

К ТЕОРИИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

Г. А. МОРАРЬ, Г. Я. ПОПОВ

(Кишинев, Одесса)

Дано эффективное решение интегро-дифференциального уравнения, к которому сводится задача о внутреннем контакте цилиндрических тел близких радиусов с учетом сил трения по контакту. Приведены числовые результаты, выясняющие степень влияния сил трения на распределение нормальных (радиальных) напряжений.

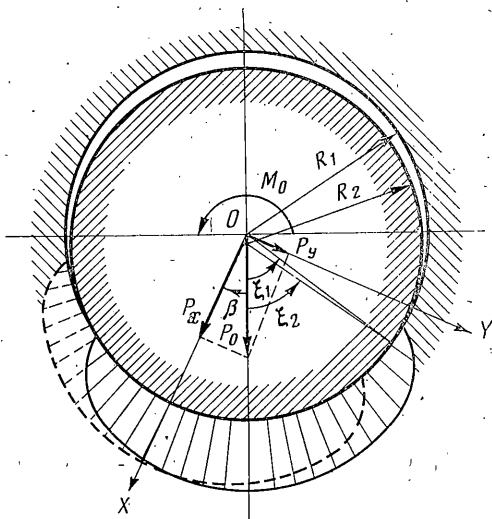
Установлено, что при фиксированных значениях упругих параметров диска и пластины существует критическое значение угла обхвата, которое в рамках линейной теории не может быть достигнуто ни при каких значениях прижимающей силы.

Получена формула, дающая решение задачи в первом приближении без учета сил трения.

1. Пусть диск радиуса R_2 вставлен в круговое отверстие радиуса $R_1 \approx R_2 = R$ бесконечной пластины, причем разность $\varepsilon = R_1 - R_2$ — величина порядка упругих смещений. Диск прижимается к пластине силой P_0 и скручивается моментом M_0 , приложенными в центре диска.

Предположим, что между диском и пластиной кроме нормальных (радиальных) напряжений $p(\xi)$ возникают силы кулоновского трения $\tau(\xi)$, причем имеет место состояние предельного равновесия $\tau(\xi) = \lambda p(\xi)$ [¹] (λ — коэффициент трения, ξ — полярный угол.) Требуется найти $p(\xi)$ и угол обхвата (контакта) 2α при заданных P_0 , M_0 и упругих характеристиках диска и пластины.

Возьмем систему прямоугольных координат XOY (фигура) таким образом, чтобы ось OX проходила через центр площадки контакта. Составляющие прижимающей силы P_0 по осям координат обозначим через P_x и P_y . Вследствие малости величины ε можно принять, что полярные углы контакта пластины и диска равны, т. е. $\xi_1 \approx \xi_2 = \xi$. Как показано в работе [²], напряжения $p(\xi)$ удовлетворяют интегро-дифференциальному уравнению



$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\xi - \eta}{2} [p'(\eta) + \lambda p(\eta)] d\eta - \gamma_1 [p(\xi) - \lambda p'(\xi)] = f(\xi) \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
 f(\xi) &= \gamma_2 R^{-1} (P_x \cos \xi + P_y \sin \xi) + \gamma_3 P_1 + \varepsilon \gamma_4 R^{-1}, \quad |\xi| \leq \alpha \\
 \gamma_1 &= 2\pi \gamma_5 [(1 - \nu_1)(1 + \nu_1) E_2 - (1 - \nu_2)(1 + \nu_2) E_1] \\
 \gamma_2 &= 4\gamma_5 [\nu_1(1 + \nu_1) E_2 + (1 + \nu_2) E_1], \quad \gamma_3 = 2\gamma_5 E_2 (1 + \nu_1)(1 + \nu_1) \\
 \gamma_4 &= 4\pi \gamma_5 E_1 E_2, \quad \gamma_5 = [(1 + \nu_1)(1 + \nu_1) E_2 + (1 + \nu_2)(1 + \nu_2) E_1]^{-1}
 \end{aligned}$$

Условия равновесия дают

$$P_x + iP_y = (1 + i\lambda) R \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{i\xi} p(\xi) d\xi, \quad M_0 = 2\lambda R^2 P_1$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\xi) d\xi, \quad P_y = P_x \operatorname{tg} \beta \quad (1.2)$$

Здесь и выше ν_j , κ_j , E_j — соответственно коэффициент Пуассона, постоянная Мусхелишвили ($\kappa_j = 3 - 4\nu_j$ для плоской деформации и $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ для случая плоского напряженного состояния) и модуль упругости пластинки ($j=1$) и диска ($j=2$); 2α — угол контакта.

