

ОБ ОДНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С. Д. КИНЯПИ

(Горький)

Рассматривается экспоненциально-релейная система третьего порядка. Изучение ее динамики сводится к исследованию динамики четырех релейных, частного вида, неустойчивых систем того же порядка. Дается разбиение пространств параметров рассматриваемых систем.

Рассмотрим экспоненциально-релейную систему третьего порядка, описываемую уравнением при постоянных параметрах a_i , A_1 , k_1 , l_1 и при специальном выборе параметра κ_1

$$a_0 x''' + a_1 x'' + a_2 x' + a_3 x = A_1 e^{\kappa_1 t} f(x + k_1 x' + l_1 x'') \quad (1)$$

в котором

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi > 0 \text{ или } \xi = 0, \xi' > 0 \\ -1 < f(\xi) < 1 & \text{при } \xi = 0, \xi' = 0 \\ -1 & \text{при } \xi < 0 \text{ или } \xi = 0, \xi' < 0 \end{cases}$$

Исследование этого уравнения в зависимости от знака коэффициента a_1 при второй производной распадается на три следующих случая: $a_1 > 0$; $a_1 = 0$; $a_1 < 0$.

Случай 1: $a_1 > 0$. Не уменьшая общности, уравнение (1) можно записать в виде

$$x''' + x'' + c_1 x' + c_2 x = A_2 e^{\kappa_1 t} f(x + kx' + lx'') \quad (2)$$

Это уравнение, в свою очередь, заменой переменной $x = u \exp(-t/3t)$ приводится к виду

$$u''' + pu'' + qu = Ae^{(\kappa + 1/3)t} f[(1 - 1/3k + 1/9l)u + (k - 2/3l)u' + lu''] \quad (3)$$

Если ввести еще одну замену времени $t = a^{-1}\tau$ так, чтобы a было действительным корнем уравнения

$$a^3 + pa - q = 0 \quad (4)$$

ввести обозначения параметров $1/4b = (1 + pa^{-2}) = qa^{-3}$, $\alpha = a(k - 2/3l)(1 - 1/3k + 1/9l)^{-1}$, $\beta = a^2 l (1 - 1/3k + 1/9l)^{-1}$ и учесть, что выражение $(1 - 1/3k + 1/9l)$ в новых обозначениях записывается в виде $1 - 1/3k + 1/9l = 9a^2(9a^2 + 3\alpha\alpha + \beta)^{-1}$, то система (3) представляется в окончательном виде

$$u''' + (1/4b - 1)u'' + 1/4bu' = Ae^{(\kappa + 1/3)t} \text{sign}(9a^2 + 3\alpha\alpha + \beta) f(u + \alpha u' + \beta u'') \quad (5)$$

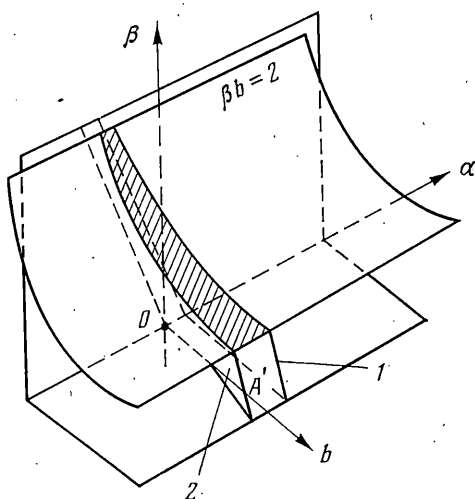
Известно, что уравнение (4) имеет единственный действительный положительный корень при $q > 0$. В соответствии с этим система (3) с параметрами A , p , q , k , l , κ переходит в систему (5), имеющую параметры A , a , b , α , β , κ . Между параметрами обеих систем устанавливаются взаимно-однозначные соответствия. В случае, когда $\kappa = -1/3$, а только этот случай и будет рассматриваться ниже, в отношении исследования дифференциального уравнения (5) можно сделать следующее замечание: структура полученного уравнения (5) такова, что характер решений, разбиение фазового пространства на траектории и разбиение пространства параметров на области зависят только от знака величины A (а не от его абсолютной величины), в силу чего исследование динамики дифференциального уравнения (5) сводится к исследованию динамики симметричных относительно начала координат следующих релейных систем, зависящих только от трех параметров: b , α и β :

$$x''' + (1/4b - 1)x'' + 1/4bx' = \pm f(x + \alpha x' + \beta x'') \quad (6)$$

Фазовое пространство каждой из систем (6) в этом случае состоит из двух фазовых полупространств G^+ и G^- , в каждом из которых в зависимости от величины параметра $b > 0$ имеется либо особая точка типа седло-узла ($0 < b < 1$), либо особая точка типа седло-фокуса ($b > 1$) и плоскости переключения. Таким образом, в случае $a_1 > 0$, $q > 0$ исследование движений в системе (5) сводится к исследованию четырех неустойчивых релейных систем (6) в следующих случаях:

