системе через достаточно большое время уходят как угодно далеко от начала координат.

Для случая $q<0$ надо заменить t на $-t$, при этом дифференциальное уравнение (3) переходит в уравнение

$$-u^{\cdot\cdot\cdot}-pu^{\cdot}+qu=Ae^{-(\varkappa+{}^1/_3)t}f[(1-{}^1/_3k+{}^1/_9l)u-(k-{}^2/_3l)u^{\cdot}+lu^{\cdot\cdot}]$$

или

$$u^{\cdot\cdot\cdot}+pu^{\cdot}+(-q)u=-Ae^{-(\varkappa+{}^1/_3)t}f[(1-{}^1/_3k+{}^1/_9l)u-(k-{}^2/_3l)u^{\cdot}+lu^{\cdot\cdot}]$$

и, следовательно, случай $q<0$ исследуется аналогично случаю $q>0$, если в нем t, A, α заменить соответственно на $-t$, $-A$, $-\alpha$. В случае $q<0$ в пространстве параметров a, b, α, β областей идеального регулирования значительно больше, чем в случае $q>0$. Оставшиеся случаи $a_1\leqslant 0$ рассматриваются аналогично. В случае $a_1<0$, чтобы привести дифференциальное уравнение к виду (3), приходится вводить замену $x=u\exp({}^1/_3t)$, поэтому почти во всех случаях система оказывается абсолютно неустойчивой. В случае $a_1=0$ система уже приведена к нужному виду, и разбиение пространства параметров, вообще говоря, дается разбиением пространства параметров релейных систем, показанным на фиг. 1–4.

В результате частично проведенного исследования экспоненциально-релейных систем второго [2] и третьего порядка можно сделать вывод, что в тех случаях, когда в регулируемых системах нежелательны периодические отклонения или «рысканья» около заданного или запрограммированного движения, следует применить экспоненциально-релейное регулирование.

Поступила 8 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киняпин С. Д.* Об одной релейной неустойчивой системе. Автоматика и телемеханика, 1974, № 12.
2. *Киняпин С. Д.* К экспоненциально-релейному регулированию простейшей системы. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.

УДК 534

СЛОЖНЫЕ РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ В УПРУГИХ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМАХ

Г. П. НЕРУБЕНКО

(Николаев)

Качественно описываются сложные режимы движения (q ударов за p периодов действия внешнего возбуждения) в виброударных системах с упругими связями, рассмотренные в работах [1, 2]. Теоретически показана и экспериментально подтверждена возможность появления дополнительных соударений в системах, у которых частота свободных колебаний больше частоты вынуждающей силы.

1. В работах [1, 2] изучались сложные режимы движения (q ударов за p периодов действия внешнего возбуждения) в виброударных системах, не содержащих упругий элемент. Решим задачу качественного описания сложных режимов движения в виброударных системах с упругими связями.

Перемещение рассматриваемой виброударной системы в промежутках между соударениями описывается зависимостью

$$x=e^{-nt}[C_1\cos(k^2-n^2)^{1/2}+C_2\sin(k^2-n^2)^{1/2}t]+U\sin(\omega+\varphi-\varepsilon) \tag{1.1}$$

где n – коэффициент вязкого трения, k – частота собственных колебаний системы, U – амплитуда установившегося режима колебании, вызванных возмущающей силой с частотой ω и сдвигом фазы φ, $\operatorname{tg}\varepsilon=2n\omega(k^2-n^2)^{-1}$, t – текущее время, C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а $k>n$.

Изучим три случая: $\omega\ll k$, $\omega=k$, $\omega\gg k$. При $\omega\ll k$ после удара возникающие свободные колебания быстро (по сравнению с изменением возмущающей силы) затухают; в результате этого устойчивое движение виброударной системы описывается выражением: $x\approx U\sin(\omega t+\varphi-\varepsilon)$, за исключением начального участка после удара. Период ударов совпадает с периодом внешней силы, поэтому движение характеризуется только фазой удара φ, которую можно найти из условия (где r – расстояние системы до ограничителя)

$$x=-r=U\sin(\varphi-\varepsilon) \quad \text{при} \quad t=0 \tag{1.2}$$

Следующий основной удар произойдет через $T=2\pi/\omega$. Однако возникающие непосредственно после удара свободные колебания с большой (по сравнению с ω) частотой k могут привести к дополнительным соударениям, следующим после основного периодического удара. Для этого требуется, чтобы ускорение, вызываемое в системе возникающим свободным движением, превышало ускорение вынужденных колебаний, т. е.

