МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1976

УДК 539.3

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ РАЗРЕЗОВ, НАГРУЖЕННЫХ САМОУРАВНОВЕШЕННЫМИ НАГРУЗКАМИ

А. М. ЛИНЬКОВ

(Ленинград)

Частные случаи одно- и двоякопериодических задач о разрезах рассмотрены в работах [1–4]. С другой стороны, построено и изучено интегральное уравнение общей двоякопериодической задачи для замкнутых контуров [5, 6] (см. также [7], стр. 271–279). В данной работе получено и исследовано уравнение для произвольных разомкнутых контуров (разрезов).

Рассмотрим упругую плоскость с двоякопериодической системой криволинейных гладких разрезов. В декартовой системе координат xOy комплексные числа $2\omega_k$ ($k=1, 2$) являются основными периодами. В основном параллелограмме имеется p разрезов L_j ($j=1, 2, \ldots, p$), совокупность которых образует контур $L=L_1+\ldots+L_p$. Фиксируем направление обхода L_j и обозначим a_j – начала, b_j – концы разрезов ($j=1, 2, \ldots, p$). Величины, относящие к левому берегу разреза, отмечаются в дальнейшем индексом плюс, а к правому – минус. Нормаль n к контуру L считается направленной вправо от направления обхода.

Пусть на берегах разрезов L_j ($j=1, 2, \ldots, p$) заданы напряжения $\sigma_{ni}^{\pm}$ ($i=x, y$) класса H^*, такие, что их главный вектор на каждом из разрезов равен нулю. Напряжения на остальных разрезах одинаковы в конгруэнтных точках. Определение класса H^* и других упоминаемых классов содержится в работе [8]. Требуется найти поля напряжений и смещений в плоскости.

Решение задачи сводится [9] к нахождению двух кусочно-голоморфных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ ($z=x+iy$), предельные значения которых слева и справа от разреза удовлетворяют соотношению

$$\varphi^{\pm}(t)+t\overline{\varphi'^{\pm}(t)}+\overline{\psi^{\pm}(t)}=f^{\pm}(t)+C \quad \text{на} \quad L \tag{1}$$

где t — комплексная координата точки на L

$$f^{\pm}(t)=\int_0^{s_j}(-\sigma_{ny}^{\pm}+i\sigma_{nx}^{\pm})\,ds \quad \text{на} \quad L_j$$

очевидно, что $f^+(a_j)-f^-(a_j)=f^+(b_j)-f^-(b_j)=0$; s_j — длина дуги контура L_j, отсчитываемая от его начала a_j; C — функция, принимающая постоянное значение C_j на разрезе L_j. Постоянные C_j ($j=1, 2, \ldots, p$) находятся при решении задачи.

Функция $\varphi(z)$ квазипериодическая с периодами $2\omega_k$ ($k=1, 2$). Ее циклические постоянные $2a_k$ ($k=1, 2$) также находятся при решении задачи.

Функция $\psi(z)$ удовлетворяет соотношению

$$\psi(z+2\omega_k)=\psi(z)-2\bar{\omega}_k\varphi'(z)+2(\bar{\gamma}_k-\bar{a}_k) \tag{2}$$

где постоянные $2\gamma_k$ $(k=1, 2)$ удовлетворяют соотношению, выражающему равенство нулю момента сил, приложенных к контуру L и любому контуру, охватывающему его

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{4}\int_L (\bar{f}^+-\bar{f}^-)\,dt+(\bar{\gamma}_1\omega_2-\bar{\gamma}_2\omega_1)\right\}=0 \tag{3}$$

Относительно предельных значений функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi'(z)$ будем предполагать следующее: 1) $\varphi^\pm(t)$, $\bar{t}\varphi'^\pm(t)+\psi^\pm(t)\in H$; 2) $\varphi'^\pm(t)=\varphi^{\pm\prime}(t)$; 3) $\varphi'^\pm(t)$, $\psi(t)\in H^*$; 4) $\varphi^+(a_j)-\varphi^-(a_j)=\varphi^+(b_j)-\varphi^-(b_j)=0$ $(j=1, 2,\ldots, p)$.

При сделанных предположениях функция $\varphi(z)$ определена с точностью до выражения $A+Bz$, а $\psi(z)$ — с точностью до постоянной D [9]. Здесь A и D — произвольные комплексные числа, B — произвольная чисто мнимая постоянная. Для дальнейшего удобно считать, что начало координат находится в основном параллелограмме вне L и что $\varphi(0)=\psi(0)=0$. При этом произвол в постоянных A и D исключается; функция $\psi(z)$, разность $\varphi^+(t)-\varphi^-(t)$ и постоянные C_j $(j=1, 2,\ldots, p)$, если решение задачи существует, определяются единственным образом. Функция $\varphi(z)$ определена с точностью до слагаемого Bz (B — чисто мнимое число).

Вывод интегрального уравнения основывается на следующем утверждении.