1. $A = +1$ ($0 < b < 1$), 2. $A = +1$ ($b > 1$)
3. $A = -1$ ($0 < b < 1$), 4. $A = -1$ ($b > 1$)

Результаты исследования этих случаев, полученные методом точечных преобразований полу плоскости переклочения в себя (см. подробнее, например, в [1]), отображены на фиг. 1–4, где представлены разбиения пространств параметров b , α , β на области с качественно одинаковым разбиением соответствующих фазовых пространств на траектории¹. На фиг. 1, соответствующей $A > 0$, $0 < b < 1$, цифрами 1 и 2 обозначены соответственно поверхности $\beta = (1-2\alpha)/(1+\nu)$, $\beta = -(1+\nu)^{-1}[2\alpha - (1-\nu)/(1+\nu)]$, где $\nu = (1-b)^{1/2}$. Область A' – область существования устойчивого предельного цикла с конечной областью притяжения. Остальные области – области неустойчивости.



Фиг. 1

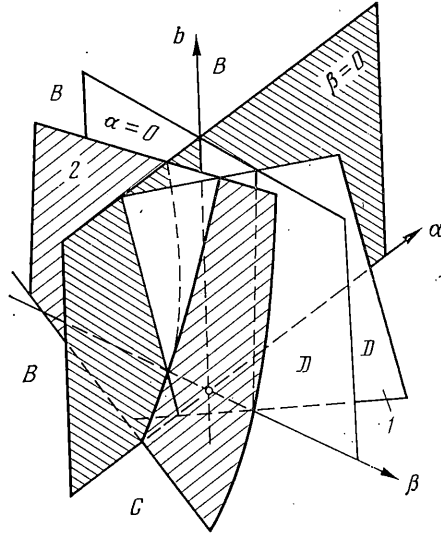
На фиг. 2, соответствующей $A > 0$, $b > 1$, цифрами 1 и 2 обозначены соответственно поверхности $\alpha = \beta^{-1/2}(b-8)b^{-1}$, $12+2(2+b)\alpha+(4-b)\beta=0$. Области B – области абсолютной неустойчивости, области C и D – области неустойчивости с различным количеством неустойчивых (седловых) предельных циклов, число которых увеличивается до бесконечности, по мере того как точка в пространстве параметров приближается к поверхности 1.

На фиг. 3, соответствующей $A < 0$, $0 < b < 1$, цифрой 1 обозначена поверхность $\beta = (1-\nu)^{-1}[2\alpha+4/(1-\nu)]$, а цифрой 2 – поверхность $\beta = 4(8+b)^{-1}(1-2\alpha)$, где $\nu = (1-b)^{1/2}$. Области A' и A'' – области устойчивого состояния равновесия на пластинке скользящих движений с конечной областью притяжения. Области притяжения к состоянию равновесия похожи одна на другую и отличаются лишь предельными неустойчивыми циклами, входящими в границу. В области A'' – это предельный цикл, охватывающий пластину скользящих движений, а в области A' – это предельный цикл, состоящий из траекторий системы и замыкающих кусков траекторий скользящих движений. Оставшиеся области – области неустойчивости. На фиг. 4, соответствующей $A < 0$, $b > 1$, цифрой 1 обозначена поверхность $12+2(2+b)\alpha+(4-b)\beta=0$, а цифрой 2 – плоскость $\beta = \alpha - 1$. Области A' и A'' – области с устойчивыми предельными циклами с ограниченными областями притяжения, A''' – область устойчивого состояния равновесия на пластине скользящего движения тоже с ограниченной областью притяжения, области B – области неустойчивости.