Точное решение уравнения (1.1) известно [2] только при $\nu_1 = \nu_2$, $E_1 = E_2$. Ниже приводится приближенное решение в общем случае.

2. Для приближенного решения уравнения (1.1) воспользуемся методом ортогональных многочленов [3] и следующими соотношениями для полиномов Чебышева первого рода $T_m(x)$ и второго рода $U_m(x)$:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\xi - \eta}{2} \frac{T_{m+1}(y)}{\sqrt{2 \cos \eta - 2 \cos \alpha} \cos^{1/2} \eta} d\eta = -\pi \frac{\sec^{1/2} \alpha}{\cos^{2/2} \xi} U_m(x) \quad (2.1)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\xi - \eta}{2} \frac{\sqrt{2 \cos \eta - 2 \cos \alpha}}{\cos^{1/2} \eta} U_m(y) d\eta = 4\pi \sin \frac{\alpha}{2} T_{m+1}(x) + C_m^{(1)} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
 C_m^{(1)} &= 4\pi \sin^{1/2} \alpha \sin^{1/2} m\pi q^{m+1}, \quad q = \operatorname{tg}^{1/4} \alpha \quad (m=0, 1, \dots) \\
 x &= \operatorname{tg}^{1/2} \xi / \operatorname{tg}^{1/2} \alpha, \quad y = \operatorname{tg}^{1/2} \eta / \operatorname{tg}^{1/2} \alpha
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Соотношение (2.1) доказано в работе [4]. Равенство (2.2) заменой (2.3) можно привести к виду

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x-y} + \frac{a^2 y}{1+a^2 y^2} \right) \sqrt{1-y^2} U_m(y) dy = \pi T_{m+1}(x) + C_m^{(2)} \quad (2.4)$$

$$C_m^{(2)} = \pi \sin^{1/2} m\pi q^{m+1}, \quad a = \operatorname{tg}^{1/2} \alpha \quad (m=0, 1, \dots)$$

Интеграл (2.4) представим в виде суммы двух интегралов. Первый из них дан в [5] (стр. 847), а второй в работе [4].

Приближенное решение уравнения (1.1) ищем в виде ряда

$$p(\xi) = \sec \frac{\xi}{2} \sqrt{2 \cos \xi - 2 \cos \alpha} \sum_{m=0}^{\infty} X_m U_m \left(\frac{\operatorname{tg}^{1/2} \xi}{\operatorname{tg}^{1/2} \alpha} \right) \quad (2.5)$$

Дифференцируя последнее соотношение, с учетом формулы 10.11(28) работы [6] получим

$$p'(\xi) = -\frac{\sin \alpha}{\cos^{1/2} \xi} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) X_m \frac{T_{m+1}(\operatorname{tg}^{1/2} \xi / \operatorname{tg}^{1/2} \alpha)}{\sqrt{2 \cos \xi - 2 \cos \alpha}} \quad (2.6)$$

Связь между P_x , P_y , P_1 и неизвестными коэффициентами X_m имеет вид

$$P_x + iP_y = 2\pi(1+i\lambda)R \sin \alpha \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) X_m e^{i/2 m \pi} q^{m+1} \quad (2.7)$$

$$P_1 = 2\pi \sin \frac{\alpha}{2} \sum_{m=0}^{\infty} X_m \cos \frac{m\pi}{2} q^{m+1} \quad (2.8)$$

Для получения последних соотношений следует ряд (2.5) подставить в (1.2), затем перейти к переменной x по формуле (2.3) и учесть, что $\cos \xi = (1-a^2x^2)/(1+a^2x^2)$ и $d\xi = 2adx/(1+a^2x^2)$. Получаемые при этом интегралы вычислены в работах [4, 7].