Теорема. Для того, чтобы функции g^+, g^- класса H^* на L были предельными значениями кусочно-голоморфной квазипериодической функции $g(z)$, которая имеет циклы $2\omega_k$ $(k=1, 2)$, циклические постоянные $2\alpha_k$ $(k=1, 2)$, обращается в нуль при $z=0$ и в основном параллелограмме имеет L линией разрыва, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись равенства

$$g^+(t)+g^-(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L [g^+(\tau)-g^-(\tau)][\zeta(\tau-t)-\zeta(\tau)]\,d\tau-\frac{4}{\pi i}(\alpha_1\eta_2-\alpha_2\eta_1)t$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L [g^+(\tau)-g^-(\tau)]\,d\tau=-\frac{2}{\pi i}(\alpha_1\omega_2-\alpha_2\omega_1)$$

При этом

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L [g^+(\tau)-g^-(\tau)][\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau)]\,d\tau-\frac{2}{\pi i}(\alpha_1\eta_2-\alpha_2\eta_1)z$$

Здесь $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса (см. [10]); $2\eta_k$ $(k=1, 2)$ — циклические постоянные функции $\zeta(z)$.

Если функции g^+, g^- удовлетворяют условиям теоремы, имеют производные класса H^* и $g^+(a_j)-g^-(a_j)=g^+(b_j)-g^-(b_j)=0$, то [8] $g'^\pm=g^{\pm\prime}$ и нетрудно установить, что

$$g^{+\prime}(t)+g^{-\prime}(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L [g^{+\prime}(\tau)-g^{-\prime}(\tau)]\zeta(\tau-t)\,d\tau-\frac{4}{\pi i}(\alpha_1\eta_2-\alpha_2\eta_1) \quad \text{на } L$$

$$g'(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_L [g^+(\tau)-g^-(\tau)]\zeta'(\tau-z)\,d\tau-\frac{2}{\pi i}(\alpha_1\eta_2-\alpha_2\eta_1)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L [g^{+\prime}(\tau)-g^{-\prime}(\tau)]\zeta(\tau-z)\,d\tau-\frac{2}{\pi i}(\alpha_1\eta_2-\alpha_2\eta_1)$$

Из предположений относительно $\varphi(z)$ следует, что для нее справедлива теорема и следствие из нее.

Представим $\psi(z)$ в виде

$$\psi(z)=\Omega(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_L(\varphi^+-\varphi^-)Q(\tau-z)\,d\tau \tag{4}$$

где $Q(z)$ — функция, введенная в работе [11]

$$Q(z)=\sum_{m,n}{}'\left\{\frac{\overline{w}}{(z-w)^2}-2z\frac{\overline{w}}{w^3}-\frac{\overline{w}}{w^2}\right\}$$

$$w=m\cdot 2\omega_1+n\cdot 2\omega_2;\qquad m,\ n=\ldots,-2,\ -1,\ 1,\ 2,\ldots$$

$\Omega(z)$ — квазипериодическая кусочно-голоморфная функция, подлежащая определению; ее циклические постоянные обозначим $2\beta_k$ $(k=1,\ 2)$. Для $Q(z)$ справедлива формула (см. [7])

$$Q(z+2\omega_k)=Q(z)-2\overline{\omega}_k\zeta'(z)+2d_k\qquad (k=1,\ 2)$$

где $2d_k$ $(k=1,\ 2)$ — известные постоянные, они удовлетворяют равенству $-(d_1\omega_2-d_2\omega_1)=\eta_1\overline{\omega}_2-\eta_2\overline{\omega}_1$.

Применяя следствие из теоремы к функции $\varphi'(z)$, получаем

$$\psi(z+2\omega_k)=\psi(z)-2\overline{\omega}_k\varphi'(z)+\frac{4}{\pi i}\{d_k(a_1\omega_2-a_2\omega_1)-\overline{\omega}_k(a_1\eta_2-a_2\eta_1)\}+2\beta_k$$

Сравнение с (2) показывает, что кусочно-голоморфная квазипериодическая функция $\Omega(z)$ должна иметь циклические постоянные

$$2\beta_k=-\frac{4}{\pi i}d_k(a_1\omega_2-a_2\omega_1)+2(\overline{\gamma}_k-\overline{a}_k)+\frac{4\overline{\omega}_k}{\pi i}(a_1\eta_2-a_2\eta_1) \tag{5}$$

Используя (4), (1) и голоморфность $Q(z)$ в основном параллелограмме, получим

$$\Omega^\pm(t)=\overline{f^\pm(t)}+\overline{C}-\overline{\varphi^\pm(t)}-\overline{t}\varphi'^\pm(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L(\varphi^+-\varphi^-)Q(\tau-t)\,d\tau$$

