УДК 531.31

ЗАЩИТА ОТ УДАРОВ В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

Э. М. БОЛЫЧЕВЦЕВ, А. П. БОРИСОВ

(Москва)

Решается задача о синтезе оптимальной линейной характеристики амортизатора, защищающего объект от ударных воздействий. Значения параметров этой характеристики выбраны таким образом, что наибольшее относительное смещение объекта минимально, а его абсолютное ускорение не превосходит заданной величины.

1. Рассмотрим уравнение движения амортизированного объекта с одной степенью свободы

$$x^{\cdot\cdot} + \varphi(x, x^{\cdot}) = \sum_{n=0}^{[t]} \delta(t-n), \qquad t \in [0, \infty) \tag{1.1}$$

Здесь $\varphi(x, x^{\cdot}) \equiv ax^{\cdot} + bx$ — характеристика амортизатора, параметры a и b которой подлежат определению. Правая часть уравнения является последовательностью периодически повторяющихся мгновенных импульсов, идеализирующих ударные воздействия. Период следования и уровень импульсов, а также масса объекта без ограничения общности приняты равными единице. Символом $[\ldots]$ обозначен знак целой части.

Требуется для заданного числа $u>1$ выбрать параметры [1] a и b $(a\geqslant 0,\ 4b-a^2\geqslant 0)$ в (1.1) таким образом, чтобы при выполнении неравенства

$$|\varphi(x, x^{\cdot})| \equiv |ax^{\cdot}(t)+bx(t)| \leqslant u, \qquad t\in[0, \infty) \tag{1.2}$$

функционал

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |x(t)| \tag{1.3}$$

принимал наименьшее возможное значение. Здесь $x(t)$ — решение (1.1) с нулевыми начальными условиями и представляет собой отклонение объекта относительно основания. Неравенство (1.2) является ограничением на абсолютное ускорение объекта. Таким образом, путем выбора параметров a и b необходимо минимизировать наибольшее относительное перемещение объекта при ограниченности его перегрузки заданным допустимым уровнем u.

Задача, аналогичная поставленной, для случая, когда правая часть (1.1) представляет собой одиночное ударное воздействие, была решена в [1]. Абсолютный минимум наибольшего относительного перемещения объекта с одной степенью свободы при действии серии периодических ударов получен в [2]. Найденная там же характеристика амортизатора, реализующая этот минимум, имеет нелинейный вид

$$\varphi(x, x^{\cdot}) = u \operatorname{sign}(x^{\cdot} + kx)$$

Конструктивное воплощение такой характеристики или близкой к ней может усложнить проектируемую систему амортизации. Возникает естественный вопрос: каково значение минимума наибольшего отклонения m, реализуемое с помощью более простой в конструктивном отношении линейной характеристики амортизатора, и как далеко это значение от абсолютного минимума m°.

В работе получены зависимости величины минимума m и значений параметров a и b, при которых этот минимум достигается, в функции от параметра u. Дается также сравнение m и m°.

2. Найдем решение (1.1) при нулевых начальных условиях [2]

$$x(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin\omega(t-\tau) \sum_{n=0}^{[t]} \delta(\tau-n)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{[t]} e^{-\varepsilon(t-n)} \sin\omega(t-n), \qquad \varepsilon = \frac{a}{2}, \qquad \omega = \left(b - \frac{1}{4}a^2\right)^{1/2}$$

---

[1] При $u\leqslant 1$ формулируемая задача не имеет решения, так как функционал (1.3) обращается в ∞ при любых a и b.

[2] Значения ω и ε, при которых эта и последующие формулы не имеют смысла, рассматриваются как предельные.

Суммируя, получаем

$$x(t)=\frac{e^{-\varepsilon t}}{\omega(e^{2\varepsilon}-2e^{\varepsilon}\cos\omega+1)}\{e^{\varepsilon([t]+2)}\sin\omega(t-[t])-$$

$$-e^{\varepsilon([t]+1)}\sin\omega(t-[t]-1)-e^{\varepsilon}\sin\omega(t+1)+\sin\omega t\}$$

Или, после упрощения

$$x(t)=(\omega r)^{-1}\{e^{-\varepsilon s}\sin(\omega s+\alpha)-e^{-\varepsilon t}\sin(\omega t+\alpha)\} \tag{2.1}$$

$$r=(e^{2\varepsilon}-2e^{\varepsilon}\cos\omega+1)^{1/2},\qquad s=t-[t]-1$$

$$\sin\alpha=e^{\varepsilon}\sin\omega/r,\qquad \cos\alpha=(e^{\varepsilon}\cos\omega-1)/r \tag{2.2}$$

Далее находим (учитывая, что $b=\omega^2+\varepsilon^2$, $a=2\varepsilon$)

$$ax^{\bullet}(t)+bx(t)=(\omega^2+\varepsilon^2)(\omega r)^{-1}\{e^{-\varepsilon s}\sin(\omega s+\alpha+\beta)-e^{-\varepsilon t}\sin(\omega t+\alpha+\beta)\} \tag{2.3}$$

