

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В. Н. НАУМОВ

(Ленинград)

Методом малого параметра решена задача о напряженном состоянии упругого случайно-неоднородного полупространства, подвергнутого на бесконечности действию макроскопически однородных напряжений. Даны формулы для дисперсий напряжений в любой точке полупространства и для статистических характеристик концентрации напряжений на границе полупространства. Приводится результат численного расчета.

Задачи теории упругости с учетом неоднородности материала решались в работах [1, 2]. Решения при этом записывались в виде рядов по степеням некоторого параметра ε . В предположении малости флуктуаций упругих модулей обычно удерживается член ряда, линейный относительно ε . Погрешность метода малого параметра обсуждается в работе [3].

1. Упругое полупространство $z \geq 0$ подвергается на бесконечности действию нормальных напряжений $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$. Граница полупространства $z = 0$ не нагружена: $\sigma_x = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$. Напряжения удовлетворяют граничным условиям на $z = 0$, условиям нагружения на бесконечности и системе уравнений теории упругости в напряжениях.

Во всей области, занятой телом

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \mathbf{T} = \lambda \theta \mathbf{E} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{T} — тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформаций, θ — коэффициент объемного расширения, \mathbf{E} — единичный тензор, а λ , μ — коэффициенты упругости Ляме, представляющие собой однородные, изотропные случайные функции координат.

Представим случайные поля в виде сумм

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}, & \mu &= \mu^{(0)} + \mu^{(1)}, & \mathbf{T} &= \mathbf{T}^{(0)} + \mathbf{T}^{(1)}, & \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \\ & & \mathbf{u} &= \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)}, & \theta &= \theta^{(0)} + \theta^{(1)} \\ / & \lambda^{(0)} = \langle \lambda \rangle, & \mu^{(0)} &= \langle \mu \rangle, & \mathbf{T}^{(0)} &= \langle \mathbf{T} \rangle, & \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \\ & & \mathbf{u}^{(0)} &= \langle \mathbf{u} \rangle, & \theta^{(0)} &= \langle \theta \rangle \end{aligned} \quad (1.2)$$

где угловые скобки означают усреднение. Ввиду однородности случайных полей математические ожидания $\mathbf{T}^{(0)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$, $\theta^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$, $\mu^{(0)}$ постоянны. Величины с индексом (1) являются однородными центрированными случайными величинами.

Подстановка (1.2) в первое уравнение (1.1) дает

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^{(0)} = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \text{def } \mathbf{u}^{(0)}, \quad \nabla \cdot \mathbf{T}^{(1)} = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \text{def } \mathbf{u}^{(1)} \quad (1.3)$$

Подставляя также (1.2) во второе уравнение (1.1), предполагаем малость добавок $\lambda^{(1)}$ и $\mu^{(1)}$ вместе со своими производными по сравнению с $\lambda^{(0)}$ и $\mu^{(0)}$. Поэтому естественно принять, что $\mathbf{T}^{(1)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(1)}$ тоже малы по

сравнению с $\mathbf{T}^{(0)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$, $\mathbf{u}^{(0)}$. Тогда

$$\mathbf{T}^{(0)} = \lambda^{(0)} \theta^{(0)} \mathbf{E} + 2\mu^{(0)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{T}^{(1)} = \lambda^{(1)} \theta^{(0)} \mathbf{E} + 2\mu^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + \lambda^{(0)} \theta^{(1)} \mathbf{E} + 2\mu^{(0)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.3), получаем

$$\mu^{(0)} \nabla^2 \mathbf{u}^{(1)} + (\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)} = -\theta^{(0)} \nabla \lambda^{(1)} - 2\nabla \mu^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \quad (1.6)$$

2. Однородные случайные поля допускают спектральные представления [4]:

$$\lambda^{(1)} = \int_{\Omega} \Lambda(\boldsymbol{\rho}) e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho}} d\Omega, \quad \mu^{(1)} = \int_{\Omega} V(\boldsymbol{\rho}) e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho}} d\Omega \quad (2.1)$$

