней тел ($b/a=1$) с идеально жестким ($k=0$) и деформируемым на участках контура. Для второго случая приведены также средние и эквивалентные давления на деформируемый элемент (балку). Верхние индексы (1—4) у напряжений указывают номера граней аналогично нумерации k для балок по схеме фиг. 1. Значения напряжений у центров балок взяты в скобки. Приведены также максимальные значения напряжений σ_{11} , которые возникают у вертикальной твердой стенки на уровне центра тела ($\sigma_{11}^{(5)}$) и в пределах слоя ($\sigma_{11}^{(6)}$); эти данные соответствуют правой границе области решения. Для основного варианта 1, соответствующего дифракции волн сжатия вокруг тела в слое большой толщины (в 8 раз превышающей размер тела) при действии синхронной волны, исходные параметры указаны в п. 4.5. Варианты 2—4, 6, 8, 9 отличаются наличием деформируемого участка контура, а 14—18 — уменьшенной толщиной слоя среды (в 14, 15 вариантах толщина слоя в 3.8 раза превышает размер тела, а в 16—18 — только в 2.4 раза). В вариантах 10—13, 16—18 в 2 раза уменьшена толщина слоя над телом, а в 13, 17 понижены на порядок масса и момент инерции тела. В вариантах 7—13, 15—18 (вместо синхронной) задавалась бегущая волна, а в 5, 6, 11 решение проведено в одномерном приближении. Расчеты по вариантам 12,

Вариант	k	$-\sigma_{22}^{(1)}q^{-1}$	$-\sigma_{22}^{(2)}q^{-1}$	$-\sigma_{11}^{(4)}q^{-1}$	$-\sigma_{11}^{(2)}q^{-1}$	P_*q^{-1}	K_b	$-\sigma_{11}^{(5)}q^{-1}$	$-\sigma_{11}^{(6)}q^{-1}$
1	0	1.27	>1.06	0.57	0.57			0.55	0.55
2	1	(0.95)	1.09	0.59	0.59	1,06	1,13	0.55	0.55
3	3	1.18	(0.70)	0.58	0.59	0,86	0,86	0.55	0.55
4	4	1.25	1.08	(0.44)	0.56	0,47	0,48	0.55	0.55
5	0	1.25	0.93						
6	1	(1.24)	1.06			1,24	1,26		
7	0	1.25	1.06	0.60	0.56			0.72	0.76
8	4	1.24	1.07	(0.46)	0.54	0,49	0,50	0.72	0.76
9	2	1.22	1.05	0.42	(0.59)	0,45	0,47	0.72	0.76
10	0	1.31	1.13	0.62	0.58			0.70	0.76
11	0	1.30	0.95						
12	0	1.18	1.17	0.68	0.55			0.89	1.06
13	0	1.14	1.04	0.73	0.45			0.89	1.06
14	0	1.99	2.35	1.08	1.08			1.05	1.10
15	0	1.96	2.30	1.04	1.10			1.20	1.45
16	0	1.45	2.14	0.95	0.78			1.20	1.40
17	0	1.45	1.96	1.00	0.58			1.20	1.40
18	0	1.37	1.74	1.70	1.70			2.00	2.50

13, 16, 17 относятся к жесткой среде: упругие модули увеличены в 7.1, а вязкость — в 2.7 раза. Вариант 18 соответствует разжиженной среде (без прочности и сдвиговой вязкости), причем параметры K и K_* приняты равными соответствующим значениям $K + \frac{4}{3}G$ и $K_* + \frac{4}{3}\eta$ для указанной выше жесткой среды.

Поступила 4 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Уилкинс М. Л. Результаты расчета системы волн в грунте и на его поверхности при надземном и подземном взрывах. Механика, 1973, № 4.
2. Вычислительные методы в гидродинамике. (Сб. перев. с англ. под ред. С. С. Григоряна и Ю. Д. Шмыглевского.) М., «Мир», 1967.