

НЕЛИНЕЙНАЯ СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ  
МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ  
С ЖЕСТКИМИ НЕСЖИМАЕМЫМИ ЗАПОЛНИТЕЛЯМИ

Г. И. КОЛОСОВ

(Москва)

Современное состояние теории многослойных оболочек освещено в обзорных работах [1, 2]. Данная работа посвящена расчету осесимметричного напряженно-деформированного состояния в многослойных оболочках вращения. Материалы слоев оболочки рассматриваются как упругие, ортотропные и несжимаемые в поперечном направлении. Построение алгоритма расчета проводится на основе теории, опирающейся на гипотезу ломаной линии [3, 4]. Согласно этой гипотезе тангенциальные перемещения в слоях заполнителей являются линейными функциями поперечной координаты, а для несущих слоев принимается геометрическая гипотеза Кирхгофа. Задача определения осесимметричного напряженно-деформированного состояния в многослойной оболочке вращения с учетом конечности перемещений приводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В качестве основных неизвестных выбраны величины, входящие в естественные граничные условия. Количество уравнений системы зависит от числа слоев. Решение нелинейной краевой задачи строится методом последовательных приближений согласно модифицированной схеме Ньютона — Канторовича. Алгоритм реализован в системе БЭСМ-АЛГОЛ. Приводится пример расчета.

1. Замкнутая в окружном направлении тонкая многослойная оболочка считается составленной из чередующихся между собою  $N+1$  несущих слоев и  $N$  слоев заполнителей. Слои пронумерованы от внутренней поверхности к внешней, внутренний и наружный слои считаются несущими, а толщины слоев — постоянными. Исходная поверхность, для которой направление внешней нормали принято за положительное, отнесена к гауссовым криволинейным координатам  $\alpha_1, \alpha_2$ . Геометрические свойства исходной поверхности характеризуются коэффициентами Ляме  $A_i$  и главными радиусами кривизны  $R_i$  ( $i=1, 2$ ). Материал каждого слоя несжимаем в поперечном направлении, так что прогиб оболочки  $w$  постоянен по толщине.

Согласно геометрической гипотезе Кирхгофа, принимаемой для несущих слоев, тангенциальные перемещения  $u^j(z), v^j(z)$  являются линейными функциями поперечной координаты и разыскиваются в виде

$$\begin{aligned} u^j(z) &= u_j + z\psi_{1j}, & v^j(z) &= v_j + z\psi_{2j} & (1.1) \\ \psi_{1j} &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{u_j}{R_1}, & \psi_{2j} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{v_j}{R_2} \end{aligned}$$

( $j=1, 3, 5, \dots, 2N+1$ )

Тангенциальные перемещения точек срединной поверхности  $j$ -го несущего слоя согласно (1.1) равны

$$u^j(\delta_j) = u_j + \delta_j \psi_{1j}, \quad v^j(\delta_j) = v_j + \delta_j \psi_{2j}$$

Здесь  $\delta_j$  — расстояние от исходной до срединной поверхности  $j$ -го несущего слоя.

Системе перемещений в несущих слоях соответствуют деформации

$$\varepsilon_{11}^j = \varepsilon_1^j + z\kappa_1^j + 1/2\psi_{1j}^2, \quad \varepsilon_{12}^j = \omega^j + 2z\tau^j + \psi_{1j}\psi_{2j} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{13}^j = 0 \quad (1 \rightleftharpoons 2) \quad (j=1, 3, 5, \dots, 2N+1)$$

Здесь

$$\varepsilon_1^j = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v_j + \frac{w}{R_1}, \quad \omega_1^j = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_j \quad (1.3)$$

$$\kappa_1^j = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_{1j}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_{2j}, \quad \tau_1^j = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_{2j}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_{1j}$$

$$\tau^j = \frac{1}{2} \left( \tau_1^j + \tau_2^j + \frac{\omega_1^j}{R_2} + \frac{\omega_2^j}{R_1} \right) \quad \omega^j = \omega_1^j + \omega_2^j \quad (1 \rightleftharpoons 2) \quad (u_j \rightleftharpoons v_j)$$

