МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1976

УДК 531.8

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ИНЕРЦИОННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Н. В. БАНИЧУК, В. М. МАМАЛЫГА

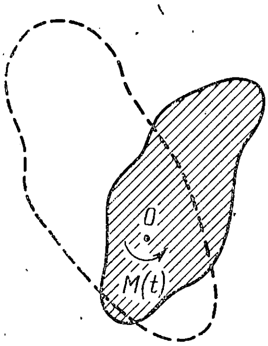
(Москва)

Рассмотрены задачи оптимального управления механическими системами с переменной инерционной характеристикой, представляющие интерес в связи с изучением оптимальных режимов работы элементов манипуляторов и некоторых крановых установок. Изучены управления и режимы движения, оптимальные по быстродействию.

1. Рассмотрим плоское движение механической системы (фиг. 1) с одной неподвижной точкой, которое описывается уравнениями

$$(I\varphi')'=M(t),\qquad x'=V(t)\qquad (x\geqslant 0)\tag{1.1}$$

Здесь φ — угол поворота относительно неподвижной точки O, I — момент инерции системы, $M(t)$ — вращающий момент; штрихом обозначено дифференцирование по времени.



Фиг. 1

Система под действием управляющих воздействий может изменять свои геометрические и инерционные характеристики, причем геометрия системы и ее момент инерции полностью определяются заданием обобщенной координаты x. Таким образом $I=I(x)=I(x(t))$. Предполагается, что $I(0)>0$, $I(x)=I(-x)$, а производная момента инерции положительна для положительных x, т. е. $dI/dx\geqslant 0$ при $x\geqslant 0$. Переменные $x=x(t)$ и $\varphi=\varphi(t)$ рассматриваются в качестве обобщенных координат системы. Момент $M=M(t)$, вызывающий вращение рассматриваемого объекта, выбирается в качестве управляющего воздействия. В качестве второй управляющей функции принимается скорость изменения x, т. е. функция $V(t)$.

На управления $M=M(t)$ и $V=V(t)$, фигурирующие в правых частях дифференциальных уравнений (1.1), наложены условия

$$|M(t)|\leqslant M^*,\qquad |V(t)|\leqslant V^*\tag{1.2}$$

ограничивающие допустимые значения вращающего момента и скорости изменения величины x ($M^*>0$, $V^*>0$ — заданные константы). Исследуемая ниже задача состоит в отыскании управлений $M=M(t)$ и $V=V(t)$, при помощи которых система переводится из начального состояния $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=0$, $x(0)=x_0$ в конечное состояние $\varphi(T)=\varphi_1$, $\varphi'(T)=0$, $x(T)=x_1$ ($x_0\geqslant 0$, $x_1\geqslant 0$, $\varphi_1\geqslant 0$ — заданные константы) за кратчайшее время, т. е. при $T\to\min$, где T — время окончания движения системы.

Отметим следующее свойство поставленной задачи. Обозначим через T_1 минимальное время в задаче с ограничением $x\geqslant 0$ (эту задачу назовем первой), а через T_2 минимальное время в задаче без указанного неравенства (вторая задача). Покажем, что $T_1=T_2$. Это равенство, очевидно, будет выполнено, если для решения второй задачи выполнено неравенство $x(t)\geqslant 0$. Предположим, что при решении второй задачи на некотором участке $0\leqslant t_1\leqslant t\leqslant t_2\leqslant T_2$ имеет место $x(t)<0$ $(x(t_1)=x(t_2)=0)$. Тогда по данной траектории $x(t)$ построим положительную траекторию x^* (и соответствующее ей управление), такую, что $x^*=-x(t)$ при $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, а на участках, где $x(t)\geqslant 0$, — совпадающую с ней. Обозначим через T^* время движения, соответствующее траектории $x^*(t)$. Учитывая, что $I(x)=I(-x)$, получим $T^*=T_1=T_2$. Если решение второй задачи единственно, то, принимая во внимание последнее равенство, получим $x(t)\geqslant 0$, $0\leqslant t\leqslant T_2$.