Подставим (2.5) — (2.8) в уравнение (1.1) и воспользуемся соотношениями (2.1) и (2.2). В полученном равенстве перейдем к переменной x по формуле (2.3). Если умножить обе части на $\sqrt{1-x^2} U_m(x)/(1+a^2x^2)$ и проинтегрировать по x в пределах $(-1, 1)$, с использованием свойства ортогональности полиномов Чебышева, получим бесконечную систему уравнений для неизвестных коэффициентов X_m :

$$X_k + \sum_{m=0}^{\infty} A_{km} X_m = b_k \quad (k=0, 1, \dots) \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} A_{km} = & -\frac{2\gamma_1 a}{\pi^2(k+1)} D_{km} + \frac{2\gamma_1 \lambda}{\pi^2} \frac{(m+1) \sin^2 1/2 \mu \pi}{(m+1)^2 - (k+1)^2} - \\ & - 4\gamma_2(m+1) \cos^2 1/2 \alpha q^{\mu+2} (\cos^2 1/2 \delta \pi + \lambda \sin^2 1/2 \delta \pi) + \\ & + \frac{\lambda \sin 1/2 \alpha}{k+1} \left[\sin \frac{\delta \pi}{2} (q^{1+\delta} + q^{1-\delta}) - \sin \frac{\mu \pi}{2} q^{\mu+1} (1+q^2) \right] + \\ & + 2(k+1)^{-1} \cos^2 1/2 k \pi q^{\mu+2} (2\lambda \sin^2 1/2 m \pi - \gamma_3 \cos^2 1/2 m \pi) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$D_{km} = \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2) U_m(x) U_k(x)}{1+a^2x^2} dx, \quad b_k = \frac{\varepsilon \gamma_4}{\pi R} \frac{\csc^2 1/2 \alpha}{k+1} \cos \frac{k\pi}{2} q^{k+1}$$

$$\delta = k - m, \quad \mu = k + m \quad (m, k = 0, 1, \dots)$$

При получении A_{km} и b_k были использованы интегралы

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} T_{m+1}(x) U_k(x)}{1+a^2x^2} dx = \frac{\pi}{4} \cos \frac{\alpha}{2} \left[\sin \frac{\delta \pi}{2} (q^{1+\delta} + q^{1-\delta}) - \sin \frac{\mu \pi}{2} q^{\mu+1} (1+q^2) \right] \quad (2.11)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1-a^2x^2}{(1+a^2x^2)^2} \sqrt{1-x^2} U_k(x) dx = \pi(k+1) \cos \frac{k\pi}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} q^{k+1} \quad (2.12)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+a^2x^2} U_k(x) dx = \pi \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{k\pi}{2} q^{k+1} \quad (2.13)$$

$$\int_{-1}^1 T_{m+1}(x) U_k(x) dx = \frac{2(k+1) \sin^2 1/2 \mu \pi}{(k+1)^2 - (m+1)^2} \quad (2.14)$$

$$\delta = k - m, \quad \mu = k + m, \quad m, k = 0, 1, \dots$$

Формулу (2.11) легко проверить, если вместо функции $(1+a^2x^2)^{-1}$ подставить ее интегральное представление 3.893 (2) из [5] и изменить порядок интегрирования. Переходя затем к переменной θ по формуле $\theta = \arccos x$ и учитывая, что $T_m(\cos \theta) = \cos m\theta$, $U_m(\cos \theta) = [\sin(m+1)\theta]/\sin \theta$, получим интегралы 3.715 (18) и 6.611 (1) из [5].

Значения интегралов (2.12) и (2.13) даны в работе [7]. В справедливости (2.14) можно убедиться при помощи замены $x = \cos \theta$.

Для вычисления коэффициентов D_{km} можно указать быстро сходящееся разложение [4]:

$$D_{km} = -8 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} (m+1)(k+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) q^{2n+1}}{[(m+1)^2 - (2n-k)^2][(m+1)^2 - (2n+k+2)^2]}$$

где штрих означает, что при вычислении суммы необходимо опустить все члены, для которых знаменатель равен нулю.

