

ПРИМЕНЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
К ИЗУЧЕНИЮ РАСШИРЕНИЯ ТРЕЩИН
ПРИ ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ

З. БИЛЕК, И. ГРЖЕВИЧЕК, З. КНЕСЛ

(Брно)

Большинство металлов, включая сплавы с высокой прочностью, подвергается в областях высокой концентрации напряжений пластической деформации. Хрупкому разрушению, вызванному зародышевой трещиной, предшествует небольшая пластическая деформация в вершине трещин. Эта деформация играет важную роль в процессе хрупкого излома и в настоящее время полностью не объяснена.

Общая проблематика, содержащая вычисления напряжений и деформаций упругопластических моделей трещин, резюмирована в [1-3].

Систематическим анализом напряжений в пластической зоне на кончике трещины для несжимаемого материала Мизеса, который упрочняется так, что эффективное напряжение при сдвиге τ пропорционально эффективной деформации при сдвиге γ , введенной в степень, равную коэффициенту упрочнения N , занимались Хачинсон [4, 5] и Райс [6]:

$$\tau = \tau_0 (\gamma / \gamma_0)^N \quad (\gamma > \gamma_0) \quad (0.1)$$

Здесь τ_0 — предел текучести в сдвиге для материала Мизеса, $\sigma_0 = 3^{1/2} \tau_0$, γ_0 — соответствующая деформация при сдвиге. Отношение максимального растягивающего напряжения к σ_0 непосредственно перед трещиной, которое равно 2.99 для $N = 0$, растет с увеличением N и приобретает величину 3.86 для $N = 0.1$, 4.84 для $N = 0.2$ и 6.73 для $N = 0.3$. Существенное возрастание трехосности напряжения с коэффициентом упрочнения может иметь влияние на критерий критического напряжения, введенного при определении неустойчивости трещины [7] для некоторых высокопрочных материалов.

Эта работа является составной частью более широкого изучения упругопластических моделей трещин с упрочнением и посвящается дальнейшей разработке модели, предложенной в [8, 9]. Установленные результаты были применены для получения зависимости вязкости разрушения A_{IC} от температуры.

1. Для материалов с поведением, согласно уравнению (0.1), Райс и Розенгрэн [8] показали, что составляющие напряжения σ_{ij} и составляющие деформации ε_{ij} вблизи вершины трещины даются уравнениями

$$\sigma_{ij} \rightarrow r^{-N/(1+N)} F_{ij}(\theta), \quad \varepsilon_{ij} \rightarrow r^{-1/(1+N)} R_{ij}(\theta)$$

где r , θ — полярные координаты с началом в вершине трещины, как изображено на фиг. 1, F_{ij} , R_{ij} представляют собой функции полярного угла. Уравнения равновесия будут тождественно выполняться введением функции напряжения Эри

$$U = \frac{(1+N)^2}{2+N} r^{(2+N)/(1+N)} f(\theta), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = r^{-N/(1+N)} f(\theta)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = -\frac{1+N}{2+N} r^{-N/(1+N)} f'(\theta)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = (1+N)r^{-N/(1+N)} \left[f(\theta) + \frac{1+N}{2+N} f''(\theta) \right]$$

Подобным способом условие несжимаемости и уравнение неразрывности тождественно выполняются введением функции

$$\psi = r^{(1+2N)/(1+N)} g(\theta)$$

Составляющие перемещения u_r, u_θ будут

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -r^{N/(1+N)} g'(\theta), \quad u_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1+2N}{1+N} r^{N/(1+N)} g(\theta)$$

Перемещения u_r, u_θ позволяют вычислить

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} = -\varepsilon_{rr} &= \frac{N}{1+N} r^{-1/(1+N)} g'(\theta) \\ \varepsilon_{r\theta} &= -\frac{1}{2} r^{-1/(1+N)} \left[\frac{1+2N}{(1+N)^2} g(\theta) + g''(\theta) \right] \end{aligned}$$