2. Далее будем исследовать вторую задачу. Определение оптимальных управлений проведем с использованием принципа максимума Л. С. Понтрягина [1]. Предварительно запишем уравнения (1.1) в канонической форме в виде системы уравнений первого порядка

$$\varphi'=\omega,\qquad \omega'=\frac{M}{I}-\frac{\omega V}{I}\frac{dI}{dx},\qquad x'=V \tag{2.1}$$

Граничные условия примут вид

$$\begin{aligned}&\varphi(0)=0,\qquad \omega(0)=0,\qquad x(0)=x_0\\ &\varphi(T)=\varphi_1,\qquad \omega(T)=0,\qquad x(T)=x_1\end{aligned} \tag{2.2}$$

Обозначая через P_φ, P_ω, P_x сопряженные переменные, соответствующие координатам φ, ω, x, запишем функцию Гамильтона для рассматриваемой системы

$$H=P_\varphi\omega+\frac{M}{I}P_\omega+V\left(P_x-\frac{\omega}{I}P_\omega\frac{dI}{dx}\right)$$

Сопряженные переменные удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}P_\varphi'=0,\qquad P_\omega'=-P_\varphi+\frac{VP_\omega}{I}\frac{dI}{dx}\\ P_x'=P_\omega\left(\frac{M}{I^2}\frac{dI}{dx}+V\omega K\right),\qquad K\equiv\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{I}\frac{dI}{dx}\right)\end{gathered} \tag{2.3}$$

Используя введенные переменные и обозначения, запишем необходимые условия оптимальности управлений M и V

$$H\to\max\nolimits_{V,M},\qquad H(T)=1 \tag{2.4}$$

Условие трансверсальности $H(T)=1$ служит для определения времени окончания процесса. Таким образом, задача определения оптимальных режимов сведена к решению систем дифференциальных уравнений (2.1), (2.3), которые с условиями (2.2) и (2.4) образуют замкнутую краевую задачу.

3. Рассмотрим режимы управления, для которых производные $\partial H/\partial M$ и $\partial H/\partial V$ не обращаются в нуль ни на каком конечном подынтервале отрезка [0, T], т. е.

$$\partial H/\partial M\neq 0,\qquad \partial H/\partial V\neq 0 \tag{3.1}$$

В рассматриваемом случае, учитывая линейность функции H по переменным M и V, определим искомые оптимальные управления

$$M=M^*\operatorname{sign}P_\omega,\qquad V=V^*\operatorname{sign}\left(P_x-\frac{\omega P_\omega}{I}\frac{dI}{dx}\right)\tag{3.2}$$

Для полного отыскания оптимальных управлений M и V как функций времени t необходимо определить число и положение точек переключения, т. е. точек разрыва функций sign, фигурирующих в правых частях выражений (3.2). С этой целью проинтегрируем первое из уравнений (2.3) ($P_\varphi=C_1$, C_1 — некоторая произвольная постоянная) и исключим P_φ из остальных уравнений (2.1), (2.3). Подставляя далее в полученные уравнения выражения для управлений (3.2), приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered}\varphi'=\omega,\qquad \omega'=-\frac{1}{I}\left[\omega\frac{dI}{dx}V^*\operatorname{sign}\left(P_x-\frac{\omega P_\omega}{I}\frac{dI}{dx}\right)-M^*\operatorname{sign}P_\omega\right]\\ x'=V^*\operatorname{sign}\left(P_x-\frac{\omega}{I}P_\omega\frac{dI}{dx}\right)\\ P_\omega'=\frac{P_\omega}{I}V^*\frac{dI}{dx}\operatorname{sign}\left(P_x-\frac{\omega}{I}P_\omega\frac{dI}{dx}\right)-C_1\\ P_x'=P_\omega\left[\frac{M^*}{I^2}\frac{dI}{dx}\operatorname{sign}P_\omega+\omega KV^*\operatorname{sign}\left(P_x-\frac{\omega}{I}P_\omega\frac{dI}{dx}\right)\right]\end{gathered}\tag{3.3}$$

