**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1976**

УДК 539.3

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Т. Л. МАРТЫНОВИЧ

(Львов)

Точное решение плоской задачи для анизотропной пластинки, ослабленной отверстием, известно только для случаев, когда отверстие имеет форму круга или эллипса [1, 2]. Для определения напряжений в анизотропной пластинке возле отверстия, мало отличающегося от эллиптического или кругового, применяются приближенные методы [1, 3, 4], которые распространены и на случай многосвязных анизотропных пластинок [5].

В данной статье приводится точное решение плоской задачи для бесконечной анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, ограниченным простым замкнутым контуром.

1. Пусть анизотропная пластинка, имеющая в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости xoy, занимает бесконечную область S с отверстием, ограниченным простым гладким замкнутым контуром L. Рассмотрим первую основную задачу, когда к краю отверстия пластинки L приложены внешние усилия N и T (N, T — нормальная и касательная составляющая заданных напряжений), а напряжения в пластинке на бесконечности ограничены: $\sigma_x^\infty=p$, $\sigma_y^\infty=q$, $\tau_{xy}^\infty=r$.

На основании формул плоской задачи анизотропной среды [1, 2] граничные условия запишем в дифференциальной форме

$$dU=(N+iT)\,dt \qquad (t\in L) \tag{1.1}$$

причем

$$U=\sum_{j=1}^{2}\left[(1+is_j)\varphi_j(z_j)+(1+i\bar{s}_j)\overline{\varphi_j(z_j)}\right] \tag{1.2}$$

$$\lim_{|z_j|\to\infty}\varphi_j'(z_j)=A^{(j)} \qquad (j=1,2)$$

Здесь $A^{(j)}$ — постоянные, которые выражаются через напряжения в пластинке на бесконечности; t — аффикс точки контура L; $z_j=x+s_jy$ ($j=1$, 2) — обобщенные комплексные переменные, изменяющиеся в областях S_j, получаемых из области S соответствующими аффинными преобразованиями, а $s_j=\alpha_j+i\beta_j$ — корни характеристического уравнения [1, 2].

Контуры отверстий областей S_j переменных $z_j=x+s_jy$ обозначим через L_j, а аффиксы их точек — через t_j ($j=1$, 2). Аффиксы точек контуров L_j и L находятся между собой в аффинном соответствии

$$t_j={}^1/_2(1-is_j)\,t+{}^1/_2(1+is_j)\,\bar{t} \qquad (j=1,\ 2) \tag{1.3}$$

Граничные условия (1.1) преобразуем к интегральному виду [6]

$$\int_L F(t)\,dU=\int_L F(t)\,(N+iT)\,dt,\qquad \int_L \overline{F(t)}\,dU=\int_L \overline{F(t)}\,(N+iT)\,dt \tag{1.4}$$

где $F(t)$ — граничное значение произвольной функции $F(z)$ переменной $z=x+iy$, голоморфной в области пластинки S.

Пусть регулярная функция, совершающая конформное отображение внешности единичной окружности γ ($|\zeta|\geqslant 1$) на внешность контура L области S, имеет вид [7]

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\sum_{k=1}^{N} c_k\zeta^{-k}\right)\quad (\omega'(\zeta)\neq 0,\ |\zeta|\geqslant 1),\qquad \sum_{k=1}^{N} k|c_k|^2<1 \tag{1.5}$$

Изменяя в соотношении (1.5) постоянные R, c_k и N можно получить отверстия в форме круга, эллипса, овала, криволинейного треугольника, четырехугольника и др.

Соотношения (1.3) с учетом отображающей функции (1.5) примут вид

$$t_j=(R_j/R)\,[\omega(\sigma)+m_j\overline{\omega(\sigma)}]\qquad (t_j\in L_j,\ \sigma\in\gamma) \tag{1.6}$$

$$R_j={}^1/_2R(1-is_j),\qquad m_j=(1+is_j)\,/\,(1-is_j)\qquad (j=1,\,2) \tag{1.7}$$

Выражения (1.6) представляют собой граничные значения функций

$$z_j=\omega_j(\zeta_j)=(R_j/R)\,[\omega(\zeta_j)+m_j\bar{\omega}(1/\zeta_j)]\qquad (z_j\in S_j,\quad |\zeta_j|\geqslant 1) \tag{1.8}$$

