МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1976

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ С УПРУГИМИ ЯДРАМИ

Л. В. АНДРИЕВСКАЯ, А. Г. МАРКУШИН, В. В. МЕГЛИНСКИЙ

(Саратов)

В работе [1] предложен метод решения задачи об изгибе анизотропной эллиптической плиты с конечным числом эллиптических анизотропных ядер усилиями, распределенными по внешнему краю плиты.

В данной работе этот метод обобщается на случай изгиба плиты нагрузкой, распределенной по верхнему основанию. Такое загружение представляет наибольший практический интерес.

Численные расчеты проведены для плиты с одним ядром.

1. Рассмотрим упругое равновесие эллиптической анизотропной плиты с конечным числом эллиптических отверстий. В отверстия без натяга впаяны упругие ядра, изготовленные из других анизотропных материалов. Внешний край плиты жестко защемлен. По верхнему основанию плиты распределена нормальная нагрузка $q^{(0)}(x, y)$, n-го ядра $-$ $q^{(n)}(x, y)$ $(n=\overline{1, N})$.

Обозначим внешний контур плиты через L_0, контуры спаев $-$ L_n, полуоси контурных эллипсов $-$ a_n, $b_n=a_nc_n$.

Решение поставленной задачи приводится к интегрированию уравнения

$$D_{11}^{(n)}\frac{\partial^4 W^{(n)}}{\partial x^4}+4D_{16}^{(n)}\frac{\partial^4 W^{(n)}}{\partial x^3\,\partial y}+2\left(D_{12}^{(n)}+2D_{66}^{(n)}\right)\frac{\partial^4 W^{(n)}}{\partial x^2\,\partial y^2}+4D_{26}^{(n)}\frac{\partial^4 W^{(n)}}{\partial x\,\partial y^3}+$$
$$+D_{22}^{(n)}\frac{\partial^4 W^{(n)}}{\partial y^4}=q^{(n)}\qquad (n=\overline{0, N})\tag{1.1}$$

при определенных граничных условиях на L_0 и условиях контакта на L_n $(n=\overline{1, N})$. Здесь $D_{rk}^{(n)}$ $-$ жесткости плиты (при $n=0$) и соответствующего ядра.

Общее решение уравнения (1.1) представляется в виде [2]

$$W^{(n)}=W_0^{(n)}+2\,\mathrm{Re}\left[W_{1n}(z_1^{(n)})+W_{2n}(z_2^{(n)})\right]\tag{1.2}$$

Здесь $W_0^{(n)}$ $-$ какое-либо частное решение уравнения (1.1), $W_{jn}(z_j^{(n)})$ $(j=1, 2)$ $-$ произвольные аналитические функции, которые должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1,2}a_{jm0}W_{j0}{}'(t_j^{(0)})=f_{m0}(s)\qquad (m=1,2)\quad \text{на } L_0\tag{1.3}$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1,2}\left[a_{jm0}W_{j0}{}'(t_j^{(0)})-a_{jmn}W_{jn}'(t_j^{(n)})\right]=f_{mn}(s)\quad (m=\overline{1,4})\quad \text{на } L_n\quad (n=\overline{1, N})\tag{1.4}$$

$$a_{j1n}=1,\quad a_{j2n}=\mu_{jn},\quad a_{j3n}=q_{jn},\quad a_{j4n}=\frac{p_{jn}}{\mu_{jn}},\quad f_{10}=-\frac{\partial W_0^{(0)}}{\partial x},\quad f_{20}=-\frac{\partial W_0^{(0)}}{\partial y}$$

$$f_{1n}=\frac{\partial}{\partial x}(W_0^{(n)}-W_0^{(0)}),\qquad f_{2n}=\frac{\partial}{\partial y}(W_0^{(n)}-W_0^{(0)})$$

$$f_{3n}=\int\limits_0^{s'}[(M_{0y}^{(0)}-M_{0y}^{(n)})dx-(H_{0xy}^{(0)}-H_{0xy}^{(n)}+J_0^{(0)}-J_0^{(n)})dy]+C_ny+C_{1n}$$

$$f_{4n}=\int\limits_0^{s}[(M_{0x}^{(0)}-M_{0x}^{(n)})dy-(H_{0xy}^{(0)}-H_{0xy}^{(n)}-J_0^{(0)}+J_0^{(n)})dx]-C_nx+C_{2n}\quad (n=\overline{1,N})$$

$$J_0^{(n)}=\int\limits_0^{s}(N_{0x}^{(n)}dy-N_{0y}^{(n)}dx)\qquad (n=\overline{0,N})$$