В рассматриваемом случае постоянная C_1 отлична от нуля. Для доказательства этого утверждения предположим противное, т. е. что $C_1=0$. Тогда из третьего и четвертого уравнений (3.3) получим $P_\omega=AI$, где A — произвольная постоянная. Рассмотрим последовательно два возможных случая $A=0$ и $A\neq0$. Если $A=0$, то $P_\omega(t)\equiv0$ при $0\leqslant t\leqslant T$, что противоречит первому условию (3.1). Если же $A\neq0$, то оптимальное управление $M(t)=\alpha=M^*\operatorname{sign}A$ постоянно и не имеет точек переключения. В данном случае, как это следует из уравнения (1.1) и граничного условия $\omega(0)=0$, будем иметь $\omega=\alpha tI^{-1}$. Из этого соотношения вытекает, что ни для каких $t<\infty$ функция $\omega(t)$ не обращается в нуль и поэтому граничное условие $\omega(T)=0$ не может быть выполнено при $T<\infty$. Полученное противоречие доказывает сформулированное выше утверждение $C_1\neq0$.

Таким образом, полное отыскание оптимальных управлений в случае (3.1) сводится к решению краевой задачи (3.3), (2.2) с условием $H(T)=1$ для отыскания переменных φ, ω, x, T, P_ω, P_x, C_1 как функций времени t и последующему определению управлений $M(t)$ и $V(t)$ по формулам (3.2). Эта краевая задача, очевидно, является замкнутой, так как для определения семи неизвестных констант — пяти постоянных интегрирования в системе (3.3), константы C_1 и времени окончания процесса T — имеем семь условий (шесть условий (2.2) и условие трансверсальности $H(T)=1$).

4. Как было показано выше, полное решение рассматриваемой задачи (определение оптимальных управлений и соответствующих им траекторий движения системы) сводится к решению краевой задачи. Значительные трудности, возникающие при решении этой задачи, обусловлены наличием в управлении точек переключения, число и положение которых заранее неизвестно и определяется в процессе ее решения.

Цель проводимых ниже исследований заключается в дополнительном рассмотрении оптимальных управлений и установлении теорем о числе точек переключения, что позволяет существенно упростить решаемую задачу. Используя общие свойства системы (3.3), докажем следующие утверждения.

Теорема 1. Оптимальное управление $M=M(t)$ имеет одну точку переключения.

Доказательство. На основании уравнений (2.3) имеем

$$P_\omega' = \frac{x'P_\omega}{I}\frac{dI}{dx} - C_1 \tag{4.1}$$

где C_1 — постоянная интегрирования первого уравнения (2.3).

Из дифференциального соотношения (4.1) после выполнения элементарных преобразований и интегрирования получим (C_2'— произвольная постоянная)

$$P_\omega = I\left(C_2 - C_1\int_0^t \frac{d\tau}{I}\right) \tag{4.2}$$

Выражение, записанное в правой части (4.2) в круглых скобках, при $C_1<0$ ($C_1>0$) — монотонно возрастающая (убывающая) функция времени. Следовательно, это выражение (так как $C_1\neq 0$) обращается в нуль не более одного раза на отрезке $0\leqslant t\leqslant T$. Отсюда и из неравенства $I>0$ следует, что и P_ω имеет не более одного нуля на указанном интервале. Поэтому оптимальное управление $M=M^*\operatorname{sign}P_\omega$ имеет на интервале $(0, T)$ не более одного переключения, точка переключения $t=t^*$ определяется как корень уравнения $P_\omega(t^*)=0$.

Если предположить, что точка переключения в управлении $M=$ $=M^*\operatorname{sign}P_\omega$ отсутствует, то на основании соотношения $\omega=\alpha t I^{-1}$ и вычислений, которые проводились при доказательстве неравенства $C_1\neq 0$, получим противоречие: $\omega(T)\neq 0$ для $T<\infty$. Тем самым утверждение теоремы полностью доказано.