регулярных в областях $|\zeta_j|\geqslant 1$, кроме точки $\zeta_j=\infty$, где они имеют полюс порядка N. Функции $\omega_j(\zeta_j)$ и $\omega_j'(\zeta_j)$ имеют нули, расположенные вне единичной окружности γ, число которых равно $N-1$. Только при $N=0$ (круговое отверстие) и $N=1$ ($|c_1|<1$) (эллиптическое отверстие) $\omega_j(\zeta_j)\neq 0$ и $\omega_j'(\zeta_j)\neq 0$ вне γ.

При больших $|z_j|$ функции $\varphi_j(z_j)$ имеют вид [1, 2]:

$$\varphi_j(z_j)=D^{(j)}\ln z_j+A^{(j)}z_j+A_0'^{(j)}+O(1/z_j)\qquad (j=1,2) \tag{1.9}$$

Постоянные $D^{(j)}$ выражаются через компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных к границе L области S по известным формулам [2].

Вводя обозначения $\varphi_j[\omega_j(\zeta_j)]=\varphi_{*j}(\zeta_j)$, находим

$$\varphi_j'(z_j)=\varphi_{*j}'(\zeta_j)\,/\,\omega_j'(\zeta_j)\qquad (j=1,\,2) \tag{1.10}$$

$$\omega_j'(\zeta_j)=\frac{R_j}{R}\left[\omega'(\zeta_j)-\frac{m_j}{\zeta_j^2}\,\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta_j}\right)\right] \tag{1.11}$$

Функции $\varphi_{*j}(\zeta_j)$ ограничены в областях $1\leqslant|\zeta_j|<\infty$, в точках $\zeta_j=\infty$ имеют полюс порядка N. Последние утверждения вытекают из условий (1.2), налагаемых на функции $\varphi_j(z_j)$ на бесконечности

$$\lim_{|z_j|\to\infty}\varphi_j'(z_j)=\lim_{|\zeta_j|\to\infty}\frac{\varphi_{*j}'(\zeta_j)}{\omega_j'(\zeta_j)}=A^{(j)}\qquad (j=1,2) \tag{1.12}$$

и ограниченности выражения

$$u+iv=\sum_{j=1}[(p_j+iq_j)\,\varphi_{*j}(\zeta_j)+(\bar{p}_j+i\bar{q}_j)\overline{\varphi_{*j}(\zeta_j)}]\qquad (1\leqslant|\zeta_j|<\infty)$$

Следовательно, функции $\varphi_{*j}(\zeta_j)$, ограниченные в области $1\leqslant|\zeta_j|<\infty$, при достаточно больших $|\zeta_j|$ можно представить в виде рядов (неограниченные слагаемые отброшены)

$$\varphi_{*j}(\zeta_j)=D^{(j)}\ln\zeta_j+\sum_{k=1}^{N}a_k^{(j)}\zeta_j^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(j)}\zeta_j^{-k}\qquad(j=1,2)\tag{1.13}$$

Однозначные функции (1.10) не имеют других особых точек, кроме полюсов, совпадающих с нулями функции $\omega_j'(\zeta_j)$. Следовательно, они являются мероморфными функциями переменных ζ_j. В рассматриваемом случае в силу представлений (1.5) и (1.13) — дробно-рациональными функциями.

При надлежащем определении функций $\varphi_{*j}'(\zeta_j)$ можно достичь того, что функции (1.10) будут ограниченными вне единичной окружности γ. Для этого достаточно потребовать, чтобы нули функции $\varphi_{*j}'(\zeta_j)$ совпадали вне γ с нулями функции $\omega_j'(\zeta_j)$.

Таким образом, функции $\varphi_{*j}'(\zeta_j)$ должны удовлетворять условиям

$$\varphi_{*j}'(\zeta_j^{(n)})=0\qquad(n=1,2,\ldots,N-1)\qquad(j=1,2)\tag{1.14}$$

где $\zeta_j^{(n)}$ — корни уравнения $\omega_j'(\zeta_j)=0$ $(j=1,\,2)$ по модулю больше единицы $(|\zeta_j^{(n)}|>1)$.