$$\sin\varphi(z^2-1)\leqslant r/U, \qquad z=\omega/k \tag{1.3}$$

В противном случае система будет работать с «прилипанием», следующим после «основного» периодического удара. Для существования дополнительных ударов также требуется, чтобы в конце первого периода возникших свободных колебаний направление траектории их совпадало с направлением вынуждающей силы, причем последняя должна быть направлена в этот момент к ограничителю, а амплитуда вынужденных колебаний должна быть больше расстояния до ограничителя, т. е. $(\pi-2\varphi)\omega^{-1}>2\pi k^{-1}$.

Вероятное количество f дополнительных ударов вычислится по формуле: $f={}^1/_2(\pi-2\varphi)z^{-1}\pi^{-1}$.

Посмотрим, как ведет себя система при возникновении дополнительных колебаний. Допустим, удары происходят в каждый период свободных колебаний. В силу сказанного выше положим $n\approx 0$. Во время основного удара $t=0$, $x=-r$, $x^{\bullet}=Rx_0^{\bullet}$, т. е.

$$-r=C_1'\cos kt+C_2'\sin kt+U\sin\varphi=C_1'+U\sin\varphi$$

где R — коэффициент восстановления скорости. Через $2\pi/k$ произойдет следующий дополнительный удар: $t=2\pi/k$, $x=-r$, $x=-x_1^{\bullet}$, т. е.

$$Rx_0^{\bullet}=-C_1'k\sin kt+C_2'k\cos kt+U\omega\cos\varphi=C_2'k+U\omega\cos\varphi_1$$

$$-r=C_1+U\sin(2\pi\omega k^{-1}+\varphi)$$

$$-x_1^{\bullet}=C_2'k+U\omega[\cos 2\pi\omega k^{-1}\cos\varphi_1-\sin 2\pi\omega k^{-1}\sin\varphi_1]=$$

$$=C_2'k+U\omega\cos\varphi-U\omega\sin\varphi\sin 2\pi\omega k^{-1}=Rx_0^{\bullet}-U\omega\sin\varphi\cos 2\pi\omega k^{-1}$$

Совместим время начала следующего этапа движения с нулем.

Скорость системы после дополнительного удара равна

$$Rx_1^{\bullet}=-R[Rx_0^{\bullet}-U\omega\sin\varphi_1\sin 2\pi\omega k^{-1}]$$

и затем удар произойдет при $t=2\pi/k$ со скоростью перед ударом

$$-x_2^{\bullet}=-R[Rx_0^{\bullet}-U\omega\sin\varphi_1\sin 2\pi\omega k^{-1}]+RU\omega\sin\varphi_2\sin 2\pi\omega k^{-1} \tag{1.4}$$

После удара скорость $x_2^{\bullet}$ еще уменьшится из-за потерь при ударе и станет равной

$$Rx_2^{\bullet}=R^2[Rx_0^{\bullet}-U\omega\sin\varphi\sin 2\pi\omega k^{-1}]=RU\omega\sin\varphi_2\sin 2\pi\omega k^{-1}$$

Поскольку $R<1$ и $\omega/k\ll 1$, то практически после одного-двух дополнительных ударов скорость системы упадет до нуля и движение при отрыве от ограничителя начнется при скорости, равной нулю, с нарастанием последней до значений скорости вынужденных колебаний. Теоретически скорость перед f дополнительным ударом выразится так:

$$-x_n^{\bullet}=(-1)^{f+1}(R)^{f-1}(Rx_0^{\bullet}-U\omega\sin\varphi_1\sin 2\pi\omega k^{-1})+$$

$$+(1)^{f+1}R^{f-2}U\omega\sin\varphi_2\sin 2\pi\omega k^{-1}+\ldots+RU\omega\sin\varphi_{f-1}\sin 2\pi\omega k^{-1}-U\omega\sin\varphi_f\sin 2\omega k^{-1}$$

$$f\geqslant 0$$

Например, ко второму дополнительному удару скорость приходит к нулю, т. е. из (1.4) следует

$$-R(Rx_0^{\bullet}-U\omega\sin\varphi_1\sin 2\pi\omega k^{-1})-U\omega\sin\varphi_2\sin 2\pi\omega k^{-1}=0$$