Система (2.9) не является квазирегулярной. Однако введением новых неизвестных Y_k по формуле

$$X_k = Y_k (k+1)^{-c} \quad (1/2 < c < 1)$$

получим систему

$$Y_k + (k+1)^c \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-c} A_{km} Y_m = (k+1)^c b_k \quad (k=0, 1, \dots) \quad (2.15)$$

которая квазирегулярна, т. е.

$$\beta_k = (k+1)^c \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-c} |A_{km}| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (2.16)$$

Покажем это. Подставим в (2.16) значение коэффициентов A_{km} . После элементарных оценок получим

$$\begin{aligned} \beta_k \leq & 2|\gamma_1| \pi^{-2} (a S_k^{(1)} + \lambda S_k^{(2)}) + 4\gamma_2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} (k+1)^c (1+\lambda) q^{k+2} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{1-c} q^m + \\ & + \lambda (k+1)^{c-1} \sin \frac{\alpha}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-c} [q^{1+\delta} + q^{1-\delta} + q^{m+1}(1+q^2)] + \\ & + 2(2\lambda + \gamma_3) (k+1)^{c-1} q^{k+2} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-c} q^m \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$S_k^{(1)} = (k+1)^{c-1} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-c} |D_{km}|, \quad S_k^{(2)} = (k+1)^c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)^{1-c} \sin^2 1/2 \mu \pi}{|(m+1)^2 - (k+1)^2|}$$

Покажем, что $\lim S_k^{(j)} = 0$ ($j=1, 2$) при $k \rightarrow \infty$. С помощью неравенства Буняковского получим

$$(S_k^{(1)})^2 \leq (k+1)^{2(c-1)} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-2c} \sum_{m=0}^{\infty} D_{km}^2$$

Учитывая, что [4]

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_{km}^2 \leq \frac{3\pi^2}{16}$$

получим $(\zeta(x) - \text{дзета-функция Римана})$

$$S_h^{(1)} \leq \sqrt[4]{4\pi} (k+1)^{c-1} \sqrt[3]{3\zeta(2c)} \quad (2.18)$$

Переходя в (2.18) к пределу, получим $\lim S_k^{(1)} = 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Обращаясь к $S_k^{(2)}$, рассмотрим два случая: $k - \text{четное}$, $m - \text{нечетное}$; $k - \text{нечетное}$, $m - \text{четное}$.

В первом случае

$$S_{2k}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{2} \right)^c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-c}}{n+k+1/2} \frac{1}{|n-k-1/2|}$$

Применя неравенство Буйяковского, найдем

$$(S_{2k}^{(2)})^2 \leq \frac{1}{4} \left(k + \frac{1}{2} \right)^{2c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2(1-c)}}{(n+k+1/2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-k-1/2)^2}$$

Учитывая [5] ($\psi(x) - \text{пси-функция Эйлера}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-k-1/2)^2} = \psi' \left(\frac{1}{2} - k \right), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \psi' \left(\frac{1}{2} - k \right) = \pi^2$$

легко получить $\lim S_{2k}^{(2)} = 0$ при $k \rightarrow \infty$. Аналогично можно показать, что $\lim S_{2k+1}^{(2)} = 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Остальные члены в (2.17) могут быть легко просуммированы или оценены. Учитывая изложенное, получим $\lim \beta_k = 0$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, система (2.15) квази-регулярна.

3. В описанном приближенном способе решения в искомым контактных напряжениях не выделена истинная особенность на концах¹. Она должна иметь вид

$$p_*(x) = O[(1-x)^\rho (1+x)^\sigma] \quad \text{при } x \rightarrow \pm 1, \quad (p_*(x) = p[2 \operatorname{arctg}(ax)])$$

Интегро-дифференциальное уравнение для $p_*(x)$

$$\frac{1+a^2x^2}{a} \int_{-1}^1 \frac{p_*'(y)}{x-y} dy + 2\lambda \int_{-1}^1 \frac{p_*(y)}{x-y} dy + 2\lambda a^2 \int_{-1}^1 \frac{y p_*(y)}{1+a^2y^2} dy - \\ - \gamma_1 [p_*(x) - \lambda p_*'(x) (1+a^2x^2) (2a)^{-1}] = f_*(x) \quad (3.1)$$

$$(f_*(x) = f[2 \operatorname{arctg}(ax)], \quad p_*'(x) = dp_*(x)/dx, \quad |x| \leq 1)$$

получим из (1.1) заменой $\xi = 2 \operatorname{arctg}(ax)$, $\eta = 2 \operatorname{arctg}(ay)$.