На основании выражений (1.5), (1.11) и (1.13) функции (1.10) принимают следующий вид:

$$\varphi_j'(z_j)=\left[\left(D^{(j)}+\sum_{k=1}^{N}ka_k^{(j)}\zeta_j^k-\sum_{k=0}^{\infty}kA_k^{(j)}\zeta_j^{-k}\right)\right]\left\{R_j\left[\left(\zeta_j-\sum_{k=1}^{N}kc_k\zeta_j^{-k}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{m_j\bar R}{R}\left(\zeta_j^{-1}-\sum_{k=1}^{N}k\bar c_k\zeta_j^k\right)\right]\right\}^{-1}\qquad(j=1,2)\tag{1.15}$$

Условия (1.12) и (1.14) с учетом разложений (1.13) запишутся так:

$$\sum_{k=0}^{N}kA_k^{(j)}(\zeta_j^{(n)})^{-k}-\sum_{k=1}^{N-1}ka_k^{(j)}(\zeta_j^{(n)})^k=Na_N^{(j)}(\zeta_j^{(n)})^N+D^{(j)}-\sum_{k=N+1}^{\infty}kA_k^{(j)}(\zeta_j^{(n)})^{-k}$$

$$a_N^{(j)}=R_j[m_j\bar c_N\bar RR^{-1}+\delta_{N1}+\delta_{N0}]A^{(j)}\qquad(n=1,2,\ldots,N-1)\qquad(j=1,2)\tag{1.16}$$

Здесь $\zeta_j^{(n)}$ — корни уравнений

$$\zeta_j-\sum_{k=1}^{N}kc_k\zeta_j^{-k}-\frac{m_j\bar R}{R}\left(\zeta_j^{-1}-\sum_{k=1}^{N}k\bar c_k\zeta_j^k\right)=0\tag{1.17}$$

по модулю больше единицы $(|\zeta_j^{(n)}|>1)$ $(j=1,\,2)$.

В преобразованной области граничные условия (1.4) примут вид

$$\int_\gamma F_*(\sigma)\,dU=\int_{\gamma^+}F_*(\sigma)\,(N+iT)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma$$

$$\int_\gamma \overline{F_*(\sigma)}\,dU=\int_{\gamma^+}\overline{F_*(\sigma)}\,(N+iT)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma\tag{1.18}$$

где $F_*(\zeta)=F[\omega(\zeta)]$ — произвольная функция, голоморфная вне γ.

Граничное значение функции U на γ, согласно формулам (1.2) и (1.13), равно

$$U=\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{N}\left[(1+is_j)a_k^{(j)}\sigma^k+(1+i\bar{s}_j)\bar{a}_k^{(j)}\sigma^{-k}\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(1+is_j)A_k^{(j)}\sigma^{-k}+(1+i\bar{s}_j)\bar{A}_k^{(j)}\sigma^k\right]+D^*\ln\sigma \tag{1.19}$$

$$D^*=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(N+iT)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma=\frac{X+iY}{2\pi}$$

Произвольную функцию $F_*(\zeta)$ представим в виде ряда

$$F_*(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\zeta^{-n} \tag{1.20}$$

Внесем выражения (1.19), (1.20) в граничные условия (1.18) и выполним интегрирование вдоль замкнутого контура γ. Полагая при этом все E_j, кроме E_n, равными нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомых функций (1.13) вида

$$\sum_{j=1}^{2}\left[(1+is_j)A_n^{(j)}+(1+i\bar{s}_j)\bar{a}_n^{(j)}\right]=f_n,\qquad \sum_{j=1}^{2}\left[(1+i\bar{s}_j)\bar{A}_n^{(j)}+(1+is_j)a_n^{(j)}\right]=g_n$$

$$a_n^{(j)}=0\quad\text{при}\quad n>N\qquad {\scriptstyle (n=1,2,\ldots,\infty)} \tag{1.21}$$

$$f_n=-\frac{1}{2\pi in}\int_{\gamma^+}\sigma^n(N+iT)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma,\qquad g_n=\frac{1}{2\pi in}\int_{\gamma^+}\sigma^{-n}(N+iT)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma$$