Предположение о справедливости гипотезы ломаной линии для всего многослойного пакета [3, 4] позволяет выразить величины перемещений и деформаций в  $i$ -м слое заполнителя через величины перемещений и деформаций в соседних несущих слоях

$$u^i(z) = u_{i+1} H_{i-1} - u_{i-1} H_i - \frac{z}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \quad (1.4)$$

$$v^i(z) = v_{i+1} H_{i-1} - v_{i-1} H_i - \frac{z}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}$$

$$\varepsilon_{11}^i = H_{i-1} \varepsilon_{11}^{i+1} - H_i \varepsilon_{11}^{i-1}, \quad \varepsilon_{22}^i = H_{i-1} \varepsilon_{22}^{i+1} - H_i \varepsilon_{22}^{i-1}$$

$$\varepsilon_{12}^i = H_{i-1} \varepsilon_{12}^{i+1} - H_i \varepsilon_{12}^{i-1} \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{13}^i = (u_{i+1} - u_{i-1})/t_i, \quad \varepsilon_{23}^i = (v_{i+1} - v_{i-1})/t_i \quad (1.6)$$

Здесь  $t_k, h_k$  — толщина и расстояние от исходной поверхности до внешней границы  $k$ -го слоя;  $H_{i-1} = (z - h_{i-1})/t_i, H_i = (z - h_i)/t_i$ .

В случае среднего изгиба соотношения (1.5) справедливы, когда деформации сдвига в слоях заполнителя малы по сравнению с величинами производных от нормального прогиба, тогда как в случае малых прогибов они переходят в тождества.

Уравнения равновесия тонкой многослойной оболочки с жесткими несжимаемыми заполнителями, полученные на основании вариационного принципа Лагранжа и соотношений (1.1) — (1.6), имеют следующий вид:

$$L_1^j + A_1 A_2 (Q_1^{j+1} - Q_1^{j-1} + p_{01} \delta_1^j + p_{11} \delta_{2N+1}^j) = 0 \quad (1.7)$$

$$L_2^j + A_1 A_2 (Q_2^{j+1} - Q_2^{j-1} + p_{02} \delta_1^j + p_{12} \delta_{2N+1}^j) = 0$$

$$L_3 = p_{03} + p_{13} \quad (j=1, 3, 5, \dots, 2N+1)$$

$$L_1^j = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 N_1^j) + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1^2 S^j) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_2^j + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{A_1}{R_1} H^j \right) + \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H^j + \frac{1}{R_1} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_1^j) + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1^2 H^j) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2^j - A_1 A_2 (N_1^j \psi_{1j} + S^j \psi_{2j}) \right] \quad (1.8)$$

$$L_3 = \frac{1}{R_1} \sum N_1^j + \frac{1}{R_2} \sum N_2^j - \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_2 G_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 G_2}{\partial \alpha_2} \right)$$

$$G_1 = \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 H}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right) - \sum (N_1^j \psi_{1j} + S^j \psi_{2j}) \quad (1 \Leftrightarrow 2)$$

$\delta_k^j$  — символ Кронекера,  $p_{0i}$ ,  $p_{1i}$  ( $i=1, 2, 3$ ) — компоненты поверхностных распределенных нагрузок на внутренней и внешней поверхностях многослойной оболочки соответственно.

Как в уравнениях (1.7), так и во всех последующих соотношениях следует полагать равными нулю все те величины, у которых индекс, соответствующий номеру слоя, окажется больше величины  $2N+1$  или меньше единицы.

Приведенные усилия и моменты определяются соотношениями

$$N_{1k} = \int_{t_k} \sigma_{11} dz, \quad S_k = \int_{t_k} \sigma_{12} dz, \quad M_{1k} = \int_{t_k} \sigma_{11z} dz \quad (1.9)$$

$$H_k = \int_{t_k} \sigma_{12z} dz, \quad t_i Q_1^i = \int_{t_i} \sigma_{13} dz \quad (k=1, 2, 3, \dots, 2N+1; i=2, 4, 6, \dots, 2N; 1 \Leftrightarrow 2)$$