Для фиксации значений ρ и σ следует подставить $p_*(x) = \varphi(x) (1-x)^\rho (1+x)^\sigma$, где $\varphi(x) - \text{регулярная функция на отрезке } [-1, 1]$, в уравнение (3.1) и воспользоваться формулой (2.8) из [8]. Полученное равенство следует умножить один раз на $(1-x)^\rho$ и второй — на $(1+x)^\sigma$. Полагая затем в первом уравнении $x=1$, а во втором $x=-1$, получим

$$\rho = 1/2 + \gamma, \quad \sigma = 1/2 - \gamma, \quad \gamma = 1/\pi \operatorname{arctg}(\lambda \gamma_1 / 2\pi)$$

¹ На этот недостаток обратил внимание В. М. Александров.

Поэтому приближенное решение уравнения (3.1) следует разыскивать в виде

$$p_*(x) = w_+(x) \sum_{m=0}^{\infty} X_m P_m^{\rho, \sigma}(x) \quad (3.2)$$

где $w_+(x) = (1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma}$, $P_m^{\rho, \sigma}(x)$ — полиномы Якоби.

Как и выше, задача сводится к бесконечной системе, причем вместо соотношений (2.1) и (2.2) необходимо использовать следующие:

$$\int_{-1}^1 \frac{P_m^{-\sigma, -\rho}(y)}{x-y} w_-(y) dy = \pi \operatorname{tg} \pi \gamma w_-(x) P_m^{-\sigma, -\rho}(x) - \frac{\pi}{2 \cos \pi \gamma} P_{m-1}^{\sigma, \rho}(x) \quad (m=1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{P_m^{\rho, \sigma}(y)}{x-y} w_+(y) dy = \pi \operatorname{tg} \pi \gamma w_+(x) P_m^{\rho, \sigma}(x) + \frac{2\pi}{\cos \pi \gamma} P_{m+1}^{-\rho, -\sigma}(x) \quad (m=0, 1, \dots) \quad (3.4)$$

$$(w_-(x) = (1-x)^{-\sigma}(1+x)^{-\rho})$$

которые следуют из результатов работ [9, 10, 11].

Связь между P_x , P_y , P_1 и неизвестными коэффициентами X_m имеет в этом случае вид

$$P_x + iP_y = 2a(1+i\lambda)R \sum_{m=0}^{\infty} X_m [C_m(\gamma) + 2iD_m(\gamma)]$$

$$P_1 = a \sum_{m=0}^{\infty} X_m E_m(\gamma), \quad C_m(\gamma) = \int_{-1}^1 \frac{1-a^2x^2}{(1+a^2x^2)^2} w_+(x) P_m^{\rho, \sigma}(x) dx$$

$$D_m(\gamma) = \int_{-1}^1 \frac{axw_+(x)}{(1+a^2x^2)^2} P_m^{\rho, \sigma}(x) dx, \quad E_m(\gamma) = \int_{-1}^1 \frac{w_+(x)}{1+a^2x^2} P_m^{\rho, \sigma}(x) dx$$

Бесконечная система, аналогичная системе (2.9), имеет вид

$$\delta_k X_k + \sum_{m=0}^{\infty} A_{km} X_m = B_k \quad (k=0, 1, \dots) \quad (3.5)$$

$$\delta_k = \frac{2\pi \operatorname{ctg}^2 \pi \gamma \Gamma(k+\gamma+3/2) \Gamma(k-\gamma+3/2)}{\cos \pi \gamma \cdot k!(k+1)!}$$

$$A_{km} = -a^{-1}(m+1) (2\pi \operatorname{tg} \pi \gamma + \lambda \gamma_1) A_{km}^{(1)} + (2\pi \lambda \operatorname{tg} \pi \gamma - \gamma_1) A_{km}^{(2)} +$$

$$+ 4\pi \lambda \sec \pi \gamma A_{km}^{(3)} - 2a \gamma_2 [C_m(\gamma) - 2\lambda D_m(\gamma)] C_k(-\gamma) -$$

$$- 4a \gamma_2 [2D_m(\gamma) + \lambda C_m(\gamma)] D_k(-\gamma) -$$

$$- [a \gamma_3 E_m(\gamma) - 2\lambda F_m(\gamma)] E_k(-\gamma) \quad (k, m=0, 1, \dots) \quad (3.6)$$