где $M_{0x}^{(n)}$, $M_{0y}^{(n)}$ — изгибающие моменты, $H_{0xy}^{(n)}$ — скручивающий момент, $N_{0x}^{(n)}$, $N_{0y}^{(n)}$ — перерезывающие силы, соответствующие функциям $W_0^{(n)}$ ($n=\overline{0,N}$); C_n, C_{1n}, C_{2n} — неопределенные постоянные; $\mu_{jn}=\alpha_{jn}+i\beta_{jn}$ — комплексные параметры изгиба для плиты (при $n=0$) и ядер ($n=\overline{1,N}$); постоянные p_{jn} и q_{jn} определяются по формулам [2]:

$$p_{jn}=D_{11}^{(n)}+D_{12}^{(n)}\mu_{jn}^2+2D_{16}^{(n)}\mu_{jn},\qquad q_{jn}=D_{12}^{(n)}+D_{22}^{(n)}\mu_{jn}^2+2D_{26}^{(n)}\mu_{jn}$$

Учитывая результаты работ [1, 3], искомые функции $W_{j0}'(z_j^{(0)})$ и $W_{jn}'(z_j^{(n)})$ представим соответственно в виде

$$W_{j0}'(z_j^{(0)})=\sum_{n=1}^{N}\Big\{[M_{jn}(z_j^{(0)}-z_{jn}^{(0)})+N_{jn}]\ln(z_j^{(0)}-z_{jn}^{(0)})+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}A_{jnk}[\zeta_{jn}(z_j^{(0)}-z_{jn}^{(0)})]^{-k}\Big\}+\sum_{k=1}^{\infty}C_{jk}P_k^{(0)}(z_j^{(0)})\tag{1.5}$$

$$W_{jn}'(z_j^{(n)})=\sum_{k=0}^{\infty}a_{jk}^{(n)}P_k^{(n)}(z_j^{(n)})\tag{1.6}$$

Здесь $z_{jn}^{(0)}$ — произвольные фиксированные точки внутри контуров L_{jn}, полученных из L_n ($n=\overline{1,N}$) известным аффинным преобразованием [2]. Постоянные M_{jn}, N_{jn} находятся из условий статического равновесия плиты и однозначности ее прогиба [3]. Коэффициенты A_{jnk}, C_{jk}, $a_{jk}^{(n)}$ подлежат определению из граничных условий (1.3), (1.4).

Разлагая функции, голоморфные в круге, в ряды Тейлора, а функции, голоморфные в эллипсе, в ряды по полиномам Фабера, получим аналогично тому, как это сделано в работе [1], следующие граничные значения искомых функций:

$$W_{j0}'(\sigma)=\sum_{n=1}^{N}\{M_{jn}[z_{jn}^{(0)}-R_{j0}(\sigma^{-1}+m_{j0}\sigma)]-N_{jn}\}\ln\sigma+$$

$$+\sum_{k=-1,0,1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}A^{*}_{jnk}\sigma^{k}+\sum_{k=1}^{\infty}C_{jk}(\sigma^{-k}+m_{j0}{}^{k}\sigma^{k}) \quad \text{на } L_0 \tag{1.7}$$

$$W_{j0}'(\sigma)=[M_{j\nu}R_{j\nu}(\sigma+m_{j\nu}\sigma^{-1})+N_{j\nu}]\ln\sigma+$$

$$+\sum_{k=-1,0,1}^{\infty}A^{**}_{j\nu k}\sigma^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k C^{*(\nu)}_{jk}(\sigma^{k}+m_{j\nu}{}^{k}\sigma^{-k}) \tag{1.8}$$

$$W_{j\nu}'(\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k a^{(\nu)}_{jk}(\sigma^{k}+m^{(\nu)}_{j\nu}\sigma^{-k}) \quad \text{на } L_\nu \quad (\nu=\overline{1,N}) \tag{1.9}$$

$$\overset{*}{A}_{jn,-1}=c_{j0n,-1}M_{jn}, \qquad \overset{*}{A}_{jnk}=c_{j0nk}M_{jn}+b_{j0nk}N_{jn}+\sum_{s=1}^{\infty}\alpha_{jsnk}A_{jns} \quad (k\geqslant 0)$$