В уравнения (1.7) входят обобщенные усилия и моменты, определяемые соотношениями

$$N_1^j = \frac{\partial U}{\partial g_{11}} = N_{1j} - \frac{M_{1j+1}}{t_{j+1}} + \frac{h_{j+1}}{t_{j+1}} N_{1j+1} + \frac{M_{1j-1}}{t_{j-1}} - \frac{h_{j-2}}{t_{j-1}} N_{1j-1}$$

$$M_1^j = \frac{\partial U}{\partial \kappa_1^j} = M_{1j} - h_j \left( \frac{M_{1j+1}}{t_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{t_{j+1}} N_{1j+1} \right) + h_{j-1} \left( \frac{M_{1j-1}}{t_{j-1}} - \frac{h_{j-2}}{t_{j-1}} N_{1j-1} \right)$$

$$S^j = \frac{\partial U}{\partial g_{12}^j} = S_j - \frac{H_{j+1}}{t_{j+1}} + \frac{h_{j+1}}{t_{j+1}} S_{j+1} + \frac{H_{j-1}}{t_{j-1}} - \frac{h_{j-2}}{t_{j-1}} S_{j-1} \quad (1.10)$$

$$H^j = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial \tau^j} = H_j - h_j \left( \frac{H_{j+1}}{t_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{t_{j+1}} S_{j+1} \right) + h_{j-1} \left( \frac{H_{j-1}}{t_{j-1}} - \frac{h_{j-2}}{t_{j-1}} S_{j-1} \right)$$

$$M_1 = \sum M_1^j, \quad H = \sum H^j \quad (1 \Leftrightarrow 2)$$

Здесь  $U$  — потенциальная энергия многослойной оболочки, отнесенная к единице исходной поверхности

$$g_{11}^j = \varepsilon_1^j + 1/2 \psi_{1j}^2, \quad g_{22}^j = \varepsilon_2^j + 1/2 \psi_{2j}^2, \quad g_{12}^j = \omega^j + \psi_{1j} \psi_{2j}$$

Условия на граничном контуре оболочки  $\alpha_1 = \text{const}$ , вытекающие из вариационного принципа Лагранжа, записываются в виде

$$N_1^j + M_1^j / R_1 = N_{1*}^j + M_{1*}^j / R_1 \quad \text{или} \quad u_j = u_j^*$$

$$S^j + 2H^j / R_2 = S_{*}^j + H_{*}^j / R_2 \quad \text{или} \quad v_j = v_j^*$$

$$(j=1, 3, 5, \dots, 2N+1) \quad (1.11)$$

$$M_1 = M_1^* \quad \text{или} \quad w = w^*$$

$$G_1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} = G_1^* \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial w^*}{\partial \alpha_1}$$

Звездочкой отмечены величины, задаваемые на торцах оболочки. Аналогичным образом записываются граничные условия на контуре  $\alpha_2 = \text{const}$ . Связь обобщенных усилий и моментов с величинами, характеризующими

ми деформации слоев тонкой многослойной оболочки, устанавливаются соотношениями

$$\begin{aligned}
 N_1^j &= (B_1^{j+1}/3 B_1^{j-1} + 1/3 \bar{B}_1^{j+1}) g_{11}^{j+1} + (B_v^{j+1}/3 B_v^{j-1} + 1/3 \bar{B}_v^{j+1}) g_{22}^{j+1} \\
 &+ K_1^j \kappa_1^j + K_v^j \kappa_2^{j+1}/6 [B_1^{j-1} g_{11}^{j-2} + B_v^{j-1} g_{22}^{j-2} + B_1^{j+1} g_{11}^{j+2} + B_v^{j+1} g_{22}^{j+2} + \\
 &+ h_{j+1} (B_1^{j+1} \kappa_1^{j+2} + B_v^{j+1} \kappa_2^{j+2}) + h_{j-2} (B_1^{j-1} \kappa_1^{j-2} + B_v^{j-1} \kappa_2^{j-2})] \quad (1.12) \\
 M_1^j &= D_1^j \kappa_1^j + D_v^j \kappa_2^j + K_1^j g_{11}^j + K_v^j g_{22}^{j+1}/6 [h_{j-1} h_{j-2} (B_1^{j-1} \kappa_1^{j-2} + \\
 &+ B_v^{j-1} \kappa_2^{j-2}) + h_j h_{j+1} (B_1^{j+1} \kappa_1^{j+2} + B_v^{j+1} \kappa_2^{j+2}) + h_{j-1} (B_1^{j-1} g_{11}^{j-2} + \\
 &+ B_v^{j-1} g_{22}^{j-2}) + h_j (B_1^{j+1} g_{11}^{j+2} + B_v^{j+1} g_{22}^{j+2})] \\
 S^j &= (B^j + 1/3 \bar{B}^{j+1} + 1/3 B^{j-1}) g_{12}^j + 2\tau^j K^j + 1/6 (B^{j-1} g_{12}^{j-2} + B^{j+1} g_{12}^{j+2} + \\
 &+ 2h_{j+1} B^{j+1} \tau^{j+2} + 2h_{j-2} B^{j-1} \tau^{j-2}) \\
 H^j &= 2\tau^j D^j + K^j g_{12}^j + 1/6 (h_j B^{j+1} g_{12}^{j+2} + h_{j-1} B^{j-1} g_{12}^{j-2} + \\
 &+ 2h_j h_{j+1} B^{j+1} \tau^{j+2} + 2h_{j-1} h_{j-2} B^{j-1} \tau^{j-2}) \\
 Q_1^i &= G_1^i \varepsilon_{13}^i \quad (i \neq 2) \quad (j=1, 3, \dots, 2N+1; i=2, 4, \dots, 2N) \\
 B_{(\cdot)}^h &= E_{(\cdot)}^h t^h / (1 - \nu_{21}^h \nu_{12}^h), \quad B_v^h = B_1^h \nu_{21}^h \\
 K_{(\cdot)}^j &= B_{(\cdot)}^j \delta_j + 1/3 B^{j-1} h_{j-1} + 1/3 B_{(\cdot)}^{j+1} h_j \\
 D_{(\cdot)}^j &= B_{(\cdot)}^j (\delta_j^2 + 1/12 t_j^2) + 1/3 B_{(\cdot)}^{j+1} h_j^2 + 1/3 B_{(\cdot)}^{j-1} h_{j-1}^2
 \end{aligned}$$