Отметим некоторые свойства оптимального управления $M=M(t)$. Интервал управления $0\leqslant t\leqslant T$ состоит из двух участков: участка $0\leqslant t\leqslant t^*$ «разгона» системы, на котором $M(t)>0$, и участка $t^*\leqslant t\leqslant T$ торможения, где $M(t)<0$.

На этих участках для угловой скорости движения справедливы формулы

$$\omega = \frac{M^*t}{I(x)} \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant t^*, \qquad \omega = -\frac{M^*(t-t^*)}{I(x)} + \omega_* \quad \text{при} \quad t^*\leqslant t\leqslant T$$

$$\omega_* = \omega(t^*) = M^*t^*I^{-1}(x(t^*)) \tag{4.3}$$

вытекающие из первого уравнения (1.1) и граничного условия $\omega(0)=0$. Используя формулы (4.3), покажем, что для всех t из интервала $0\leqslant t\leqslant T$ справедливо неравенство $\omega(t)\geqslant 0$ и, следовательно, φ представляет собой функцию, монотонно возрастающую от 0 до φ_1 $(0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1)$. Предполагая для доказательства противное, что при некотором t_1 $(0<t_1<T)$ скорость $\omega(t_1)<0$, и используя соотношения (4.3), получим неравенство $\omega(t)<0$ для всех $t_1\leqslant t\leqslant T$. Полученное противоречие между этим неравенством и граничным условием $\omega(T)=0$ доказывает утверждение.

Теорема 2. При оптимальном управлении по M оптимальное управление $V=V(t)$ имеет не более одной точки переключения.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию S, имеющую вид

$$S = I\left(P_x - \frac{\omega P_\omega}{I}\frac{dI}{dx}\right) \tag{4.4}$$

Число нулей этой функции, как следует из формулы (3.2) для V и предположения $I>0$, совпадает с числом переключений в оптимальном управлении $V=V(t)$. Вычислим полную производную dS/dt. Для этого предварительно на основании уравнений (3.3) получим вспомогательное соотношение для импульсов. Из второго, третьего и пятого уравнений (3.3) путем элементарных выкладок получим

$$IP_x'-P_\omega\left(\omega\frac{dI}{dx}\right)'=0 \tag{4.5}$$

Выполняя дифференцирование выражения (4.4) по переменной t и используя формулу (4.5), приходим к соотношению

$$dS/dt=x'P_x-\omega P_\omega' \tag{4.6}$$

Подставим в правую часть (4.6) выражение для P_ω', согласно (3.3), и преобразуем уравнение, используя формулу (4.4). Последующее интегрирование приводит к выражению для S

$$S=I\left(C_2+C_1\int_0^t\frac{\omega}{I}\frac{dI}{dx}d\tau\right) \tag{4.7}$$

где C_2 — произвольная постоянная. Из сделанных предположений относительно момента инерции системы $I>0$, $dI/dx>0$ и доказанного неравенства $\omega(t)\geqslant 0$ следует, что выражение, записанное в (4.7) в круглых скобках, является монотонной функцией времени и поэтому обращается в нуль на интервале $(0, T)$ не более одного раза. Следовательно, имеем не более одного переключения в оптимальном управлении $V=V(t)$.