$$\overset{**}{A}_{j\nu,-1}=c_{j\nu,-1}M_{j\nu}, \qquad \overset{**}{A}_{j\nu k}=c_{j\nu k}M_{j\nu}+b_{j\nu k}N_{j\nu}+A_{j\nu k} \quad (k\geqslant 0)$$

$$C^{*(\nu)}_{jk}=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\beta^{(\nu)}_{jsk}C_{js}+\sum_{n=1}^{N}{}'\left[d^{(\nu)}_{j2nk}M_{jn}+d^{(\nu)}_{j1nk}N_{jn}+\gamma^{(\nu)}_{jnsk}A_{jns}\right]\right\}$$

$$c_{j0nk}=R_{j0}b_{j0n,k+1}-z^{(0)}_{jn}b_{j0nk}+R_{j0}m_{j0}b_{j0n,k-1}$$

$$b_{j0nk}=\frac{1}{k!}\lim_{\zeta_0\to 0}\frac{d^{k}}{\partial\zeta_0{}^{k}}[\ln R_{j0}(1+m_{j0}\zeta_0{}^{2})-z^{(0)}_{jn}\zeta_0]$$

$$\alpha_{jsnk}=\frac{1}{k!}\lim_{\zeta_0\to 0}\frac{d^{k}}{d\zeta_0{}^{k}}[\zeta_{jn}(z^{(0)}_{j}-z^{(0)}_{jn})]^{-s}, \qquad \delta_0=\frac{1}{2}, \qquad \delta_k=1 \quad (k\geqslant 1)$$

$$b_{j\nu 0}=\ln R_{j\nu}, \qquad b_{j\nu k}=\frac{2(-1)^{(k+1)/2}}{k}m_{j\nu}^{k/2} \quad (k=2,4,\ldots), \qquad b_{j\nu k}=0 \quad (k=1,3,\ldots)$$

$$c_{j\nu,-1}=R_{j\nu}\ln R_{j\nu}, \qquad c_{j\nu 1}=R_{j\nu}m_{j\nu}(1+\ln R_{j\nu}), \qquad c_{j\nu k}=\frac{4(-m_{j\nu})^{(k+1)/2}}{k^{2}-1}R_{j\nu} \quad (k=3,5,\ldots)$$

$$c_{j\nu k}=0 \quad (k=0,2,\ldots)$$

$$\beta^{(\nu)}_{jsk}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}P^{(0)}_{s}(z^{(0)}_{j})\frac{d\sigma}{\sigma^{k+1}}, \qquad \gamma^{(\nu)}_{jnsk}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}[\zeta_{jn}(z^{(0)}_{j}-z^{(0)}_{jn})]^{-s}\frac{d\sigma}{\sigma^{k+1}}$$

$$d^{(\nu)}_{j1nk}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\ln(z^{(0)}_{j}-z^{(0)}_{jn})\frac{d\sigma}{\sigma^{k+1}}, \qquad d^{(\nu)}_{j2nk}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(z^{(0)}_{j}-z^{(0)}_{jn})\ln(z^{(0)}_{j}-z^{(0)}_{jn})\frac{d\sigma}{\sigma^{k+1}}$$

$$R_{jn}=\frac{a_n-i\mu_{j0}b_n}{2}, \qquad m_{jn}=\frac{1+i\mu_{j0}c_n}{1-i\mu_{j0}c_n}, \qquad m^{(n)}_{jn}=\frac{1+i\mu_{jn}c_n}{1-i\mu_{jn}c_n}$$

Здесь и далее штрих около суммы означает отсутствие в сумме члена с номером $n=\nu$.

Разложим функции $f_{mn}(s)$ $(m=1, 2;\ n=\overline{0, N})$ в ряды Фурье

$$f_{mn}(s)=\delta_{mn0}+\sum_{k=1}^{\infty}(\delta_{mnk}\sigma^{k}+\overline{\delta}_{mnk}\sigma^{-k}) \tag{1.10}$$