Функции $f(\theta), g(\theta)$ являются зависимыми и должны быть найдены так, чтобы было выполнено уравнение (0.1) и соотношение между напряжениями и деформациями

$$s_{ij} = (2\tau/\gamma) \varepsilon_{ij} \tag{1.1}$$

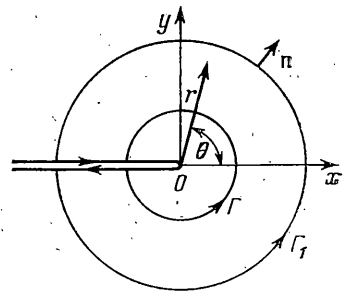
где s_{ij} — девиатор напряжения, τ является эффективным напряжением при сдвиге, определенным соотношением $\tau^2 = 1/2 s_{ij} s_{ij}$, и γ составляет эффективную деформацию при сдвиге $\gamma^2 = 2\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$. Из уравнений (1.1), (0.1) получим для $f(\theta), g(\theta)$ два дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} \left[f'' + \frac{N(2+N)}{(1+N)^2} f \right] \left[g'' + \frac{1+2N}{(1+N)^2} g \right] = \\ = -\frac{4N}{(1+N)^2} g' f' \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \left[f'' + \frac{N(2+N)}{(1+N)^2} f \right]^2 + \frac{4}{(1+N)^2} f'^2 = \\ = \frac{4\tau_0^2}{\gamma^2 N_0} \frac{(2+N)^2}{(1+N)^4} \left\{ \frac{4N^2}{(1+N)^2} g'^2 + \right. \\ \left. + \left[g'' + \frac{1+2N}{(1+N)^2} g \right]^2 \right\}^N \end{aligned} \tag{1.3}$$

Для $f(\theta)$ получим из (1.2), (1.3) нелинейно-дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\begin{aligned} f^{iv} + \frac{N(2+N)}{(1+N)^2} f'' + \frac{N}{h^2 + 4Nf'^2} \left\{ \frac{1}{(1+N)^2} \left(4Nf'' + \frac{1+2N}{1+N} h \right) \times \right. \\ \times (h^2 + 4f'^2) + \frac{4(1-N)}{(1+N)^2} f'(hh' + 4f'f'') + \frac{1-N}{N(1+N)} \times \\ \left. \times [3hh'^2 + 8h'f'f'' + 4h(f''^2 + f'f''')] \right\} + \frac{(1-N)(1-3N)}{N^2(1+N)} \frac{h}{h^2 + 4f'^2} [hh' + 4f'f''] \Big\} = 0 \\ h = (1+N)f'' + [N(2+N)/(1+N)] f \end{aligned} \tag{1.4}$$



Фиг. 1

Симметрия задачи требует, чтобы $\sigma_{r\theta}$, $\partial\sigma_{rr}/\partial\theta$ и $\partial\sigma_{\theta\theta}/\partial\theta$ были равны нулю для $\theta=0$ и, следовательно

$$f'(0) = f'''(0) = 0 \quad (1.5)$$

Незагруженная поверхность трещин требует, чтобы $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ исчезали для $\theta=\pi$, т. е.

$$f(\pi) = f'(\pi) = 0 \quad (1.6)$$

Последнее граничное условие может быть выбрано, например, в виде

$$f(0) = 1 \quad (1.7)$$

(решение будет подвергнуто позже нормализации). Из этих пяти граничных условий являются независимыми только четыре. Решением уравнения (1.4) с учетом условий (1.5) — (1.7) является функция $f(\theta)$, определяемая с точностью до мультипликативной константы A , которую находим при помощи J -интеграла Райса — Черепанова [9, 10]. Этот независимый от интеграционного пути интеграл J был введен соотношением

$$J = \int_{\Gamma} \left[w(r, \theta) dy - \left(\sigma_{ij} n_j \frac{\partial u}{\partial x} \right) ds \right] \quad (1.8)$$

