МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1976

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ УПРУГОГО ТЕЛА

Э. И. ГРИГОЛЮК, В. Е. ПОПОВИЧ

(Москва)

Взаимодействие тел с различными физическими полями может сопровождаться изменением объема материала. Это происходит, например, при нагреве, при намагничивании некоторых материалов в области насыщения (в области парапроцесса [1]), в случае облучения материалов потоками элементарных частиц [2]. Иногда изменение объема сопровождается изменением физико-механических характеристик [3], которое сказывается на параметрах деформирования. Если деформации и смещения стеснены, то в упругом теле возникают внутренние усилия и напряжения.

В этой работе на основании энергетических соотношений формулируется теорема, определяющая перемещение точек в упругом теле при наличии объемной деформации, закон изменения которой по координатам точек считается известным из анализа взаимодействия тела с различными физическими полями. Тело предполагается изотропным, но в общем случае не однородным, с неодинаковыми физико-механическими характеристиками материала в различных точках.

1. Рассмотрим два состояния упругого тела. В первом состоянии на тело действует система поверхностных $X_{1\nu}$, $X_{2\nu}$, $X_{3\nu}$ и объемных сил X_1, X_2, X_3. Усилия второго состояния обозначим соответственно $X_{1\nu}'$, $X_{2\nu}'$, $X_{3\nu}'$, X_1', X_2', X_3'. Таким образом, параметры второго состояния будем обозначать теми же буквами, но со штрихами.

В каждой точке тела имеют место объемные деформации

$$\theta=\theta_0+\theta_n,\quad \theta'=\theta_0'+\theta_n' \tag{1.1}$$

Здесь θ_n и θ_n' — объемные деформации, обусловленные воздействием на тело физических полей при условии свободного изменения объема; θ_0, θ_0' — упругие объемные деформации, соответствующие компонентам напряжения в точке.

Введем следующие обозначения: U_i, U_i' $(i=1, 2, 3)$ — компоненты вектора перемещения точек первого и второго состояний, ε_1, ε_2, ε_3, ε_{12}, ε_{13}, ε_{23}, ε_1', ε_2', ε_3', ε_{12}', ε_{13}', ε_{23}' — компоненты тензоров деформаций, σ_1, σ_2, σ_3, $\sigma_{12}=\sigma_{21}$, $\sigma_{13}=\sigma_{31}$, $\sigma_{23}=\sigma_{32}$, σ_1', σ_2', σ_3', $\sigma_{12}'=\sigma_{21}'$, $\sigma_{13}'=\sigma_{31}'$, $\sigma_{23}'=\sigma_{32}'$ — компоненты тензоров напряжений. Модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν могут быть функциями от координат, но имеют одинаковые значения в идентичных точках обоих состояний.

Представим тензоры напряжений в точках каждого состояния в виде суммы двух составляющих

$$T_H=T_H^0+D_H,\quad T_H'=T_H^{0\prime}+D_H' \tag{1.2}$$

где T_H^0, $T_H^{0\prime}$ — шаровые тензоры напряжений, характеризующие напряженное состояние элементарного кубика, по граням которого действуют только нормальные напряжения $\sigma_0={}^1/_3\Sigma\sigma_i$ и $\sigma_0'={}^1/_3\Sigma\sigma_i'$; D_H, D_H' — девиаторы напряжений с компонентами $\sigma_i-\sigma_0$, $\sigma_{12}=\sigma_{21}$, $\sigma_{13}=\sigma_{31}$, $\sigma_{23}=\sigma_{32}$ $(i=1, 2, 3)$ для первого состояния; $\sigma_i'-\sigma_0'$, $\sigma_{12}'=\sigma_{21}'$, $\sigma_{13}'=\sigma_{31}'$, $\sigma_{23}'=\sigma_{32}'$ $(i=1, 2, 3)$ для второго состояния тела.