где $d\Omega$ — элемент пространства параметра $\boldsymbol{\rho}$, а $\Lambda(\boldsymbol{\rho})$, $V(\boldsymbol{\rho})$ — случайные функции со свойствами белого шума. Имеем

$$\begin{aligned} \langle \Lambda(\boldsymbol{\rho}) \rangle &= \langle V(\boldsymbol{\rho}) \rangle = 0, \quad \langle V(\boldsymbol{\rho}) \Lambda^*(\boldsymbol{\rho}_1) \rangle = S_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\rho}) \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1) \\ \langle V(\boldsymbol{\rho}) V^*(\boldsymbol{\rho}_1) \rangle &= S_{\mu\mu}(\boldsymbol{\rho}) \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1), \quad \langle \Lambda(\boldsymbol{\rho}) \Lambda^*(\boldsymbol{\rho}_1) \rangle = S_{\lambda\lambda}(\boldsymbol{\rho}) \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь звездочкой отмечены комплексно-сопряженные величины. Помимо спектральных плотностей $S_{\lambda\lambda}$, $S_{\mu\mu}$, $S_{\lambda\mu}$ введем дисперсии $K_{\lambda\lambda}$ и $K_{\mu\mu}$ функций $\lambda^{(1)}$ и $\mu^{(1)}$ и корреляционный смешанный момент $K_{\lambda\mu}$ при помощи равенств

$$K_{\lambda\lambda} = \int_{\Omega} S_{\lambda\lambda}(\boldsymbol{\rho}) d\Omega, \quad K_{\mu\mu} = \int_{\Omega} S_{\mu\mu}(\boldsymbol{\rho}) d\Omega, \quad K_{\lambda\mu} = \int_{\Omega} S_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\rho}) d\Omega$$

3. Подставляя (2.1) в (1.6), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}}{\mu^{(0)}} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)} + \nabla^2 \mathbf{u}^{(1)} &= -\frac{\theta^{(0)}}{\mu^{(0)}} i \int_{\Omega} \rho \Lambda(\boldsymbol{\rho}) e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho}} d\Omega - \\ &- \frac{2}{\mu^{(0)}} i \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \cdot \int_{\Omega} \rho \Lambda(\boldsymbol{\rho}) e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho}} d\Omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

частное решение которого ищем в виде

$$\mathbf{u}^{(1)} = i \int_{\Omega} \frac{e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho}}}{\rho^2} \left\{ A \rho \Lambda(\boldsymbol{\rho}) + B \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} V(\boldsymbol{\rho}) + C \rho \left(\frac{\boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\rho}}{\rho^2} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \right) \bar{V}(\boldsymbol{\rho}) \right\} d\Omega$$

В результате подстановки в (3.1) получаем

$$A = \frac{\theta^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}}, \quad B = -\frac{2}{\mu^{(0)}}, \quad C = -\frac{2}{\mu^{(0)}} \frac{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}}$$

Таким образом, искомое решение будет

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)} &= i \int_{\Omega} \frac{e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho}}}{\rho^2} \left\{ \frac{\theta^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \rho \Lambda(\boldsymbol{\rho}) + \frac{2}{\mu^{(0)}} \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} V(\boldsymbol{\rho}) - \right. \\ &\left. - \frac{2}{\mu^{(0)}} \frac{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\rho}}{\rho^2} \right) \rho V(\boldsymbol{\rho}) \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

Очевидно, что (3.2) не удовлетворяет граничному условию при $z=0$ и дает напряжение

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1^{(1)} = & \int_{\Omega} e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho}} \left\{ \frac{2\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \left(\mathbf{E} - \frac{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}{\rho^2} \right) \theta^{(0)} \Lambda(\rho) + \right. \\ & + 2 \left(\mathbf{E} - \frac{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}{\rho^2} \right) \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} - \mathbf{E} \frac{2(\lambda^{(0)} + \mu^{(0)})}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}{\rho^2} \right) V(\rho) + \\ & \left. + 2 \left(\mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}{\rho^2} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}{\rho^2} \right) V(\rho) \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (3.3)$$

Полный тензор напряжений $\mathbf{T}^{(1)}$ представляется в виде суммы $\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{T}_1^{(1)} + \mathbf{T}_0^{(1)}$, где $\mathbf{T}_0^{(1)}$ — затухающее при $z \rightarrow \infty$ решение однородных уравнений теории упругости, удовлетворяющее граничному условию при $z=0$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{T}_0^{(1)} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{T}_1^{(1)} \quad (3.4)$$