где w — плотность энергий деформации, u — вектор перемещения, n_j — составляющие наружной нормали n к кривой Γ , ds — дифференциал дуги кривой. Интеграл J , вычисленный по кривой Γ_1 , которая лежит в упругой области, для плоской деформации будет равен [10]

$$J = (1 - \nu^2) K_I^2 / E \quad (1.9)$$

где K_I — коэффициент интенсивности напряжений, который является функцией внешней нагрузки и геометрии тела (критическая величина коэффициента интенсивности напряжения, соответствующая моменту неустойчивости трещины, обозначается K_{IC} и называется вязкостью разрушения); ν — константа Пуассона; E — модуль упругости при растяжении. При вычислении интеграла J по кривой Γ , находящейся в пластической области, получим

$$J = \frac{2(1+\nu)}{E(1+N)} \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right)^{(N-1)/N} A_0^{(1+N)/N} I \quad (1.10)$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{1+N} \tau^{(N+1)/N} \cos \theta - \sin \theta [\sigma_{rr}(u_\theta - u_r^*) - \sigma_{r\theta}(u_r + u_\theta^*)] + \right. \\ \left. + \frac{N \cos \theta}{1+N} (\sigma_{rr} u_r + \sigma_{r\theta} u_\theta) \right\} d\theta \quad (1.11)$$

$$u_r^* = \partial u_r / \partial \theta, \quad u_\theta^* = \partial u_\theta / \partial \theta$$

Так как величина интеграла J не зависит от интеграционного пути, сравнением уравнений (1.9), (1.10) определяем константу A_0

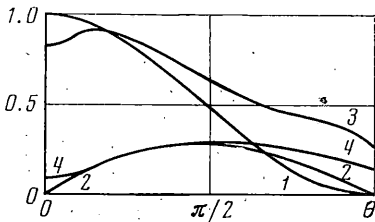
$$A_0 = \sigma_0 D_0 \left[\frac{K_I}{\sigma_0} \right]^{2N/(1+N)}, \quad D_0 = \left[\frac{(1-\nu)(1+N)}{2I} 3^{(N-1)/2N} \right]^{N/(1+N)}$$

Уравнение (1.4) было решено численно переходом к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями по методу Гилла. Величина второй производной решения вначале была определена по методу деления пополам интервала $\langle -4/(2+\pi), a \rangle$ при выполнении граничных условий (1.6).

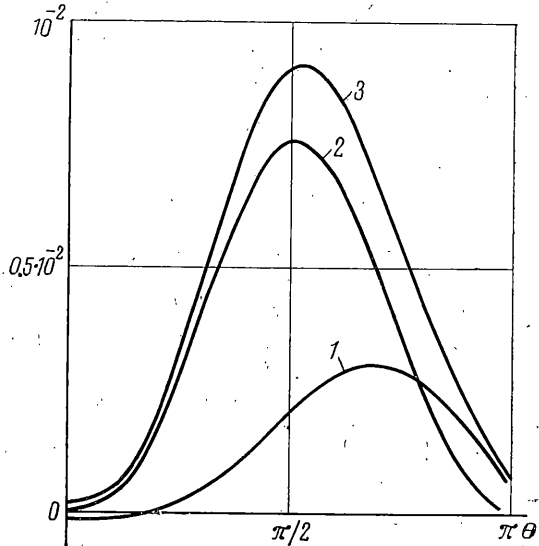
При численном решении выбрали $a = -0.5$ и уравнение (1.4) было решено с интеграционным шагом 1° (интеграционный шаг был определен по методу Рунге деления шага пополам так, чтобы асимптотическая оценка ошибки численного решения уравнения (1.4) была меньше чем 10^{-6}), что было достаточным для $N < 0.8$. Для $N \geq 0.8$ нужно было выбрать шаг до 0.2° . Функция $g(\theta)$ была определена численной интеграцией уравнения

$$g'(\theta) = \frac{(1+N)^{(N+1)/N}}{2N} \frac{1}{[2(2+N)]^{1/N}} h[h^2 + 4f'^2]^{(1-N)/2N}$$

выведенного из уравнений (1.2), (1.3). Интеграл (1.11) был вычислен методом прямоугольника. При его вычислении применялись симметрия и антисимметрия составляющих напряжения и перемещения. Вычисление было выполнено на ВМ ЗПА600, и решение задачи для одной величины N , включая вычисления $f''(0)$ и интеграла, продолжалось приблизительно 5 мин. В случае, если бы была известна величина $f''(0)$, все вычисление продолжалось бы приблизительно 30 сек.