Аналогично разложим тензоры деформаций на шаровые тензоры с компонентами $\varepsilon_0={}^1/_3\Sigma\varepsilon_i$, $\varepsilon_0'={}^1/_3\Sigma\varepsilon_i'$ и тензоры-девиаторы деформаций с компонентами $\varepsilon_i-\varepsilon_0$, ε_{12}, ε_{13}, ε_{23}, $\varepsilon_i'-\varepsilon_0'$, ε_{12}', ε_{23}', ε_{13}' $(i=1, 2, 3)$.

Шаровые тензоры напряжений и деформаций соответствуют объемному деформированию элементарного кубика, в то время как тензоры-девиаторы напряжений и деформаций определяют изменение его формы.

Запишем уравнения равновесия в виде равенства нулю работы всех сил каждого состояния на возможных перемещениях. Для сил одного состояния за возможные перемещения будем принимать смещения точек другого состояния

$$\iiint\limits_V \sum_{i=1}^{3} X_i u_i' \rho\, dV + \iint\limits_S \sum_{i=1}^{3} X_{i\nu} u_i'\, dS - \iiint\limits_V 2W\, dV = 0$$

$$\iiint\limits_V \sum_{i=1}^{3} X_i' u_i \rho\, dV + \iint\limits_S \sum_{i=1}^{3} X_{i\nu}' u_i\, dS - \iiint\limits_V 2W'\, dV = 0 \tag{1.3}$$

Подынтегральные функции в выражениях работ внутренних усилий равны

$$2W=\sigma_0\theta'+\sum_{i=1}^{3}(\sigma_i-\sigma_0)(\varepsilon_i'-\varepsilon_0')+\sigma_{12}\varepsilon_{12}'+\sigma_{13}\varepsilon_{13}'+\sigma_{23}\varepsilon_{23}'$$

$$2W'=\sigma_0'\theta+\sum_{i=1}^{3}(\sigma_i'-\sigma_0')(\varepsilon_i-\varepsilon_0)+\sigma_{12}'\varepsilon_{12}+\sigma_{13}'\varepsilon_{13}+\sigma_{23}'\varepsilon_{23} \tag{1.4}$$

Для вывода уравнения взаимности работ, кроме соотношений (1.3) и (1.4), необходимо учесть связь между напряжениями и деформациями. Примем ее в следующей форме уравнений закона Гука [4]: для первого состояния тела

$$\theta=\frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_0+\theta_n, \qquad \sigma_i-\sigma_0=2G(\varepsilon_i-\varepsilon_0) \qquad (i=1,2,3)$$

$$\sigma_{12}=G\varepsilon_{12},\ \sigma_{13}=G\varepsilon_{13},\ \sigma_{23}=G\varepsilon_{23} \tag{1.5}$$

и аналогичные соотношения для второго состояния

$$\theta'=\frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_0'+\theta_n', \qquad \sigma_i'-\sigma_0'=2G(\varepsilon_i'-\varepsilon_0') \qquad (i=1,2,3)$$

$$\sigma_{12}'=G\varepsilon_{12}',\ \sigma_{13}'=G\varepsilon_{13}',\ \sigma_{23}'=G\varepsilon_{23}' \tag{1.6}$$

В правых частях равенств (1.5), (1.6) должны быть компоненты линейных упругих деформаций, соответствующих компонентам напряжений. Здесь в эти соотношения введены полные линейные деформации ε_i, ε_0, ε_i' и ε_0', которые зависят не только от напряжений, но и от компонентов объемной деформации θ_n, θ_n'. Такой подход не нарушает равенств (1.5) и (1.6), так как составляющие объемной деформации в выражениях $(\varepsilon_i-\varepsilon_0)$ и $(\varepsilon_i'-\varepsilon_0')$ взаимно уничтожаются.