5. В рассматриваемой задаче для некоторых граничных условий и параметров системы возможны режимы, когда функция Гамильтона H на подынтервалах отрезка $[0, T]$ не зависит от V и M. Проведем исследование некоторых особых режимов. Рассмотрим случай, когда на конечном подынтервале времени скорость $x'(t)=0$. В этом случае $\partial H/\partial V=0$, так как, предполагая противное, т. е. $\partial H/\partial V\neq 0$, из условия оптимальности получаем $V=V^*\operatorname{sign}(\partial H/\partial V)\neq 0$. Данное же неравенство противоречит второму уравнению (2.1) $(x'=V=0)$.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что для движения с $\varphi(t)=\mathrm{const}$ на некотором конечном отрезке времени $[t', t'']$ будет выполняться соотношение $\partial H/\partial M=0$. Отсюда нетрудно видеть, что из условий $\partial H/\partial M\neq 0$, $\partial H/\partial V\neq 0$ следуют неравенства $x'\neq 0$ и $\varphi'\neq 0$, а движения как с $x=\mathrm{const}$, так и с $\varphi=\mathrm{const}$ не реализуются на активных участках. Поясним возможные причины появления режимов управления, для которых $\partial H/\partial M=0$ и $\varphi'=0$ на некотором отрезке времени. Для этого рассмотрим движение системы в случае, когда V^* мало или мал угол φ_1. В этом случае время окончания процесса T лимитируется управлением V, а движение по координате φ может быть завершено $(\varphi(t')=\varphi_1,\ t'<T)$ за меньшее время. Выбор управления $M=M(t)$ из условия минимальности T будет неоднозначным (см. фиг. 2).

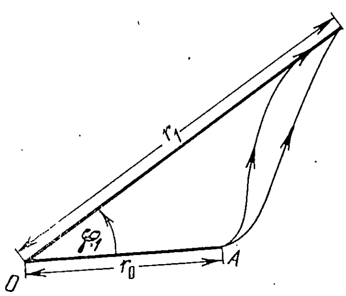
В случае, когда оптимальная траектория содержит участки с $x=0$, оптимальное управление системой при условии выполнения неравенств (3.1) для свободных участков и неравенства $\partial H/\partial M\neq 0$ для участка $x=0$ дается формулой

$$V=V^*\operatorname{sign}\left(P_x-\frac{\omega P_\omega}{I}\frac{dI}{dx}\right)\quad \text{при}\quad x>0,\quad \frac{\partial H}{\partial V}\neq 0$$

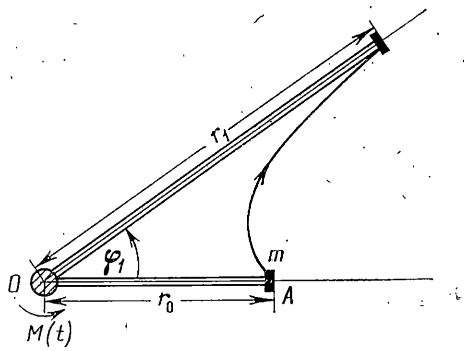
$$V\equiv 0\quad \text{при}\quad x=0$$

$$M=M^*\operatorname{sign}P_\omega\quad \text{при}\quad x\geqslant 0,\quad \frac{\partial H}{\partial M}\neq 0$$

6. К рассмотренной в п. 1 математической постановке, в частности, приводит исследование оптимальных режимов работы простейшей крановой системы, состоящей из поворотной башни (точка O на фиг. 3), стрелы крана OA и переносимого груза, прикрепленного к свободному концу стрелы в точке A. Стрела может либо изменять свои размеры, тем самым передвигая груз, либо иметь постоянную длину, а точка подвеса с грузом перемещаться вдоль стрелы, которая в данном случае играет роль направляющей. Система снабжена двигателями, реализующими вращательный момент $M(t)$ и «вынос» (либо перемещение точки подвеса) стрелы крана. Управление выносом стрелы предполагается безынерционным. Условия (1.2) означают ограниченность мощностей, развиваемых двигателями.