$$b_k = \varepsilon \gamma_4 R^{-1} E_k(-\gamma) \quad (k=0, 1, \dots) \quad (3.7)$$

$$A_{km}^{(1)} = \int_{-1}^1 P_{m+1}^{-\sigma, -\rho}(x) P_k^{\sigma, \rho}(x) dx \quad (k, m=0, 1, \dots)$$

$$A_{hm}^{(2)} = \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{1+a^2x^2} P_m^{\rho,\sigma}(x) P_h^{\sigma,\rho}(x) dx \quad (h, m=0, 1, \dots) \quad (3.8)$$

$$A_{hm}^{(3)} = \int_{-1}^1 \frac{P_{m+1}^{-\rho,-\sigma}(x) P_h^{\sigma,\rho}(x)}{(1+a^2x^2)w_-(x)} dx \quad (h, m=0, 1, \dots)$$

$$F_m(\gamma) = \int_{-1}^1 \frac{a^2 x w_+(x)}{1+a^2x^2} P_m^{\rho,\sigma}(x) dx \quad (m=0, 1, \dots)$$

Для вычисления коэффициентов $C_m(\pm\gamma)$, $D_m(\pm\gamma)$, $E_m(\pm\gamma)$, $F_m(\pm\gamma)$, $A_{hm}^{(j)}$ ($j=1, 2, 3$) можно привести следующие разложения:

$$C_m(\pm\gamma) = - \left(\frac{2r}{a} \right)^2 \sum_{n=m}^{\infty} d_{nm}(\pm\gamma) T_{n+2}(r), \quad D_m(\pm\gamma) = 2a^{-3} r^3 \sum_{n=m}^{\infty} d_{nm}(\pm\gamma) U_{n+1}(r) \quad (3.9)$$

$$E_m(\pm\gamma) = \left(\frac{2r}{a} \right)^2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{d_{nm}(\pm\gamma)}{n+1} U_n(r), \quad F_m(\pm\gamma) = 4r \sum_{n=m}^{\infty} \frac{d_{nm}(\pm\gamma)}{n+1} T_{n+1}(r) \quad (3.10)$$

$$A_{hm}^{(1)} = \frac{2(m+1)_\rho}{(k-\gamma+3/2)_\rho} \sum_{\nu=0}^{m+1} \sum_{j=0}^h \frac{(-1)^{\nu+j} (\nu+\rho)_{m+\sigma} (j+\sigma+1)_{k+\rho}}{\nu! j! (m-\nu+1)! (k-j)! (\nu+j+1)}$$

$$A_{hm}^{(2)} = \sum_{\nu=0}^m \sum_{j=0}^h \frac{(-1)^{j+\nu} (m+2)_\nu (k+2)_j (\nu+\gamma+3/2)_{m-\nu} G(j+\nu+1, 1)}{\nu! j! (m-\nu)! (k-j)! (k-\gamma+3/2)_{j-h} 2^{j+\nu}}$$

$$A_{hm}^{(3)} = \sum_{\nu=0}^{m+1} \sum_{j=0}^h \frac{(-1)^{j+\nu} (m+1)_\nu (k+2)_j (\nu-\gamma+1/2)_{m-\nu+1} G(\nu+j+\sigma, \rho)}{2^{\nu+j} \nu! j! (k-j)! (m+1-\nu)! (k-\gamma+3/2)_{j-h}}$$

$$d_{nm}(\pm\gamma) = \frac{(-1)^m (2r)^n (m+1)_{\frac{1}{2}n \mp \gamma} (n-m+1)_m}{(n+2)_{m+1} (n \pm \gamma + 3/2)_{\mp \nu - 1/2}} \quad (3.11)$$

$$G(z, t) = \int_{-1}^1 \frac{(1-x)^z (1+x)^t}{1+a^2x^2} dx = \frac{\Gamma(t+1)}{r^{-1}a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2r)^{n+1} U_n(r)}{2^{-z-t} (z+n+1)_{t+1}}$$