Таблица 1

λ	0.5			1			2			∞		
z/a_1	D_1W	M_x	M_y	D_1W	M_x	M_y	D_1W	M_x	M_y	D_1W	M_x	M_y
5	0	−0.914	−0.024	0	−0.869	−0.023	0	−0.830	−0.022	0	−0.694	−0.019
1	4.161 4.161	0.446 0.445	0.223 0.118	3.531 3.531	0.665 0.665	0.165 0.166	3.019 3.019	0.822 0.821	0.118 0.216	2.142	0.906	0.022
0	4.857	0.793	0.145	3.974	0.993	0.195	3.273	1.137	0.246	—	—	—
i	3.547 3.547	1.051 0.529	0.031 0.031	3.061 3.061	0.705 0.703	0.065 0.065	2.677 2.677	0.431 0.925	0.105 0.105	2.142	0.088	0.280
$5i$	0.002	0.003	0.003	0.001	0.001	0.001	0	−0.000	−0.001	−0.010	−0.001	−0.002
5	0	−0.276	−0.036	0	−0.265	−0.034	0	−0.256	−0.033	0	−0.239	−0.031
1	1.560 1.560	0.171 0.171	0.553 0.287	1.367 1.367	0.294 0.294	0.408 0.407	1.199 1.198	0.401 0.401	0.281 0.512	0.915	0.575	0.081
0	1.868	0.387	0.385	1.575	0.509	0.506	1.326	0.615	0.612	—	—	—
i	1.560 1.560	0.556 0.289	0.169 0.169	1.367 1.367	0.408 0.410	0.291 0.295	1.120 1.119	0.283 0.513	0.392 0.392	0.915	0.081	0.571
$5i$	0	−0.036	−0.272	0	−0.034	−0.262	0	−0.033	−0.253	0	−0.031	−0.236

Таблица 2

λ	0			0.5			1			2			∞		
z/a_1	D_1W	M_x	M_y	D_1W	M_x	M_y	D_1W	M_x	M_y	D_1W	M_x	M_y	D_1W	M_x	M_y
5	0	−6.73	−0.18	0	−6.43	−0.17	0	−6.35	−0.17	0	−6.30	−0.16	0	−6.39	−0.17
1	23.87	−0.00	0.63	18.87 18.87	1.91 1.91	0.31 0.18	17.25 17.25	2.60 2.60	0.20 0.20	16.00 16.00	3.22 3.22	0.13 0.18	14.58	4.77	0.13
0	—	—	—	20.82	1.99	0.17	18.57	2.71	0.19	16.83	3.34	0.17	—	—	—
i	23.68	8.13	0.00	19.20 19.20	4.14 2.11	0.25 0.25	17.72 17.72	2.84 2.84	0.29 0.29	16.52 16.52	1.78 3.48	0.27 0.27	14.58	−0.05	−0.15
$5i$	0.00	−0.17	−0.58	0	−0.19	−0.59	−0.00	−0.19	−0.60	−0.00	−0.19	−0.51	0	−0.19	−0.59
5	0	−3.34	−0.43	0	−3.25	−0.42	0	−3.21	−0.42	0	−3.18	−0.41	0	−3.13	−0.41
1	10.95	0.00	3.17	9.30 9.30	1.04 1.04	1.94 1.04	8.65 8.65	1.45 1.45	1.45 1.45	8.08 8.08	1.81 1.81	1.02 1.80	7.16	2.39	0.33
0	—	—	—	10.22	1.04	1.03	9.29	1.45	1.44	8.48	1.81	1.80	—	—	—
i	10.95	3.20	−0.00	9.30 9.30	1.95 1.04	1.03 1.03	8.65 8.65	1.46 1.46	1.44 1.44	8.08 8.08	1.03 1.82	1.80 1.80	7.16	0.33	2.39
$5i$	0	−0.43	−3.31	0	−0.42	−3.22	0	−0.42	−3.19	0	−0.41	−3.16	0	−0.41	−3.11

Кроме того, разложим в ряды Фурье подынтегральные выражения в функциях $f_{mn}(s)$ $(m=3, 4;\ n=\overline{1, N})$ и проинтегрируем. Получим

$$f_{mn}(s)=(\delta_{mn}'\sigma-\bar{\delta}_{mn}'\sigma^{-1})\ln\sigma+i\delta_{mn}''\ln\sigma+\delta_{mn0}+\sum_{k=1}^{\infty}(\delta_{mnk}\sigma^{k}+\bar{\delta}_{mnk}\sigma^{-k}) \tag{1.11}$$

Здесь δ_{3n}', δ_{mn}'', δ_{mn0} — вещественные, δ_{4n}' — чисто мнимые, δ_{mnk} — комплексные постоянные, зависящие от вида функций $q^{(n)}(x, y)$.