Фиг. 2



Фиг. 3

Для рассмотренной модели крановой установки в качестве переменной x примем расстояние от точки O до точки подвеса груза (в дальнейшем этот параметр обозначается через r), $I=I_0+mr^2$, где $I_0=\text{const}>0$, m – масса переносимого груза. В задаче разыскиваются управления, обеспечивающие перенос краном груза из начального положения $\varphi=0$, $r=r_0$ в точку $\varphi=\varphi_1$, $r=r_1$ за минимум времени, причем в начальном и конечном положениях $\varphi'=0$. Для удобства решения сформулированной задачи перейдем к безразмерным переменным Φ, Ω, X, τ по формулам

$$\varphi=\frac{M^*\Phi}{m(V^*)^2},\qquad t=\frac{\tau}{V^*}\left(\frac{I_0}{m}\right)^{1/2},\qquad \omega=\frac{M^*\Omega}{mV^*}\left(\frac{m}{I_0}\right)^{1/2},\qquad r=X\left(\frac{I_0}{m}\right)^{1/2} \tag{6.1}$$

В безразмерных переменных (6.1) соотношения (1.2), (2.1), (2.2) примут вид

$$\begin{gathered}\Phi'=\Omega,\quad [(1+X^2)\Omega]'=M(t),\quad |M(t)|\leqslant 1,\quad |V(t)|\leqslant 1,\quad X'=V(t)\\ X(0)=r_0(m/I_0)^{1/2}=d,\quad \Omega(0)=0,\quad \Phi(0)=0\\ X(T)=r_1(m/I_0)^{1/2}=b,\quad \Omega(T)=0,\quad \Phi(T)=\varphi_1 mM^{*-1}(V^*)^2=c\end{gathered} \tag{6.2}$$

Без ограничения общности будем считать, что $b\geqslant d$ (в случае $b\leqslant d$ оптимальное управление и траектории движения могут быть получены из соответствующих формул с $b\geqslant d$ после взаимной перестановки параметров b и d).

Задача (6.2) является трехпараметрической (параметры d, b, c). При различных значениях указанных параметров определялись оптимальные управления и соответствующие им режимы движения крановой установки. Было выяснено, что в зависимости от значений параметров b, c, d реализуются оптимальные управления четырех типов.

Ниже, без конкретных выкладок, формулируются окончательные результаты исследования: указываются оптимальные управления, траектории движения системы и приводятся соотношения между параметрами задачи, для которых реализуется каждый из типов управления.

1). Если параметры задачи b, c, d таковы, что корень α_0 уравнения

$$\begin{gathered}c={}^1/_2\ln\{{}^1/_{16}[4+(d+\alpha)^2]^2(1+d^2)^{-1}(1+\alpha^2)^{-1}\}-\\ -(d+\alpha)\operatorname{arctg}[{}^1/_2(d+\alpha)]+d\operatorname{arctg}d+\alpha\operatorname{arctg}\alpha\end{gathered}$$

удовлетворяет неравенству $d<\alpha_0\leqslant b$, то оптимальное управление и траектории движения системы даются формулами

$$V(t)=1,\quad M(t)=1,\quad X=d+\tau,\quad \Omega=\tau[1+(d+\tau)^2]^{-1}\quad (0\leqslant\tau\leqslant{}^1/_2(\alpha_0-d))$$

$$\Phi={}^1/_2\ln\{[1+(d+\tau)^2][1+d^2]^{-1}\}-d\operatorname{arctg}(d+\tau)+d\operatorname{arctg}d$$

$$V(t)=1,\quad M(t)=-1,\quad X=d+\tau,\quad \Omega=(\alpha_0-\tau)[1+(d+\tau)^2]^{-1}\quad ({}^1/_2(\alpha_0-d)\leqslant\tau\leqslant\alpha_0-d)$$

$$\begin{gathered}\Phi={}^1/_2\ln\{{}^1/_{16}[4+(\alpha_0+d)^2]^2(1+d^2)^{-1}[1+(d+\tau)^2]^{-1}\}+\\ +\alpha_0\operatorname{arctg}(d+\tau)+d\operatorname{arctg}d-(d+\alpha_0)\operatorname{arctg}[{}^1/_2(d+\alpha_0)]\end{gathered}$$

$$V(t)=1,\quad M(t)=0,\quad X=d+\tau,\quad \Phi=c,\quad \Omega=0\quad (\alpha_0-d\leqslant\tau\leqslant b-d)$$

Для приведенного режима управления общее время движения T равно $T=b-d$.