$$r = \sin^2 \alpha \quad (h, m=0, 1, \dots)$$

Разложения (3.9) и (3.11) справедливы при $\alpha < \pi/3$. Для проверки следует вместо функций $(1-a^2x^2)/(1+a^2x^2)^2$, $ax/(1+a^2x^2)^2$, $(1+a^2x^2)^{-1}$ и $a^2x/(1+a^2x^2)$ подставить их разложения

$$\frac{1-a^2x^2}{(1+a^2x^2)^2} = r^{-2} a^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (1-x)^n r^n T_{n+2}(r) \quad (3.12)$$

$$\frac{ax}{(1+a^2x^2)^2} = \frac{r^3}{2a^3} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (1-x)^n r^n U_{n+1}(r)$$

$$\frac{1}{1+a^2x^2} = \frac{r^2}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n r^n U_n(r), \quad \frac{a^2x}{1+a^2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n r^{n+1} T_{n+1}(r)$$

и воспользоваться формулой 7.391 (4) работы [5].

Для получения формул (3.10) следует в (3.8) разложить полиномы Якоби по степеням $(1-x)$ и интегрировать почленно. При выводе разложений (3.12) для вычисления производных соответствующих функций удобно воспользоваться их интегральными представлениями 3.944 (5, 6) из [5].

Вычисления по предлагаемому здесь уточненному способу показали, что сходимость метода редукции лучше, чем по первому способу. Однако

Таблица 1

2α	$\lambda=0$	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.4$	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.4$
30	0.0511	0.0511	0.0511	11.3	21.7
60	0.119	0.119	0.119	11.1	21.3
90	0.234	0.234	0.233	10.8	20.8
120	0.491	0.489	0.484	10.5	20.3
150	1.45	1.44	1.42	10.4	19.9
30	0.0753	0.0753	0.0752	11.2	21.6
60	0.174	0.174	0.173	11.0	21.1
90	0.343	0.342	0.339	10.7	20.5
120	0.733	0.729	0.718	10.4	19.9
150	2.40	2.38	2.31	10.2	19.6
30	0.0987	0.0986	0.0983	11.2	21.5
60	0.227	0.226	0.224	10.9	20.9
90	0.447	0.445	0.441	10.5	20.2
120	0.974	0.967	0.949	10.2	19.6
150	3.59	3.53	3.39	10.0	19.2
30	0.143	0.143	0.142	11.0	21.3
60	0.324	0.322	0.320	10.7	20.5
90	0.642	0.636	0.627	10.2	19.7
120	1.45	1.43	1.40	9.92	19.0
150	7.09	6.87	6.30	9.72	18.7

Таблица 2

2α	$\lambda=0$	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.4$	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.4$
30	0.0208	0.0212	0.0223	0.0042	0.0084
60	0.0944	0.0962	0.101	0.0195	0.0390
90	0.265	0.270	0.284	0.0572	0.114
120	0.687	0.699	0.732	0.157	0.312
150	2.30	2.34	2.43	0.566	1.11
30	0.0307	0.0313	0.0330	0.0062	0.0124
60	0.138	0.141	0.148	0.0286	0.0570
90	0.389	0.396	0.415	0.0839	0.167
120	1.03	1.05	1.09	0.235	0.465
150	3.83	3.87	3.98	0.938	1.83
30	0.0403	0.0411	0.0433	0.0081	0.0162
60	0.181	0.184	0.193	0.0373	0.0740
90	0.509	0.517	0.540	0.110	0.217
120	1.37	1.39	1.44	0.318	0.615
150	5.72	5.76	5.85	1.40	2.69
30	0.0586	0.0596	0.0625	0.0118	0.0234
60	0.259	0.263	0.274	0.0534	0.105
90	0.734	0.743	0.769	0.158	0.309
120	2.06	2.08	2.13	0.468	0.908
150	11.4	11.3	10.9	2.74	5.04

некоторый выигрыш в сходимости существенно обесценивается из-за громоздкости формул для коэффициентов матрицы. Приводимые ниже числовые результаты получены на основе п. 2.

4. Расчеты проводились для случая $\nu_j = 3 - 4\nu_j$, $\nu_j = 0.3$ ($j=1, 2$) и для следующих значений отношения модулей упругости: $E_2/E_1 = 0.5; 1.0; 2.0$ и $E_2/E_1 = \infty$ (жесткий цилиндр). В табл. 1 приведены в долях $\varepsilon E_1/R$ значения максимальных напряжений, которые, как правило, находятся в середине площадки контакта в зависимости от α и λ (во всех таблицах значения углов даны в градусах).