Фиг. 2



Фиг. 3

Численно определенные функции $f(\theta)$, $g(\theta)$ и их производные допускают вычисление составляющих напряжения и деформации в зависимости от угла θ . Эти зависимости для случая $N=0.3$ приведены на фиг. 2 (кривые 1, 2, 3, 4 относятся соответственно к $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$, σ_{rr} , τ) и фиг. 3 (кривые 1, 2, 3 относятся соответственно к ϵ_{rr} , $\epsilon_{r\theta}$, $\epsilon_{\theta f}$). При этом функции эффективного напряжения при сдвиге и эффективной деформации определялись по формулам

$$\tau = \frac{\sigma_{ef}}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{4} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + \sigma_{r\theta}^2 \right)^{1/2}$$

$$\epsilon_{ef} = \frac{\gamma}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\epsilon_{rr}^2 + \epsilon_{r\theta}^2} = \frac{\sigma_0}{E} \left(\frac{R(\theta, N)}{r} \right)^{1/(1+N)} \quad (1.12)$$

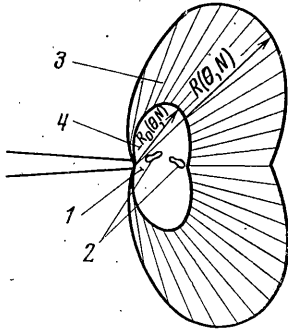
где $R(\theta, N)$ обозначает величину пластической области, показанную на фиг. 4, изображающей схематическую модель процесса хрупкого разрушения (1 — пластические соединения, 2 — микротрещины, 3 — пластическая область, 4 — область предразрушения). Величины τ , γ или σ_{ef} , ϵ_{ef} часто используются при выборе критерия неустойчивости трещины. Абсолютные величины напряжений получаются умножением относительных величин, приведенных на графиках фиг. 2, на константу A_0 . Действительная дефор-

мация получается умножением относительных величин, изображенных на фиг. 3, на константу B_0 .

$$B_0 = 2\sigma_0^{(N-1)/(1+N)} K_{IC}^{2/(1+N)} \frac{1+\nu}{E} \left[\frac{(1-\nu)(1+N)}{2I} \right]^{1/(1+N)} 3^{(1-N)/2(1+N)}$$

Величины константы D_0 и интеграла I , которые нужны для целого ряда вычислений, приводятся для разных N в таблице.

При использовании приведенных величин нужно иметь в виду, что было определено решение, содержащее только сингулярные члены. Пренебрежение упругой (а возможно и пластической) сжимаемостью также изменяет предсказанные величины, особенно в области высоких напряжений перед трещиной, где приближительная оценка величины пластической зоны из сингулярного решения значительно меньше, чем величины, наблюдаемые Герберихом [11].



Фиг. 4

2. В работе [12] было определено, что в области хрупкого разрушения у большого ряда сталей обратные величины квадрата вязкости разрушения K_{IC} линейно зависят от абсолютной температуры T

$$1 / K_{IC}^2 = A - BT \quad (2.1)$$

Далее было показано, что константа A не зависит от температуры и скорости деформаций. В этой работе представляет интерес уравнение (2.1) на основе энергетического баланса при распространении трещины.

N	D_0	I	N	D_0	I
0.1	2.155	$4.218 \cdot 10^{-7}$	0.6	0.721	0.662
0.2	1.670	$1.538 \cdot 10^{-3}$	0.7	0.608	1.122
0.3	1.324	$2.674 \cdot 10^{-2}$	0.8	0.521	1.701
0.4	1.066	0.123	0.9	0.454	2.377
0.5	0.873	0.328			