Подставим деформации из соотношений (1.5), (1,6) в формулы (1.4), затем выражения $2W$ и $2W'$ — в уравнения равновесия (1.3). В результате получим уравнение взаимности работ с учетом объемных деформаций θ_n, θ_n', вызванных воздействием на тело различных физических полей

$$\iiint\limits_V \sum_{i=1}^{3} X_i u_i' \rho dV + \iint\limits_S \sum_{i=1}^{3} X_{i\nu} u_i' dS + \iiint\limits_V \sigma_0' \theta_n dV =$$

$$= \iiint\limits_V \sum_{i=1}^{3} X_i' u_i \rho dV + \iint\limits_S \sum_{i=1}^{3} X_{i\nu}' u_i dS + \iiint\limits_V \sigma_0 \theta_n' dV \qquad (1.7)$$

Если объемная деформация возникает от нагрева тела, то уравнение (1.7) переходит в уравнение взаимности работ, обобщенное В. М. Майзелем [5] на случай температурных деформаций.

2. Пусть на тело в первом состоянии действуют внешние силы и нагрузка P_k, которую будем понимать в обобщенном смысле. Это могут быть сосредоточенные усилия или моменты, интенсивность распределенных усилий или моментов. Кроме того, в каждой точке тела первого состояния имеет место объемная деформация θ_n.

Требуется определить обобщенное перемещение δ_k от заданной нагрузки и поля объемных деформаций θ_n. Для решения задачи приложим во втором состоянии нагрузку dP_k. Будем считать объемную деформацию $\theta_n'=0$. Тогда уравнение совместности работ (1.7) запишется в виде

$$\delta_k\, dP_k = \iiint\limits_V \sum_{i=1}^{3} X_i u_i' \rho\, dV + \iint\limits_S \sum_{i=1}^{3} X_{i\nu} u_i'\, dS + \iiint\limits_V \sigma_0' \theta_n\, dV \qquad (2.1)$$

Здесь u_i' ($i=1, 2, 3$), σ_0' — компоненты вектора перемещения и среднее напряжение в точках тела от действия только нагрузки dP_k.

Поэтому для уравнения (2.1) будут справедливы соотношения

$$\iiint\limits_V \sum_{i=1}^{3} X_i u_i' \rho\, dV + \iint\limits_S \sum_{i=1}^{3} X_{i\nu} u_i'\, dS = \frac{\partial U}{\partial P_k} dP_k, \quad \sigma_0' = \frac{\partial \sigma_0}{dP_k} dP_k \qquad (2.2)$$

В этих соотношениях U, σ_0 равны соответственно потенциальной энергии деформации и среднему напряжению в точках тела, свободного от воздействия поля, при действии заданной системы внешних сил.

Подставляя (2.2) в уравнение (2.1) и разрешая его относительно δ_k, получим окончательную формулу, определяющую перемещения в упругом теле при действии на него внешних сил и физического поля, вызывающего объемные деформации

$$\delta_k = \frac{\partial}{\partial P_k}\left[U + \iiint\limits_V \sigma_0 \theta_n\, dV\right] \qquad (2.3)$$

Для случая температурного поля, когда $\theta_n = 3\alpha t$, получим формулу [6]:

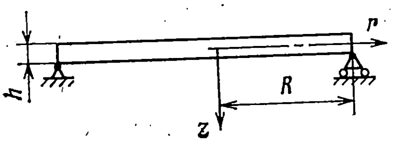
$$\delta_k = \frac{\partial}{\partial P_k}\left[U + \iiint\limits_V \Theta \alpha t\, dV\right], \quad \Theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \qquad (2.4)$$

Θ определена для ненагретого тела от действия заданной системы сил. Формулы (2.3) и (2.4) представляют собой обобщение теоремы Кастилиано [7] на случай температурных и других объемных деформаций, имеющих различную природу своего возникновения.

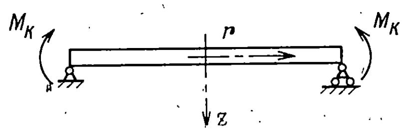
3. Рассмотрим круглую пластину (см. фиг. 1) свободно опертую по контуру. Поверхность $z={}^1/_2 h$ облучается потоком нейтронов интенсивности nv *нейтрон/см*^{2} *сек.* Облучение пластины нейтронами сопровождается многочисленными эффектами, в ре-

зультате которых возникает объемное расширение (пластина деформируется в целом).