Решение задачи о действии нормальных и касательных напряжений на границе полупространства приводится в [5] и имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{x_0}^{(1)} = & -z \frac{\partial^3 \omega_1}{\partial z \partial x^2} - \frac{\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} + 2 \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z} - \right. \\ & \left. - \frac{z}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) + \frac{\lambda^{(0)}}{2(\lambda^{(0)} + \mu^{(0)})} \int_z^\infty \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) dz \right] \\ \sigma_{y_0}^{(1)} = & -z \frac{\partial^3 \omega_1}{\partial z \partial y^2} - \frac{\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} + \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} + \\ & + 2 \left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial z} - \frac{z}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) + \frac{\lambda^{(0)}}{2(\lambda^{(0)} + \mu^{(0)})} \int_z^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) dz \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь выписаны лишь те компоненты тензора напряжений, которые нужны в дальнейшем. Величины ω_1 , ψ_1 , ψ_2 — гармонические в полупространстве $z > 0$ функции, стремящиеся к нулю при $z \rightarrow \infty$ и удовлетворяющие следующим граничным условиям при $z=0$:

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} = -\sigma_{z_1}^{(1)}, \quad \mu^{(0)} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = -\tau_{xz_1}^{(1)}, \quad \mu^{(0)} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = -\tau_{yz_1}^{(1)} \quad (3.6)$$

Всем этим требованиям отвечают функции

$$\begin{aligned} \omega_1 = & - \int_{\Omega} \left\{ 2 \frac{\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \left(1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} \right) \theta^{(0)} \Lambda(\rho) + \right. \\ & + 2 \left(1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} \right) \left(\boldsymbol{\varepsilon}_z^{(0)} - 2 \frac{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}{\rho^2} \right) V(\rho) + \\ & \left. + 2 \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}{\rho^2} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_z^{(0)} \xi^2}{\rho^2} \right) V(\rho) \right\} \frac{\exp[-z\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + i(x\xi + y\eta)]}{\xi^2 + \eta^2} d\Omega \\ \psi_1 = & - \int_{\Omega} \left\{ 2 \frac{\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \left(-\frac{\xi\xi}{\rho^2} \right) \theta^{(0)} \Lambda(\rho) + 2 \frac{\xi\xi}{\rho^2} \left(-\boldsymbol{\varepsilon}_x^{(0)} - \boldsymbol{\varepsilon}_z^{(0)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}{\rho^2} \right) V(\rho) \right\} \frac{\exp[-z\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + i(x\xi + y\eta)]}{\xi^2 + \eta^2} d\Omega \end{aligned}$$

$$\psi_2 = - \int_{\Omega} \left\{ 2 \frac{\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \left(- \frac{\eta \xi}{\rho^2} \right) \theta^{(0)} \Lambda(\rho) + 2 \frac{\eta \xi}{\rho^2} \left(- \varepsilon_y^{(0)} - \varepsilon_z^{(0)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \frac{\varepsilon^{(0)} \cdot \rho \rho}{\rho^2} \right) V(\rho) \right\} \frac{\exp[-z \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + i(x\xi + y\eta)]}{\xi^2 + \eta^2} d\Omega \quad (3.7)$$

где ξ, η, ζ — компоненты вектора ρ .

Теперь с учетом выражений (3.7) и формул (3.3) и (3.5) находятся необходимые компоненты напряжений на границе $z=0$