Подставим выражения (1.7) — (1.11) в граничные условия (1.3), (1.4) и приравняем коэффициенты при $\sigma\ln\sigma$, $\sigma^{-1}\ln\sigma$, $\ln\sigma$ и одинаковых степенях σ. Учитывая условия статического равновесия плиты и условия однозначности прогиба [3], для определения комплексных постоянных A_{jnk}, C_{jk} и $a_{jk}^{(n)}$ получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами:

$$\sum_{j=1,2}\left[a_{jm0}C_{jk}+\bar{a}_{jm0}\left(\bar{m}_{j0}{}^{k}\bar{C}_{jk}+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}\alpha_{jsnk}A_{jns}\right)\right]=\delta_{m0k}^{*}\qquad (m=1,2)$$

$$\sum_{j=1,2}\left\{a_{jm0}\left[A_{j\nu k}+m_{j\nu}^{k}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\beta_{jsk}^{(\nu)}C_{js}+{\sum_{n=1}^{N}}'\gamma_{jnsk}^{(n)}A_{jns}\right)\right]+\right. \tag{1.12}$$

$$\left.+\bar{a}_{jm0}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\bar{\beta}_{jsk}^{(\nu)}\bar{C}_{js}+{\sum_{n=1}^{N}}'\bar{\gamma}_{jnsk}^{(\nu)}\bar{A}_{jns}\right)-a_{jm\nu}m_{j\nu}^{(\nu)k}a_{jk}^{(\nu)}-\bar{a}_{jm\nu}\bar{a}_{jk}^{(\nu)}\right\}=\bar{\delta}_{m\nu k}^{*}$$

$$(m=\overline{1, 4};\ \nu=\overline{1, N})$$

$$\bar{\delta}_{m0k}^{*}=\bar{\delta}_{m0k}-\sum_{j=1,2}\left[a_{jm0}\sum_{n=1}^{N}c_{j0n,-k}M_{jn}+\bar{a}_{jm0}\sum_{n=1}^{N}(\bar{c}_{j0nk}\bar{M}_{jn}+\bar{b}_{j0nk}\bar{N}_{jn})\right]$$

$$\bar{\delta}_{m\nu k}^{*}=\delta_{m\nu k}-\sum_{j=1,2}\left\{a_{jm0}\left[c_{j\nu k}M_{j\nu}+b_{j\nu k}N_{j\nu}+m_{j\nu}{}^{k}\sum_{s=1}^{\infty}{\sum_{n=1}^{N}}'(d_{j2nk}^{(\nu)}M_{jn}+d_{j1nk}^{(\nu)}N_{j})\right]+\right.$$

$$\left.+\bar{a}_{jm0}\left[\bar{c}_{j\nu,-k}\bar{M}_{j\nu}+\sum_{s=1}^{\infty}{\sum_{n=1}^{N}}'(\bar{d}_{j2nk}^{(\nu)}\bar{M}_{jn}+\bar{d}_{j1nk}^{(\nu)}\bar{N}_{jn})\right]\right\}$$

Несложными, но громоздкими преобразованиями систему (1.12) можно привести к нормальному виду [1] и доказать ее квазирегулярность для несоприкасающихся контуров L_n.

После определения функций $W_{jn}(z_j^{(n)})$ легко найти по известным формулам [2] прогиб, моменты и перерезывающие силы, возникающие в плите и в упругих ядрах.

Заметим, что из приведенного решения можно получить решение для случая, когда все или часть ядер являются абсолютно гибкими или абсолютно жесткими. В первом случае во всех формулах нужно положить $D_{rk}^{(n)}=0$ (для соответствующих n), а во втором — перейти к пределу при $D_{rk}^{(n)}\to\infty$.

2. Как частный случай рассмотрим плиту с одним ядром, деформируемую поперечной нагрузкой $q^{(0)}$ и $q^{(1)}$ постоянной интенсивности. В этом случае функции $W_0^{(n)}$ $(n=0, 1)$ можно взять в виде $W_0^{(n)}=q^{(n)}x^4/24D_{11}^{(n)}$.