Из системы (1.21) при $n>N$ находим

$$A_n^{(1)}=\frac{1-is_2}{2i(s_1-s_2)}f_n-\frac{1+is_2}{2i(s_1-s_2)}\bar{g}_n$$

$$A_n^{(2)}=\frac{1+is_1}{2i(s_1-s_2)}\bar{g}_n-\frac{1-is_1}{2i(s_1-s_2)}f_n\qquad {\scriptstyle (n>N)} \tag{1.22}$$

Присоединив к системе (1.21) ($n=1, 2, \ldots, N$) равенства (1.16), получаем конечную систему линейных алгебраических уравнений порядка $4N-2$ (N — наибольшая отрицательная степень в разложении отображающей функции (1.5)) для определения остальных коэффициентов разложения функций (1.13).

В случае второй основной задачи, когда заданы смещения u и v точек границы L области S, а напряжения в пластинке на бесконечности ограничены, система уравнений (1.21) заменяется следующей:

$$\sum_{j=1}^{2}\left[(p_j+iq_j)A_n^{(j)}+(\bar{p}_j+i\bar{q}_j)\bar{a}_n^{(j)}\right]=f_n^*$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left[(\bar{p}_j+i\bar{q}_j)\bar{A}_n^{(j)}+(p_j+iq_j)a_n^{(j)}\right]=g_n^*$$

$$a_n^{(j)}=0 \quad \text{при} \quad n>N \qquad (n=1,2,\ldots,\infty) \tag{1.23}$$

$$f_n^*=-\frac{1}{2\pi in}\int\limits_{\gamma^+}\sigma^n d(u+iv), \qquad g_n^*=\frac{1}{2\pi in}\int\limits_{\gamma^+}\sigma^{-n}d(u+iv) \tag{1.24}$$

p_j и q_j ($j=1, 2$) — известные постоянные величины, зависящие от упругих свойств материала пластинки [1, 2].

Если главный вектор внешних усилий, вызвавших заданные перемещения u и v точек контура L, равен нулю, постоянные $D^{(j)}=0$.

Решив систему (1.23) при $n>N$, получим формулы, аналогичные (1.22).

Приписав к системе (1.23) ($n=1, 2, \ldots, N$) равенства (1.16), получаем конечную систему линейных алгебраических уравнений порядка $4N-2$ для определения остальных коэффициентов разложения функций (1.13).

В том случае, когда в отверстие пластинки L впаяно абсолютно жесткое ядро, то $u+iv=i\varepsilon_0 t+u_0+iv_0$, где ε_0 — угол поворота ядра, а величины (1.24) равны

$$f_n^*=R\varepsilon_0 c_n i, \qquad g_n^*=R\varepsilon_0\delta_{n1}i; \qquad f_n^*=0 \quad (n>N)$$

где δ_{nk} — символ Кронекера.

Угол поворота ядра ε_0 определяется из условия равенства нулю момента усилий, действующих на ядро со стороны окружающего материала [2].

Все сказанное выше с очевидными незначительными изменениями приложим к случаю конечной области S, отображаемой на круг $|\zeta|\leqslant 1$ функцией вида

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\sum_{k=2}^{N}c_k\zeta^k\right)$$

2. Рассмотрим задачу о растяжении ортотропной пластинки с квадратным отверстием. Оси координат x и y направим параллельно главным направлениям упругости. На бесконечности пластинка растягивается усилиями $\sigma_x^\infty=p$, $\sigma_y^\infty=q$ ($\tau_{xy}^\infty=0$). Край отверстия пластинки L свободный от внешней нагрузки ($N=0$, $T=0$).

В рассматриваемом случае $N=3$, $c_1=0$, $c_2=0$, $c_3=\bar{c}_3$, $R=\bar{R}$, $D^{(j)}=0$, $f_n=0$, $g_n=0$, $s_i=i\beta_j$, а коэффициенты $A_n^{(j)}$, $a_n^{(j)}$ — величины действительные, причем с четными индексами n равны нулю. При положительном c_3 вершины квадрата лежат на осях x и y, а при отрицательном c_3 стороны квадрата параллельны осям координат.