Определим углы поворота нормального элемента к срединной плоскости в точках контура. По мере прохождения потока нейтронов в глубь материала интенсивность его уменьшается. В точках с координатами z интенсивность потока будет равна [8]: $nv \exp[\mu(z-{}^1/_2h)]$ *нейтрон/см² сек*, где μ – макроскопическое эффективное сечение.



Фиг. 1



Фиг. 2

Если интенсивность потока nv не зависит от времени, то через единичную площадку по прошествии времени t пройдет суммарный нейтронный поток

$$N=nvt \exp[\mu(z-{}^1/_2h)] \text{ нейтрон/см}^2 \tag{3.1}$$

Объемное расширение материала прямо пропорционально суммарному потоку [2]: $\theta_n=AN$, где A – постоянная, определяемая из опыта.

Если главной причиной расширения является накопление в кристаллической решетке парных дефектов «атом внедрения — вакансия», то согласно [9], $A=\mu\beta B$ *см²/ /нейтрон*, где B – число смещений, производимых одним нейтроном; β – объемное расширение, отнесенное к одному смещению.

Для решения поставленной задачи приложим по контуру пластины равномерно распределенные моменты интенсивности M_h (фиг. 2).

В этом случае функция прогиба будет иметь вид [10]

$$w=\frac{M_h}{2(1+\nu)D}(R^2-r^2), \qquad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3.2}$$

Компоненты напряжения и деформации в точках пластины будут определяться формулами

$$\sigma_z=0, \qquad \sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_t), \qquad \sigma_t=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t+\nu\varepsilon_r) \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_r=-z\frac{d^2w}{dr^2}, \qquad \varepsilon_t=-\frac{z}{r}\frac{dw}{dr} \tag{3.4}$$

Подставляя соотношения (3.4) в (3.3) и принимая во внимание (3.2), получим $\sigma_0=8M_hz/h^3$.

Объемная деформация с учетом формулы (3.1) будет равна

$$\theta_n=Anvt \exp[\mu(z-{}^1/_2h)] \tag{3.5}$$

Нарастание объемной деформации по времени происходит медленно. Поэтому динамическими эффектами при деформировании пластины можно пренебречь и время t в формуле (3.5) рассматривать как параметр.

Искомый угол поворота, который будет иметь место по прошествии времени t облучения, найдем по формуле (2.3), подставляя выражения для σ_0, θ_n и обобщенное значение $P_h=2\pi RM_h$

$$\varphi=\frac{\partial}{2\pi R\partial M_h}\iiint\limits_V \frac{8M_hz}{h^3}Anvt \exp\left[\mu\left(z-\frac{1}{2}h\right)\right]dV=$$

$$=4\frac{AnvtR}{\mu^2h^2}\left[\frac{\mu h}{2}-1+\left(\frac{\mu h}{2}+1\right)e^{-\mu h}\right]$$

Поступила 7 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белов К. П.* Упругие, тепловые и электрические явления в ферромагнитных металлах. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
2. *Ремнев Ю. И.* Объемные изменения в металлах при облучении за счет ядерных превращений и тепловых эффектов облучения металла. Изв. вузов, Физика, 1959, № 3.
3. *Dienes G. J.* Effects of nuclear radiation on the mechanical properties of solids. J. Appl. Phys., 1953, vol. 24, No. 6.
4. *Безухов Н. И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., «Высшая школа», 1968.
5. *Майзель В. М.* Температурная задача теории упругости. Киев, Изд-во АН УССР, 1951.
6. *Григолюк Э. И., Попович В. Е.* Теорема Кастилиано и метод единичной нагрузки для задачи термоупругости сплошных сред. Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 2.
7. *Castigliano A.* Théorie de l'equilibre des systemes elastiques et ses applications. Turin, A. F. Negro, 1879—1880, vol. 1, 2.
8. *Ремнев Ю. И.* Устойчивость круглой пластины при объемном расширении. Прикл. механ. 1974, т. 10, вып. 11.
9. *Kierstied H. A.* Expansion of copper bombardment by 19-Mev deuterons. Phys. Rev., 1955, vol. 98, No. 1.
10. *Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К.* и др. Расчеты на прочность в машиностроении, т. 2. М., Машгиз, 1958.