2). Если параметры задачи b, c, d таковы, что корень β_0 уравнения

$$c={}^1/_2\ln[{}^1/_{16}[4+(2b-\beta)^2]^2(1+d^2)^{-1}(1+b^2)^{-1}]+(\beta-2b)\operatorname{arctg}(b-\beta/2)+$$
$$+(b-d-\beta)\operatorname{arctg}[{}^1/_2(b+d-\beta)]+b\operatorname{arctg}b+d\operatorname{arctg}d$$

удовлетворяет неравенству $b-d\leqslant\beta_0\leqslant b+d$, то оптимальное управление и траектории движения системы даются формулами

$$V(t)=-1,\quad M(t)=1,\quad X=d-\tau,\quad \Omega=\tau[1+(d-\tau)^2]^{-1}\quad (0\leqslant\tau\leqslant{}^1/_2(\beta_0+d-b))$$
$$\Phi={}^1/_2\ln\{[1+(d-\tau)^2][1+d^2]^{-1}\}-d\operatorname{arctg}(d-\tau)+d\operatorname{arctg}d$$
$$V(t)=1,\quad M(t)=1,\quad X=b+\tau-\beta_0,\quad \Omega=\tau[1+(\tau+b-\beta_0)^2]^{-1}\quad ({}^1/_2(\beta_0+d-b)\leqslant\tau\leqslant{}^1/_2\beta_0)$$
$$\Phi={}^1/_2\ln[(1+(\tau+b-\beta_0)^2)(1+d^2)^{-1}]+(\beta_0-b)\operatorname{arctg}(\tau+b-\beta_0)+$$
$$+(b-d-\beta_0)\operatorname{arctg}[{}^1/_2(b-\beta_0+d)]+d\operatorname{arctg}d$$
$$V(t)=1,\quad M(t)=-1,\quad X=b+\tau-\beta_0,\quad \Omega=(\beta_0-\tau)[1+(\tau+b-\beta_0)^2]^{-1}\quad ({}^1/_2\beta_0\leqslant\tau\leqslant\beta_0)$$
$$\Phi={}^1/_2\ln\{{}^1/_{16}[4+(2b-\beta_0)^2]^2(1+d^2)^{-1}[1+(\tau+b-\beta_0)^2]^{-1}\}+b\operatorname{arctg}(\tau+b-\beta_0)+$$
$$+d\operatorname{arctg}d+(\beta_0-2b)\operatorname{arctg}(b-{}^1/_2\beta_0)+(b-d-\beta_0)\operatorname{arctg}[{}^1/_2(b+d-\beta_0)]$$

Полное время движения системы $T=\beta_0$.

3). Если параметры задачи b, c, d таковы, что корень γ_0 уравнения

$$c={}^1/_2\ln\{{}^1/_{16}[4+(2b-\gamma)^2]^2(1+d^2)^{-1}(1+b^2)^{-1}\}+{}^1/_2(\gamma-b)^2-{}^1/_2d^2+$$
$$+(\gamma-2b)\operatorname{arctg}(b-{}^1/_2\gamma)+d\operatorname{arctg}d+b\operatorname{arctg}b$$

удовлетворяет неравенству $b+d\leqslant\gamma_0\leqslant 2b$, то оптимальное управление и траектории движения системы даются формулами