Тогда в полученном выше решении следует принять

$$M_{11}=\frac{(q^{(1)}-q^{(0)})a_1b_1\mu_{10}\mu_{20}\bar{\mu}_{10}\bar{\mu}_{20}}{2iD_{11}^{(0)}(\mu_{20}-\mu_{10})(\bar{\mu}_{10}-\mu_{10})(\bar{\mu}_{20}-\mu_{10})},\quad M_{21}=\frac{(q^{(1)}-q^{(0)})a_1b_1\mu_{10}\mu_{20}\bar{\mu}_{10}\bar{\mu}_{20}}{2iD_{11}^{(0)}(\mu_{10}-\mu_{20})(\bar{\mu}_{20}-\mu_{20})(\bar{\mu}_{10}-\mu_{20})}$$

$$N_{j1}=\overset{(0)}{z_{j1}}=0 \quad (j=1,2), \qquad \delta_{2nk}=0 \quad (k\geqslant 0)$$

$$\delta_{101}=-\frac{q^{(0)}a_0^3}{16D_{11}^{(0)}},\quad \delta_{103}=\frac{1}{3}\delta_{101},\quad \delta_{1n0}=\delta_{1n2}=\delta_{1nk}=0 \quad (k\geqslant 4)$$

$$\delta_{111}=\frac{a_1^3}{16}\sum_{n=0,1}(-1)^{n+1}\frac{q^{(n)}}{D_{11}^{(n)}},\qquad \delta_{113}=\frac{1}{3}\delta_{111}$$

$$\delta_{311}=\frac{a_1}{16}\sum_{n=0,1}(-1)^n q^{(n)}\left(3b_1^2-\frac{D_{12}^{(n)}}{D_{11}^{(n)}}a_1^2-2i\frac{D_{16}^{(n)}}{D_{11}^{(n)}}a_1b_1\right)$$

$$\delta_{313}=\frac{a_1}{48}\sum_{n=0,1}(-1)^{n+1}q^{(n)}\left(\frac{D_{12}^{(n)}}{D_{11}^{(n)}}a_1^2+b_1^2\right)$$

$$\delta_{411}=\frac{ia_1^2b_1}{8}\sum_{n=0,1}(-1)^{n+1}q^{(n)},\qquad \delta_{413}=\frac{a_1^2}{24}\sum_{n=0,1}(-1)^n q^{(n)}\left(\frac{D_{16}^{(n)}}{D_{11}^{(n)}}a_1+ib_1\right)$$

$$\delta_{310}=\delta_{312}=\delta_{410}=\delta_{412}=\delta_{31k}=\delta_{41k}=0 \quad (k\geqslant 4)$$

Численные расчеты были проведены на ЭВМ для плит, изготовленных из ортотропных материалов с различной степенью анизотропии: а) из авиационной фанеры, для которой $D_1^{(0)}/D_2^{(0)}=12.1$ [2]; б) из СВАМ – $D_1^{(0)}/D_2^{(0)}=1.01$ [4]. Жесткости для ядра принимались пропорциональными соответствующим жесткостям плиты, т. е. $D_r^{(1)}=\lambda D_r^{(0)}$ $(r=1,2,3)$. При этом в системе (1.12) было оставлено 30 уравнений, что обеспечило высокую точность удовлетворения граничных и контактных условий.

В таблицах приведены в долях $q^{(n)}$ значения для прогиба и изгибающих моментов в наиболее интересных точках круглой плиты с круглым ядром, когда $a_0=5$, $a_1=c_1=c_0=1$. Данные табл. 1 получены в предположении, что $q^{(1)}\neq 0$, $q^{(0)}=0$, табл. 2 — когда $q^{(1)}=0$, $q^{(0)}\neq 0$. Верхние части таблиц соответствуют «фанерной» плите, а нижние — плите из СВАМ.

Для точек контура спая плиты и ядра в таблицах приведено по два значения: верхние значения характеризуют прогиб и моменты, возникающие в плите, а нижние — в ядре.

Из приведенных таблиц видно, что заполнение отверстия упругим ядром приводит к существенному снижению концентрации напряжений вблизи контура спая по сравнению со случаями $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$. При этом моменты вблизи внешнего края плиты практически не меняются.

В рассматриваемом случае максимальный прогиб получается в центре плиты; что касается максимальных изгибающих моментов, то в зависимости от материала, формы контуров, расстояния между ними и нагрузки они получаются либо в центре, либо в точках пересечения главных направлений упругости с контуром плиты или спая.

Значения максимального прогиба и изгибающего момента в фанерной плите всегда получаются больше, чем в плите из СВАМ.

Поступила 15 IV 1974

Саратовский
государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меглинский В. В.* Концентрация напряжений около эллиптических упругих включений в тонкой анизотропной плите. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 6.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
3. *Меглинский В. В.* Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит. В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел, вып. 3. Изд-во Саратовск. ун-та, 1967.
4. *Буров А. К., Андреевская Г. Д.* Стекловолокнистые анизотропные материалы и их техническое применение. М., Изд-во АН СССР, 1956.