Предполагаем, что общая энергия поглощения, отнесенная на единицу поверхности P , состоит из энергии, связанной с образованием новой поверхности P_0 и из энергии P_p , связанной с пластической деформацией в вершине трещины

$$P = P_0 + P_p \quad (2.2)$$

Энергия P_0 поглощается только на поверхности, тогда как энергия P_p поглощается в объеме вблизи поверхности трещины. Если пластическая зона в вершине трещины небольшая по сравнению с остальными размерами тела, можем применить для отыскания соотношения между P и K_{IC} линейную механику разрушения, на основании которой

$$P = [(1-\nu^2) K_{IC}^2] / 2E \quad (2.3)$$

Так как плотность деформационной энергии $w(r, \theta)$, определенная соотношением

$$w(r, \theta) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \frac{(1-\nu^2) K_{IC}^2}{ErI} \left(\frac{\tau}{A_0} \right)^{(1+N)/N} \quad (2.4)$$

зависит от угла θ , вводим среднюю величину энергии P_p

$$P_p = \frac{1}{2\pi} \int_{R_0(\theta, N)}^{R(\theta, N)} \int_{-\pi}^{+\pi} w(r, \theta) d\theta dr \quad (2.5)$$

$R_0(\theta, N)$ обозначает величину области, в которой эффективное напряжение достигает величин, близких напряжению в изломе σ_f . В этой области происходит возникновение трехразмерной сети микротрещин, взаимно соединенных пластическими элементами (фиг. 4) и здесь перестает действовать механика твердого тела.

Из (2.5) получим

$$P_p = \frac{(1-\nu^2) K_{IC}^2}{2E\pi^2} F(N) \ln \frac{R(\theta, N)}{R_0(\theta, N)} \quad (2.6)$$

$$F(N) = \frac{\pi}{I} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\tau}{A_0} \right)^{(1+N)/N} d\theta \quad (2.7)$$

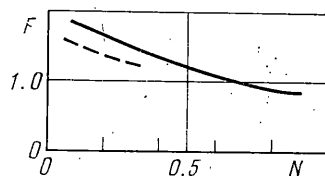
С помощью численного интегрирования зависимость (2.7) представлена графиком на фиг. 5 (сплошная линия).

Пунктиром показана кривая, экстраполированная из величин, найденных Хачинсоном [4]. Наблюдаемая разница (примерно 15%) объясняется разными подходами к решению одинаковой проблемы. Если будем исходить из предположения, что для $r=R_0(\theta, N)$ эффективная деформация приобретает величины деформации при изломе $\varepsilon_{ef}=\varepsilon_f$, получим из уравнений (0.1), (1.12) после преобразования

$$\frac{R(\theta, N)}{R_0(\theta, N)} = \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0} \right)^{(1+N)/N} \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в уравнение (2.6), получим

$$P_p = \frac{(1-\nu^2) K_{IC}^2}{2E\pi^2} F(N) \frac{N+1}{N} \ln \frac{\sigma_f}{\sigma_0} \quad (2.9)$$



Фиг. 5

С учетом того, что действительные величины вязкости разрушения K_{IC} обычно измеряются в диапазоне температур, в котором $\sigma_f / \sigma_0 \leq 2$, уравнение (2.9) далее упростим развертыванием логарифмического члена в ряд

$$\ln \frac{\sigma_f}{\sigma_0} = \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0} - 1 \right)^2 + \dots$$

Если сохраним лишь первый член этого ряда, получим для P_p приближенное соотношение

$$P_p \approx \frac{(1-\nu^2) K_{IC}^2}{2E\pi^2} \frac{N+1}{N} F(N) \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0} - 1 \right)$$

Подстановкой (2.3), (2.4) в уравнение (2.2) получим после преобразования

$$\frac{1}{K_{IC}^2} \approx \frac{1-\nu^2}{2P_0 E} \left[1 + \frac{N+1}{N\pi^2} F(N) \right] - \frac{1-\nu^2}{2P_0 E} \frac{N+1}{N\pi^2} F(N) \frac{\sigma_f}{\sigma_0} \quad (2.10)$$

Полученное уравнение (2.10) дает приближенную зависимость между вязкостью разрушения K_{IC} и основными свойствами материала, определяемыми при испытании на растяжение. Уравнение (2.10) отличается от уравнений, полученных другими авторами и сравниваемых в работах Билека и Гольцманна [7], прежде всего учетом поверхностных свойств материала, характеризуемых константой P_0 . Из уравнения (2.10) следует, что K_{IC} в большей степени зависит от коэффициента упрочнения N и от отношения напряжения в изломе к пределу текучести.