Системы алгебраических уравнений (1.16), (1.21) с учетом симметрии задачи будут шестого порядка следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{2}[(1+\beta_j)A_n^{(j)}+(1-\beta_j)a_n^{(j)}]=0, \qquad \sum_{j=1}^{2}[(1-\beta_j)A_n^{(j)}+(1+\beta_j)a_n^{(j)}]=0$$

$$3A_3^{(j)}+A_1^{(j)}(\zeta_j^{(k)})^2-a_1^{(j)}(\zeta_j^{(k)})^4=3a_3^{(j)}(\zeta_j^{(k)})^6 \qquad (n=1,3) \quad (j=1,2) \quad (k=1,2)$$

$$a_3^{(1)}=-\frac{R_1m_1c_3}{2(\beta_1^2-\beta_2^2)}(p+\beta_2^2q), \qquad a_3^{(2)}=\frac{R_2m_2c_3}{2(\beta_1^2-\beta_2^2)}(p+\beta_1^2q)$$

Здесь $\zeta_j^{(k)}$ — корни уравнений (1.17)

$$3c_3m_j\zeta_j^6+\zeta_j^4-m_j\zeta_j^2-3c_3=0 \qquad (j=1, 2)$$

по модулю больше единицы ($|\zeta_j^{(k)}|>1$).

θ_{rad}	$E_x = E_{max}$	$E_x = E_{min}$	$E_x = E_{max}$	$E_x = E_{min}$	θ_{rad}	$E_x = E_{max}$	$E_x = E_{min}$	$E_x = E_{max}$	$E_x = E_{min}$
0	−0.374	−0.721	−2.029	−4.102	$\pi/3$	2.427	2.503	0.593	0.929
$\pi/36$	−0.371	−0.716	−1.314	−1.909	$13\pi/36$	2.725	2.512	0.799	1.192
$\pi/18$	−0.361	−0.692	−0.673	−0.734	$7\pi/18$	2.599	2.318	1.116	1.579
$\pi/9$	−0.275	−0.464	−0.208	−0.104	$4\pi/9$	2.135	1.950	2.905	3.478
$\pi/6$	0.061	0.336	−0.002	0.154	$17\pi/36$	2.009	1.857	6.623	6.329
$2\pi/9$	0.520	0.935	0.157	0.356	$\pi/2$	1.967	1.826	13.665	9.551
$5\pi/18$	1.400	1.562	0.332	0.586	$19\pi/36$	2.009	1.857	6.623	6.329

Функции напряжений, согласно формуле (1.15), таковы:

$$\varphi_j'(z_j) = \frac{3a_3^{(j)}\zeta_j^6 + a_1^{(j)}\zeta_j^4 - A_1^{(j)}\zeta_j^2 - 3A_3^{(j)}}{R_j[(\zeta_j^4 - 3c_3) - m_j(\zeta_j^2 - 3c_3\zeta_j^6)]} \qquad (j=1,2)$$

В таблице в случае $q=0$ помещены численные значения напряжений σ_θ (в долях p) в некоторых точках контура квадратного отверстия ($c_3=\mp{}^1/_9$) фанерной пластинки с комплексными параметрами [1]: $s_1=4.11i$, $s_2=0.343i$, если $E_x=E_{max}$, и $s_1=0.243i$, $s_2=2.91i$, если $E_x=E_{min}$.

Задача изгиба анизотропной пластинки с отверстием вида (1.5) решается аналогично.

Поступила 11 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
2. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Наукова думка», 1968.
3. *Шерман Д. И.* К решению плоской задачи теории упругости анизотропной среды. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.
4. *Космодамианский А. С.* Новый приближенный метод определения напряжений в анизотропной пластинке с криволинейным отверстием. В сб.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел, вып. 2. Изд-во Саратовск. ун-та, 1965.
5. *Космодамианский А. С.* О напряженном состоянии анизотропной пластинки с двумя неодинаковыми отверстиями. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 1.
6. *Мартынович Т. Л., Божидарник В. В.* Об одном методе определения напряженного состояния в анизотропных пластинках с несимметрично подкрепленным краем. Прикл. механ., 1973, т. 9, вып. 6.
7. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М., Гостехиздат, 1954.