а после преобразований получаем

$$R\sin\varphi_1-R^2\cos\varphi_1\sin^{-1}(2\pi\omega k^{-1})=\sin\varphi_2$$

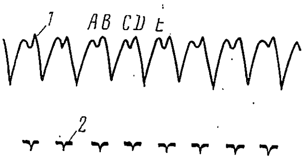
где φ_1 определяется из (1.2), а $\varphi_2=\varphi_1+2\pi\omega k^{-1}$. Поэтому коэффициент восстановления скорости при ударе, при котором ко второму дополнительному удару скорость системы упадет до нуля, равен

$$R=\frac{\sin\varphi_1\pm[\sin^2\varphi_1-4\cos\varphi_1\sin^{-1}(2\pi\omega k^{-1})(\sin\varphi_1+\cos\varphi_1\sin 2\pi\omega k^{-1})]^{1/2}}{2\cos\varphi_1\sin^{-1}(2\pi\omega k^{-1})}$$

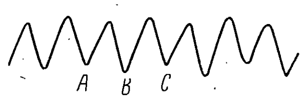
Из последнего выражения следует условие существования (выражение в квадратных скобках должно быть больше или равно нулю)

$$\sin 2\pi\omega k^{-1}(1-5\cos^2\varphi_1)\geqslant 2\sin 2\varphi_1$$

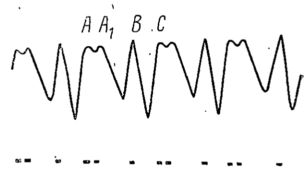
Для случая $\omega\gg k$, а точнее, как это следует из выражения (1.3), для $z^2>1+\sin^{-1}\varphi$, дополнительные устойчивые соударения не могут существовать, т. е. в системах с $\omega\gg k$ могут устанавливаться только такие периодические движения,



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

у которых период соударений равен или кратен периоду действия внешней силы.

При совпадении частот, т. е. при $\omega=k$, из самой структуры уравнения, описывающего движение системы в промежутке между ударами, следует [2, 3] вывод о невозможности движения с дополнительными соударениями.

2. Проведен эксперимент с виброударной системой, содержащей груз, прикрепленный пружиной к вибратору, совершающему однонаправленные гармонические колебания, причем груз может периодически соударяться с неподвижным упором. Расстояние между упором и грузом регулируется. Результаты эксперимента показаны на фиг. 1–3, где кривая *1* – запись движения груза, а всплески *2* характеризуют моменты ударов об упор.

Фиг. 1 показывает поведение системы, у которой $z={}^1/_3$. Основные удары происходят в точках A, C, E, а дополнительный удар — в точках B, D и т. д. На участках AB и CD четко просматривается движение с частотой свободных колебаний, тогда как период вынужденных колебаний равен AC.

Фиг. 2 и 3 подтверждают развиваемую гипотезу на примере колебательной системы с ограниченным возбуждением [4]. На фиг. 2 воспроизведена запись движения колебательной системы без ограничителя, $z=0.35$; участок AB соответствует «слабому» движению с меньшей амплитудой, чем на участке BC «сильного» движения. При установке упора происходит следующее (фиг. 3): на участке слабого движения возникает дополнительное соударение (т. A), т. е. свободные колебания на участке слабого движения AB успевают «развиться». На участке BC сильного движения дополнительные соударения отсутствуют.

Поступила 28 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Елеонский Е. Е., Нерубенко Г. П.* К вопросу о движении частицы с непрерывным подбрасыванием. Тр. Николаевского кораблестроит. ин-та, вып. 34, 1970.
2. *Кобринский А. Е., Кобринский А. А.* Виброударные системы. М., «Наука», 1973.
3. *Нерубенко Г. П.* К динамике двухкомпонентного виброударного лотка. Машиноведение, 1970, № 4.
4. *Кононенко В. О.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М., «Наука», 1964.