Соотношения (1.12) получены на основании соотношений (1.10) для функции потенциальной энергии тонкой многослойной оболочки и в предположении, что напряженное состояние в слоях является плоским, а связь между напряжениями и деформациями имеет вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= [(\varepsilon_{11}^h + \nu_{21}^h \varepsilon_{22}^h) E_1^h] / (1 - \nu_{12}^h \nu_{21}^h) \quad (1.13) \\
 \sigma_{12} &= G^h \varepsilon_{12}^h, \quad \sigma_{13} = G_1^h \varepsilon_{13}^h \quad (i \neq 2)
 \end{aligned}$$

Величины деформаций для несущих слоев определяются в (1.13) соотношениями (1.2), для слоев заполнителя — соотношениями (1.5), (1.6). Ввиду громоздкости, выражение для функции потенциальной энергии не приводится.

Для однослойной оболочки ( $N=0$ ) основные соотношения (1.1) — (1.3), (1.7), (1.8), (1.12) переходят в уравнения теории однослойных оболочек В. В. Новожилова [5], если в качестве исходной выбрать срединную поверхность оболочки.

2. Напряженное состояние в многослойной оболочке вращения при осесимметричном нагружении не зависит от окружной координаты. Если в качестве основных неизвестных выбрать величины, входящие в естественные граничные условия (1.11), то решение задачи сводится к построению решения системы  $2N+6$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

$$A y' = f + g \quad (2.1)$$

Краевые условия на торцах оболочки записываются в виде

$$y_i = y_i^* \quad (i=1, 2, \dots, N+3) \quad (2.2)$$

Для решения нелинейной краевой задачи (2.1), (2.2) удобно воспользоваться методом последовательных приближений и строить процесс согласно модифицированной схеме Ньютона — Канторовича. Нелинейные члены  $g$  определяются в этом случае из предыдущего приближения и при решении линейной краевой задачи на каждом этапе выступают в роли дополнительных, «фиктивных» нагрузок [6]. В том случае, когда прогибы малы и допустимо пренебречь квадратами углов поворота нормальных элементов в несущих слоях по сравнению с единицей, компоненты вектора  $g$  следует положить равными нулю.

Построение решения линейной краевой задачи для системы (2.1), (2.2) осуществляется с помощью метода ортогональной прогонки [6, 7]. При этом система основных уравнений путем умножения на матрицу  $A^{-1}$ , обратную для матрицы  $A$ , приводится к виду  $y' = A^{-1}(f+g)$ .

Обращение матрицы осуществляется численно в процессе реализации метода ортогональной прогонки.

Для цилиндрической оболочки элементы матрицы  $A$  не зависят от продольной координаты, так что обращение матрицы в этом случае может быть проведено лишь один раз, что позволяет значительно снизить затраты машинного времени при расчетах цилиндрических оболочек.