Применяя теорему к функциям $\varphi(z)$, $\Omega(z)$ и следствие из нее к $\varphi'(z)$, обычным путем [9, 12] получаем уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int_L(\varphi^+-\varphi^-)[\zeta(\tau-t)-\zeta(\tau)]\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L(\varphi^+-\varphi^-)\{[\overline{\zeta(\tau-t)}-\overline{\zeta(\tau)}]\overline{d\tau}-$$

$$-[\zeta(\tau-t)-\zeta(\tau)]\,d\tau\}-\frac{1}{2\pi i}\int_L(\overline{\varphi}^+-\overline{\varphi}^-)\,d[(\tau-t)\overline{\zeta(\tau-t)}-\tau\overline{\zeta(\tau)}]-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L(\overline{\varphi}^+-\overline{\varphi}^-)\overline{Q(\tau-t)\,d\tau}-\frac{2}{\pi i}[2it\,\mathrm{Im}(a_1\eta_2-a_2\eta_1)-(\beta_1\overline{\eta}_2-\beta_2\overline{\eta}_1)\overline{t}]=$$

$$=\frac{1}{2}(f^++f^-)+C+\frac{1}{2\pi i}\int_L(f^+-f^-)[\overline{\zeta(\tau-t)}-\overline{\zeta(\tau)}]\overline{d\tau} \tag{6}$$

при дополнительных условиях

$$a_2\omega_1-a_1\omega_2=\frac{1}{4}\int\limits_L(\varphi^+-\varphi^-)\,d\tau$$

$$2i\,\mathrm{Im}\,(a_2\bar\omega_1-a_1\bar\omega_2)={}^1/_4\int\limits_L(\bar f^+-\bar f^-)\,d\tau+(\bar\gamma_1\omega_2-\bar\gamma_2\omega_1)+\frac{1}{2}\,i\,\mathrm{Im}\int\limits_L(\varphi^+-\varphi^-)\,\overline{d\tau} \tag{7}$$

Однородная система относительно a_1, a_2, отвечающая (7), имеет решение $a_1=B\omega_1$, $a_2=B\omega_2$ (B — произвольное чисто мнимое число). Достаточным условием разрешимости (7) является равенство (3). Считая его выполненным, будем под a_1 и a_2 в уравнении (6) понимать некоторое решение системы (7). Постоянные β_1, β_2 выражаются через a_1, a_2 по формулам (5). Нетрудно видеть, что постоянная B в (6) не входит.

Окончательное уравнение (6) относительно $\varphi^+-\varphi^-$ должно решаться в классе h_{2p}. Поскольку $\zeta(\tau-t)=1/(\tau-t)+K(\tau-t)$, где $K(z)$ — голоморфная в основном параллелограмме функция, уравнение (6) принадлежит хорошо изученному типу [8, 13]. Используя общую теорию этих уравнений и сформулированную выше теорему и лишь немного видоизменяя известный ход рассуждений [6, 8, 14], нетрудно доказать, что всякое решение (6) дает функции

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L(\varphi^+-\varphi^-)\,[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau)]\,d\tau-\frac{2}{\pi i}(a_1\eta_2-a_2\eta_1)z$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\{(\bar f^+-\bar f^-)-(\bar\varphi^+-\bar\varphi^-)-\bar\tau\,(\varphi^{+\prime}-\varphi^{-\prime})\}\,[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau)]\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L(\varphi^+-\varphi^-)\,Q(\tau-z)\,d\tau-\frac{2}{\pi i}(\beta_1\eta_2-\beta_2\eta_1)z$$

определяющие решение задачи при граничных условиях (1). При этом из общей теории [8] следует, что допущения 1)—4) выполнены. Решение класса h_{2p} единственно. Индекс уравнения (6) в классе h_{2p} равен $-p$. Условия разрешимости (6) дают $2p$ вещественных уравнений для $2p$ вещественных постоянных $\mathrm{Re}\,C_j$, $\mathrm{Im}\,C_j$ ($j=1, 2,\dots, p$). Эта система всегда разрешима. Отсюда следует существование решения уравнения (6) класса h_{2p} и решения исходной задачи теории упругости. Обобщение на случай замкнутых контуров очевидно.

Поступила 10 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Koiter W. T.* An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet. Ingr.-arch., 1959, Bd. 28, S. 168—172.
2. *Койтер В. Т.* Бесконечный ряд параллельных трещин в неограниченной упругой пластинке. В сб.: Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961.
3. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1960, № 3.
4. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Первая основная задача теории упругости для двоякопериодической системы разрезов. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
5. *Koiter W. T.* Some general theorems on doubly-periodic and quasi-periodic functions. Proc. Konikl. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A, 1959, vol. 62, No 2.
6. *Koiter W. T.* Stress distribution in an infinite elastic sheet with a doubly-periodic set of equal holes. Boundary problems different. equat., Medison, Univ. Wisconsin Press, 1960, p. 191–213.

7. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
10. *Гурвиц А., Курант Р.* Теории функций. М., «Наука», 1968.
11. *Натанзон В. Я.* О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке. Матем. сб., 1935, т. 42, № 5.
12. *Мусхелишвили Н. И.* Новый общий способ решения основных контурных задач плоской теории упругости. Докл. АН СССР, 1934, т. 3, № 1.
13. *Манджавидзе Г. Ф.* Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применении в теории упругости. ПММ, 1951, т. 15, вып. 3.
14. *Мусхелишвили Н. И.* Исследование новых интегральных уравнений плоской теории упругости. Докл. АН СССР, 1934, т. 3, вып. 2.