Для стали 1020 и для иных материалов, которые имеют температурно-независимый коэффициент упрочнения и напряжения в изломе, температурная зависимость $1/K_{IC}^2$ дается температурной зависимостью предела текучести, потому что обратная величина предела текучести прямо пропорциональна абсолютной температуре. Поэтому для таких материалов уравнение (2.10) можно записать в форме уравнения (2.1), в котором

$$A = \frac{1-\nu^2}{2EP_0} \left(1 + \frac{N+1}{N\pi^2} F(N) \right) \quad (2.11)$$

$$B = \frac{1-\nu^2}{2EP_0} \frac{N+1}{N\pi^2} F(N) \frac{\sigma_f}{\sigma_0} \frac{1}{T} \quad (2.12)$$

Значение константы A и результаты испытаний на растяжение позволяют вычислить угловой коэффициент прямой $1/K_{IC}^2-T$. Из уравнений (2.11), (2.12) вытекает

$$B = \left[\frac{N+1}{N\pi^2} F(N) \frac{\sigma_f}{\sigma_0} \frac{A}{T} \right] \left[1 + \frac{N+1}{N\pi^2} F(N) \right]^{-1} \quad (2.13)$$

При вычислении B для стали 1020 принимаем величины, измеренные в работе [13]: $N=0.2$ и величины предела текучести σ_0 для пяти разных температур. По графику (фиг. 5) определяем $F(N)=1.55$, из диаграммы K_{IC}^2-T имеем $A=4.35 \cdot 10^{-5} (\text{кг} \cdot \text{мм}^{3/2})^{-2}$. Средняя величина, из пяти вычисленных по уравнению (2.13), $B=1.96 \cdot 10^{-7} (\text{кг} \cdot \text{мм}^{-3/2})^2 \text{°K}^{-1}$ очень хорошо согласуется с угловым коэффициентом экспериментально определенной прямой.

Поступила I VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Rice J. R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. In: Fracture. An advanced treatise. Ed. by H. Liebowitz, vol. 2. New York - London. Acad. press, 1968.
2. McClintock F. A. Plasticity aspects of fracture. In: Fracture. An advanced treatise. Ed. by H. Liebowitz, vol. 3. New York - London. Acad. press, 1971.
3. Виреицкий П. М., Панасюк В. В., Ярема С. Я. Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения. Проблемы прочности, 1973, т. 5, вып. 2.
4. Hutchinson J. W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. J. Mech. and Phys. Solids, 1968, vol. 16, No. 1.
5. Hutchinson J. W. Plastic stress and strain fields at a crack tip. J. Mech. and Phys. Solids, 1968, vol. 16, No. 5.
6. Rice J. R. The elastic-plastic mechanics of crack extension. Internat. J. Fracture Mech., 1968, vol. 4, No. 1.
7. Bilek Z., Holzmann M. Kriteria šíření trhliny ve vztahu k závislosti lomové houževnatosti K_{IC} na základních vlastnostech materiálu. Kovové materiály, 1973, vol. 11, No. 6.
8. Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. J. Mech. and Phys. Solids, 1968, vol. 16, No. 1.

9. Черепанов Г. П. О распространении трещин в сплошной среде. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
10. Райс И. Независимый от пути интеграл и приближенный анализ концентрации деформации у вырезов и трещин. (Рус. перев.: Прикл. механ.: Тр. америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1968, т. 35, № 4.)
11. Gerberich W. W. Plastic strain and energy density in cracked plates. Exptl Mech., 1964, vol. 4, No. 11.
12. Bilek Z. The dependence of the static and dynamic fracture toughness of 1020 steel on uniaxial tensile flow properties. Thesis, Brown University, USA, 1972/73.
13. Burns S. J., Bilek Z. The dependence of the fracture toughness of mild steel on temperature and crack velocity. Brown University Techn. Rept., USA, No. 42, 1971.