$$\sigma_x^{(1)} = - \frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(0)} + \lambda^{(0)}} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z} + \\ + \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) dz + \int_{\Omega} e^{iR \cdot \rho} \left\{ 2 \frac{\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \times \right. \\ \times \left(1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} \right) \theta^{(0)} \Lambda(\rho) + 2 \left(1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} \right) \left(\varepsilon_x^{(0)} - 2 \frac{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \frac{\varepsilon^{(0)} \cdot \rho \rho}{\rho^2} \right) V(\rho) + \\ \left. + 2 \left(\varepsilon^{(0)} \cdot \frac{\rho \rho}{\rho^2} - \frac{\varepsilon_x^{(0)} \xi^2}{\rho^2} \right) V(\rho) \right\} d\Omega \\ \sigma_y^{(1)} = - \frac{\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} + \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial y} + \\ + \frac{\lambda^{(0)}}{\mu^{(0)} + \lambda^{(0)}} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) dz + \int_{\Omega} e^{iR \cdot \rho} \left\{ 2 \frac{\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \times \right. \\ \times \left(1 - \frac{\eta^2}{\rho^2} \right) \theta^{(0)} \Lambda(\rho) + 2 \left(1 - \frac{\eta^2}{\rho^2} \right) \left(\varepsilon_x^{(0)} - 2 \frac{\lambda^{(0)} + \mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \frac{\varepsilon^{(0)} \cdot \rho \rho}{\rho^2} \right) V(\rho) + \\ \left. + 2 \left(\frac{\varepsilon^{(0)} \cdot \rho \rho}{\rho^2} - \frac{\varepsilon_y^{(0)} \eta^2}{\rho^2} \right) V(\rho) \right\} d\Omega \\ R = xi + yj \quad (3.8)$$

Напряжения при $z \rightarrow \infty$ отыскиваются по формуле (3.3).

Каждое в отдельности напряжение не характеризует полностью напряженного состояния. Для оценки концентрации напряжений вводим интенсивность касательных напряжений

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \}^{1/2} \quad (3.9)$$

Подставляя выражение напряжений из (1.2) и учитывая, что флуктуации $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_y^{(1)}$ и другие малы, линеаризуем результат. В полученной формуле

$$T = T_0 + \frac{1}{6T_0} [(2\sigma_1 - \sigma_2) \sigma_x^{(1)} + (2\sigma_2 - \sigma_1) \sigma_y^{(1)} - (\sigma_1 - \sigma_2) \sigma_z^{(1)}] \quad (3.10)$$

величина

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2]^{1/2} \quad (3.11)$$

дает интенсивность касательных напряжений при отсутствии неоднородностей. Из вида формулы (3.10) становится ясным, что для нахождения интенсивности T на границе $z=0$ необходимо знать лишь $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_y^{(1)}$. Зная напряжения $T^{(1)}$ как на границе, так и в глубине полупространства, можно записать при помощи формулы (3.10) интенсивность касательных напряжений для $z=0$ и $z \rightarrow \infty$ в общем виде

$$T = T_0 + \frac{1}{6T_0} \int_{\Omega} \{ \Phi(\rho) \Lambda(\rho) + \Psi(\rho) V(\rho) \} e^{ir \cdot \rho} d\Omega \quad (3.12)$$

Функции $\Phi(\rho)$ и $\Psi(\rho)$ очень громоздки и здесь не приводятся. Учитывая (2.2), математическое ожидание и дисперсию T можно записать так:

$$\langle T \rangle = T_0 \quad (3.13)$$

$$D\{T\} = \frac{1}{36T_0^2} \int_{\Omega} \{ |\Phi|^2 S_{\lambda\lambda}(\rho) + (\Phi\Psi^* + \Psi\Phi^*) S_{\lambda\mu}(\rho) + |\Psi|^2 S_{\mu\mu}(\rho) \} d\Omega$$

В качестве коэффициента концентрации по аналогии с автором [6] примем величину

$$a = 1 + 2D^{1/2}\{T\} / T_0 \quad (3.14)$$

4. Все дальнейшие результаты приведены для тела, у которого $\lambda^{(0)} = \mu^{(0)}$. С учетом

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(0)} &= \frac{1}{2\mu^{(0)}} \left(\frac{4}{5} \sigma_1 - \frac{1}{5} \sigma_2 \right), & \varepsilon_z^{(0)} &= -\frac{1}{2\mu^{(0)}} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{5} \\ \varepsilon_y^{(0)} &= \frac{1}{2\mu^{(0)}} \left(\frac{4}{5} \sigma_2 - \frac{1}{5} \sigma_1 \right), & \theta^{(0)} &= \frac{1}{5\mu^{(0)}} (\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned}$$