где r, s и α определяются по формулам (2.1), а β находится из условий

$$\cos\beta=(\omega^2-\varepsilon^2)/(\omega^2+\varepsilon^2)\qquad \sin\beta=2\varepsilon\omega/(\omega^2+\varepsilon^2)$$

Обозначим

$$\sup_{t\in[0,\infty)}|x(t)|=X(\varepsilon,\omega)$$

$$\sup_{t\in[0,\infty)}|ax^{\bullet}(t)+bx(t)|=\Phi(\varepsilon,\omega) \tag{2.4}$$

Здесь функции, стоящие под знаками модулей, определяются по формулам (2.1) и (2.3).

Теперь исходная задача свелась к задаче нелинейного программирования, а именно: найти минимум функции $X(\varepsilon, \omega)$ в области, определяемой неравенствами: $\varepsilon\geqslant 0$, $\omega\geqslant 0$, $\Phi(\varepsilon,\omega)-u\leqslant 0$.

При нахождении функций $X(\varepsilon, \omega)$ и $\Phi(\varepsilon, \omega)$ можно ограничиться изменением t в пределах некоторого конечного промежутка. Действительно, используя (2.1) и (2.2), находим

$$x(p)-x(p-1)=\omega^{-1}e^{-\varepsilon p}\sin\omega p\qquad (p - \text{целое}) \tag{2.5}$$

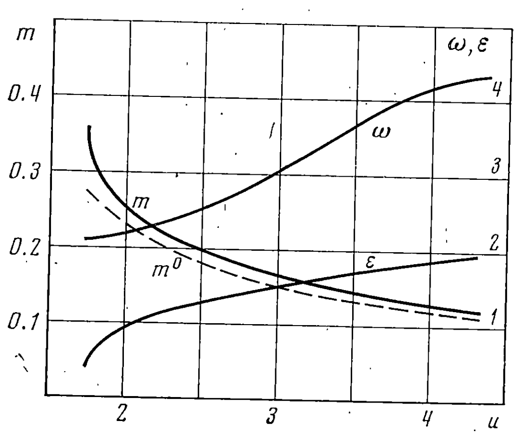
Так как направление действия импульсов положительно, то из фазовой картины движения легко заключить, что знак модуля в верхней строке (2.4) может быть опущен. Отсюда, с учетом (2.5), следует, что для нахождения $X(\varepsilon, \omega)$ (при $\omega\leqslant {}^3/_2\pi$) достаточно в (2.4) изменять t в промежутке $[p-1, p+1]$, где $p=[\pi/\omega]$.

Аналогично, используя (2.3), находим

$$ax^{\bullet}(q)+bx(q)-ax^{\bullet}(q-1)-bx(q-1)=(\omega^2+\varepsilon^2)\omega^{-1}e^{-\varepsilon q}\sin(\omega q+\beta)\qquad (q - \text{целое}) \tag{2.6}$$

Из (2.6) по тем же соображениям, следует, что для нахождения функции $\Phi(\varepsilon, \omega)$ достаточно в (2.4) изменять t в промежутке $[q-1, q+1]$, где $q=[(\pi-\beta)/\omega]$.

3. В результате расчетов, выполненных на ЭВМ, получены зависимости минимума наибольшего отклонения m и соответствующих этому минимуму значений параметров ε и ω (оптимальных) от величины параметра u. Графики этих зависимостей представлены на фигуре.



Интересным и в некоторой степени неожиданным оказался факт близости найденного минимума m к абсолютному минимуму m° достижимому в классе всех возможных характеристик амортизации $\varphi(x, x^{\bullet})$, удовлетворяющих ограничению (1.2). График m° показан на фигуре пунктиром. Для значений u, принадлежащих отрезку [1.9, 4.3], относительное отклонение m от m° не превосходит 10%. Есть определенная уверенность в том, что такая или большая близость m и m° сохраняется и для значений $u>4.3$ (это должны подтвердить дополнительные численные расчеты).

Изложенное выше подтверждает целесообразность использования линейной характеристики амортизатора при достаточно больших значениях u (по крайней мере, при $1.9 \leqslant u \leqslant 4.3$). Наоборот, при значениях u, близких к единице, расхождение между m и m° значительно, и поэтому для защиты объекта при малых уровнях допустимого абсолютного ускорения ($1 < u < 1.9$) использование линейной характеристики становится нецелесообразным.

Поступила 9 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гурецкий В. В.* О выборе оптимальных параметров характеристик противоударных амортизаторов. Инж. ж. МТТ, 1966, № 1.
2. *Болычевцев Э. М.* Выбор оптимального закона амортизации при ударных воздействиях. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 5.