Определение параметров напряженно-деформированного состояния в оболочке после решения краевой задачи (2.1), (2.2) не вызывает затруднений.

3. Алгоритм расчета на прочность многослойных оболочек вращения с жесткими несжимаемыми заполнителями на основании указанного подхода был реализован в системе БЭСМ-АЛГОЛ. Использование процедуры ортогонализации сделало алгоритм устойчивым и позволило добиваться высокой точности получаемых с его помощью результатов. Алгоритм апробировался на ряде геометрически нелинейных и линейных задач теории однослойных оболочек и известных аналитических решениях задач теории трехслойных пластин и оболочек [6, 8, 9]. Во всех случаях получено хорошее совпадение результатов. Использование только оперативной памяти ЭЦВМ БЭСМ-6 позволило проводить расчеты 11-слойных оболочек вращения. Ниже приводится пример расчета трехслойной цилиндрической оболочки симметричной структуры с изотропными слоями для случая равномерного осевого сжатия. Длина оболочки  $L=800$  мм, радиус  $R=1600$  мм, толщины несущих слоев и заполнителя 1 мм, 2 мм. Механические характеристики внутреннего и наружного слоя:  $E=7000$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\nu=0.3$ ; среднего слоя:  $E=35$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\nu=0.3$ ,  $G_{13}=13.5$  кг/мм<sup>2</sup>. Величина сжимающего усилия составляла 0.9 от величины критического усилия  $N_{11}^0$ , которое определялось согласно [10].

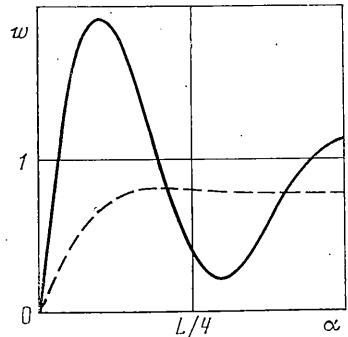
В силу симметрии задачи расчет проводился для половины оболочки, на одном из торцов которой задавались условия

$$N_1^1 = N_1^3 = -0.45N_{11}^0, \quad w = M_1 = 0$$

а на другом — условия симметрии

$$u_1 = u_3 = w' = G_1 = 0$$

Расчет осуществлялся с учетом геометрической нелинейности. Число точек ортогонализации  $M$  при решении линейной краевой задачи выбиралось таким, чтобы в решении содержалось не менее восьми верхних знаков. Процесс последовательных приближений повторялся до тех пор, пока для двух последующих приближений ( $k$ )



и  $(k+1)$  не выполнилось условие

$$\left| \frac{\max |y_i^{(k+1)}(\alpha_s)| - \max |y_i^{(k)}(\alpha_s)|}{\max |\dot{y}_i^{(k)}(\alpha_s)|} \right| < 10^{-3}$$

$$\alpha_s = S \times L/M \quad (0 \leq S \leq M) \quad (1 \leq i \leq 8)$$

Зависимость нормального прогиба оболочки  $w$  от продольной координаты  $\alpha$  представлена на фигуре, где пунктирная кривая соответствует решению задачи в линейной постановке.

Поступила 25 IV 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я., Куршин Л. М. Многослойные пластинки и оболочки. Тр. VII Всес. конференции по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1970.
2. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 6.
3. Григолюк Э. И. Уравнения трехслойных оболочек с легким наполнителем. Изв. АН СССР. ОТИ, 1957, № 1.
4. Григолюк Э. И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким наполнителем. Изв. АН СССР. ОТИ, 1958, № 1.
5. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951.
6. Фролов А. Н. Нелинейная деформация оболочек вращения. Изв. АН СССР. МГТ, 1973, № 1.
7. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1961, т. 16, вып. 3 (99).
8. Маченков В. И. Изгиб круглых трехслойных пластин с легким наполнителем. Прикл. механ., 1967, т. 3, вып. 7.
9. Божко Н. С. Некоторые задачи изгиба трехслойных замкнутых цилиндрических оболочек с жестким наполнителем. Научн. тр. Днепропетр. инж.-строит. ин-та, вып. 16, 1961.
10. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Критические нагрузки трехслойных цилиндрических и конических оболочек. Новосибирск, Зап.-Сиб. кн. изд-во, 1966.