$$V(t)=-1,\quad M(t)=1,\quad X=d-\tau,\quad \Omega=\tau[1+(d-\tau)^2]^{-1}\quad (0\leqslant\tau\leqslant d)$$
$$\Phi={}^1/_2\ln[(1+(d-\tau)^2)(1+d^2)^{-1}]-d\operatorname{arctg}(d-\tau)+d\operatorname{arctg}d$$
$$V(t)=0,\quad M(t)=1,\quad X=0,\quad \Omega=\tau\quad (d\leqslant\tau\leqslant\gamma_0-b),$$
$$\Phi={}^1/_2[\tau^2-d^2-\ln(1+d^2)]+d\operatorname{arctg}d$$
$$V(t)=1,\quad M(t)=1,\quad X=b-\gamma_0+\tau,\quad \Omega=\tau[1+(b-\gamma_0+\tau)^2]^{-1}\quad (\gamma_0-b\leqslant\tau\leqslant{}^1/_2\gamma_0)$$
$$\Phi(\tau)={}^1/_2\ln[(1+(b-\gamma_0+\tau)^2)(1+d^2)^{-1}]+(\gamma_0-b)\operatorname{arctg}(\tau+b-\gamma_0)+$$
$$+{}^1/_2[(\gamma_0-b)^2-d^2]+d\operatorname{arctg}d$$
$$V(t)=1,\quad M(t)=-1,\quad X=b-\gamma_0+\tau,\quad \Omega=(\gamma_0-\tau)[1+(b-\gamma_0+\tau)^2]^{-1}\quad ({}^1/_2\gamma_0\leqslant\tau\leqslant\gamma_0)$$
$$\Phi={}^1/_2\ln\{{}^1/_{16}[4+(2b-\gamma_0)^2]^2(1+d^2)^{-1}[1+(b-\gamma_0+\tau)^2]^{-1}\}+$$
$$+(\gamma_0-2b)\operatorname{arctg}(b-{}^1/_2\gamma_0)+b\operatorname{arctg}(b-\gamma_0+\tau)+d\operatorname{arctg}d+{}^1/_2[(\gamma_0-b)^2-d^2]$$

Время окончания процесса T равно γ_0.

4). Если параметры задачи b, c, d таковы, что корень μ_0 уравнения

$${}^1/_4\mu^2=c+{}^1/_2\{b^2+d^2+\ln[(1+d^2)(1+b^2)]\}-b\operatorname{arctg}b-d\operatorname{arctg}d$$

удовлетворяет соотношению $\mu_0\geqslant 2b$, то оптимальное управление и соответствующие траектории движения определяются формулами

$$V(t)=-1,\quad M(t)=1,\quad X=d-\tau,\quad \Omega=\tau[1+(d-\tau)^2]^{-1}\quad (0\leqslant\tau\leqslant d)$$
$$\Phi={}^1/_2\ln\{[1+(d-\tau)^2][1+d^2]^{-1}\}-d\operatorname{arctg}(d-\tau)+d\operatorname{arctg}d$$
$$V(t)=0,\quad M(t)=1,\quad X=0,\quad \Omega=\tau\quad (d\leqslant\tau\leqslant{}^1/_2\mu_0)$$
$$\Phi={}^1/_2[\tau^2-d^2-\ln(1+d^2)]+d\operatorname{arctg}d$$
$$V(t)=0,\quad M(t)=-1,\quad X=0,\quad \Omega=\mu_0-\tau\quad ({}^1/_2\mu_0\leqslant\tau\leqslant\mu_0-b)$$
$$\Phi=-{}^1/_2[\tau^2+{}^1/_2\mu_0^2+d^2+\ln(1+d^2)]+\mu_0\tau+d\operatorname{arctg}d$$
$$V(t)=1,\quad M(t)=-1,\quad X=\tau-\mu_0+b,\quad \Omega=(\mu_0-\tau)[1+(\tau-\mu_0+b)^2]^{-1}\quad (\mu_0-b\leqslant\tau\leqslant\mu_0)$$
$$\Phi={}^1/_4\mu_0^2-{}^1/_2\{b^2+d^2+\ln[(1+d^2)(1+(\tau-\mu_0+b)^2)]\}+b\operatorname{arctg}(\tau-\mu_0+b)+d\operatorname{arctg}d$$

Время окончания движения T равно $T=\mu_0$.

Авторы благодарят Ф. Л. Черноусько за ценные замечания, Н. И. Ерофеева, Н. Ф. Зубко, П. М. Стрельцова — за обсуждение задач оптимизации крановых систем.

Поступила 23 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.