Кроме того, на фигуре приведена эпюра $p(\xi)$ при $\lambda=0$ (сплошная линия) и $\lambda=0.5$ (пунктирная линия) для угла обхвата $2\alpha=120^\circ$ и $E_2/E_1=\infty$.

Следует отметить значительное отклонение центра площадки контакта от линии действия прижимающей силы P_0 . Значения углов β в зависимости от α и λ приведены в табл. 1 (последние два столбца). В табл. 2 приведены значения $P_0/\varepsilon E_1$ (слева) и $M_0/\varepsilon E_1 R$.

Как уже отмечалось, бесконечная система решалась методом редукции, причем сходимость практически не зависит от λ и несколько ухудшается с увеличением α . Например, для $\alpha \leq 30^\circ$, чтобы получить максимальные контактные напряжения с тремя верными знаками, достаточно взять два, а для $\alpha=75^\circ$ — четыре приближения при $0.5 \leq E_2/E_1 < \infty$.

При больших значениях угла обхвата обнаружено резкое возрастание контактных напряжений. Это связано с наличием критического угла обхвата (для каждого приближения N), когда определители урезанных систем обращаются в нуль. Критические значения угла обхвата с ростом числа приближений быстро стабилизируются вокруг определенного значения, связанного с первым собственным значением бесконечной матрицы системы (2.9). Указанные значения углов названы критическими углами обхвата и приведены в табл. 3. Очевидно, что реальный угол контакта,

Таблица 3

E_2/E_1	$\lambda=0$	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.3$
0.5	173.8	174.2	175.0
1.0	169.6	170.0	171.2
2.0	166.2	166.6	168.0
∞	160.6	161.2	163.0

соответствующий заданным параметрам $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, должен быть меньше критического значения при любой прижимающей силе. Иными словами, не существует в рамках линейной теории упругости такой прижимающей силы, которой соответствовал бы угол обхвата, равный или больший его критического значения.

Из приведенного числового материала видно, что при малых λ силами трения можно пренебречь и принять $\lambda=0$. При $\lambda=0$ ряд (2.5) очень быстро сходится, поэтому для практических расчетов можно ограничиться нулевым приближением. Тогда $X_0 = =B_0(1+A_{00})^{-1}$ и

$$D_{00} = \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{1+a^2x^2} dx = 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1 \right)$$

Следовательно

$$p(\xi) = X_0 \sec^{1/2} \xi \sqrt{2 \cos \xi - 2 \cos \alpha}, \quad P_0 = 2\pi R X_0 \sin \alpha \operatorname{tg}^{1/4} \alpha \quad (4.1)$$

$$X_0 = \frac{\gamma_4 \varepsilon \operatorname{tg}^{1/4} \alpha}{\pi R \sin^{1/2} \alpha} \left[1 - \frac{2\gamma_1 (\alpha - \sin \alpha)}{\pi^2 \sin^2 1/2 \alpha} - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4} \left(2\gamma_2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \gamma_3 \right) \right]^{-1}$$

Приближенные формулы (4.1) дают хорошие результаты при углах обхвата $2\alpha \leq 120^\circ$ и лишь при $2\alpha=150^\circ$ результаты, полученные по (4.1), ниже действительных примерно на 10%.

Первая формула (4.1) дает приближенное аналитическое выражение для контактных напряжений при любых упругих характеристиках материалов диска и пластины и удобна для практических расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1968.
2. *Панасюк В. В., Теплый М. И.* Об одной контактной задаче с учетом сил трения. Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 7.
3. *Попов Г. Я.* О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
4. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1974, т. 35, вып. 1.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., «Наука», 1966.
7. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
9. *Tricomi F. G.* On the finite Hilbert transformation. Quart. J. Math., 1951, vol. 2, p. 199—211.
10. *Попов Г. Я.* Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби. Укр. матем. ж., 1968, т. 20, вып. 4.
11. *Карпенко Л. Н.* Приближенное решение одного сингулярного уравнения при помощи многочленов Якоби. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.