получаем при $z=0$

$$\begin{aligned} \frac{D\{T\}}{T_0^2} &= \frac{\sigma_1^4}{36T_0^4 \mu^{(0)2}} [(0.28\alpha^4 - 0.92\alpha^3 + 1.39\alpha^2 - 0.92\alpha + 0.28) K_{\lambda\lambda} + \\ &+ (6.26\alpha^4 - 20.4\alpha^3 + 30.3\alpha^2 - 20.4\alpha + 6.26) K_{\mu\mu} + \\ &+ (-0.90\alpha^4 + 4.09\alpha^3 - 5.0\alpha^2 + 4.09\alpha - 0.90) K_{\lambda\mu}] \quad (4.1) \end{aligned}$$

и при $z \rightarrow \infty$

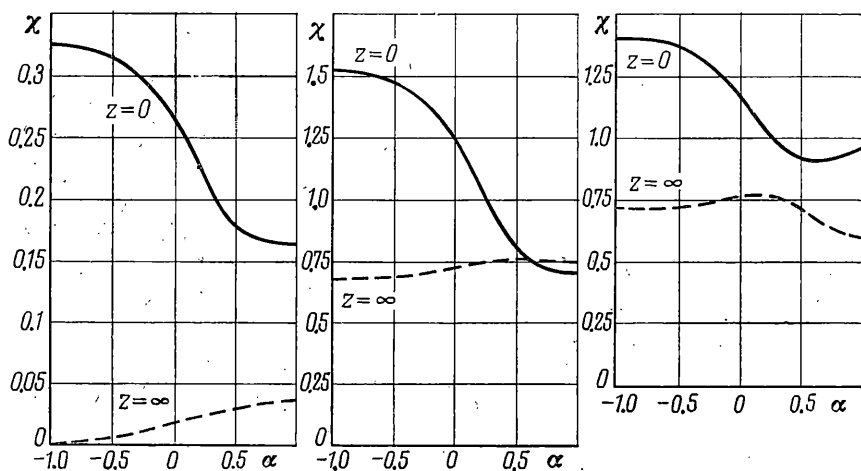
$$\begin{aligned} \frac{D\{T\}}{T_0^2} &= \frac{\sigma_1^4}{36T_0^4 \mu^{(0)2}} [0.032(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha + 1) K_{\lambda\lambda} + (2.15\alpha^4 - 3.65\alpha^3 + 5.20\alpha^2 - \\ &- 3.65\alpha + 2.15) K_{\mu\mu} + (0.18\alpha^4 - 0.71\alpha^3 + 0.20\alpha^2 - 0.71\alpha + 0.18) K_{\lambda\mu}] \quad (4.2) \\ \alpha &= \sigma_2 / \sigma_1, \quad -1 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

Метод вычисления интегралов, появляющихся в (4.1), (4.2), указан в [4].

Далее рассматриваются три случая: $K_{\lambda\lambda} \neq 0$, $K_{\mu\mu} = K_{\lambda\mu} = 0$, $K_{\mu\mu} \neq 0$, $K_{\lambda\lambda} = -K_{\lambda\mu} = 0$, $K_{\mu\mu} = K_{\lambda\lambda} = K_{\lambda\mu} = K$.

Формула (3.14) в этих случаях соответственно примет вид

$$a = 1 + 2\sqrt{K_{\lambda\lambda}} / \mu^{(0)}, \quad a = 1 + 2\sqrt{K_{\mu\mu}} / \mu^{(0)}, \quad a = 1 + 2\sqrt{K} / \mu^{(0)}$$



На фигуре приведены графики изменения величины χ в зависимости от α для всех трех случаев.

Результат расчета показывает, что флуктуации (концентрация) напряжений на границе полупространства больше (и иногда намного), чем в глубине полупространства. Степень этого превышения существенно зависит от соотношения макроскопически однородных нагружающих напряжений.

Поступила 20 II 1973.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В. А. О деформировании микронеоднородных упругих тел. ПММ, 1965, т. 22, вып. 5.
2. Ломакин В. А. Плоская задача теории упругости микронеоднородных тел. Инж. ж. МТТ, 1966, № 3.
3. Ломакин В. А., Шейнин В. И. О применимости метода малого параметра для оценки напряжений в неоднородных упругих средах. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3.
4. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Л., Судпромгиз, 1961.
5. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
6. Пальмов В. А. Напряженное состояние вблизи шероховатой поверхности упругих тел. ПММ, 1963, т. 22, вып. 5.