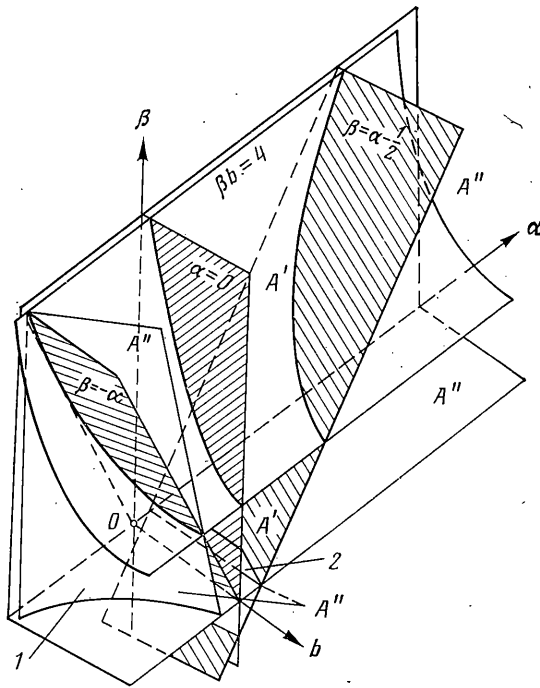
Полученные разбиения позволяют дать разбиение четырехмерного пространства параметров a , b , α , β дифференциального уравнения (5), которое разбивается соотношением $9a^2+3a\alpha+\beta=0$ соответственно на два полупространства (на фиг. 5 поверхность $9a^2+3a\alpha+\beta=0$, обозначенная цифрой 1, разбивает рассматриваемую область на область I, где $9a^2+3a\alpha+\beta > 0$, и область II, где $9a^2+3a\alpha+\beta < 0$). В каждом из полупространств имеет место одно из приведенных на фиг. 1–4 разбиений пространства параметров b , α , β .

Так, в случае $A > 0$, $0 < b < 1$, $q > 0$ в полупространстве $9a^2+3a\alpha+\beta > 0$ (область I на фиг. 5) имеет место разбиение пространства параметров b , α , β , соответствующее

¹ Для того чтобы получить разбиение пространства параметров, приведенное на фиг. 1–4, следует от разбиения пространства обобщенных параметров, рассматриваемых в работе [1], перейти к разбиению пространства параметров b , α , β , непосредственно входящих в рассматриваемое уравнение.



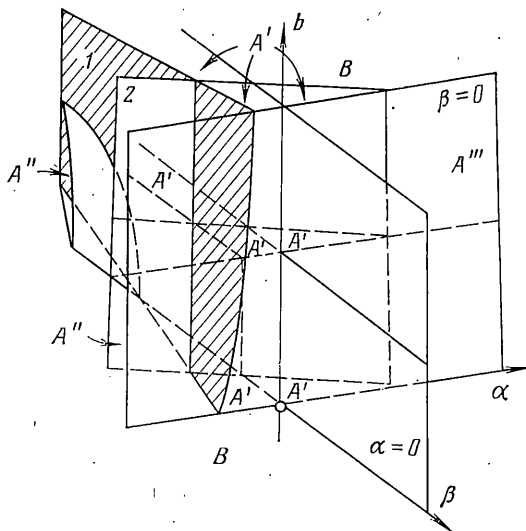
Фиг. 2



Фиг. 3

случаю релейных систем с $A=+1$, $0 < b < 1$ (фиг. 1), а в полупространстве $9a^2 + 3ac + \beta < 0$ (область II на фиг. 5) имеет место разбиение пространства параметров b , α , β , соответствующее разбиению релейной системы в случае $A=-1$, $0 < b < 1$ (фиг. 3) и т. д.

Теперь поскольку связь между решениями дифференциальных уравнений (5) и дифференциальным уравнением (2) проста и диктуется соотношением ($x = u \exp(-1/3t)$), не представляет труда получить разбиение пространства парамет-



Фиг. 4

ров первоначальной системы (2). Все стационарные движения системы (5) и области притяжения к ним после соответствующего умножения на $\exp(-1/3t)$ будут стремиться к нулю.

Для того чтобы понять, как разбиваются оставшиеся области пространства параметров a, b, α, β системы (5) при умножении на $\exp(-1/3t)$, посмотрим, как изменяются общие решения линейных частей систем при произведенных заменах. Первоначальное общее решение линейной части системы (5) в случае $0 < b < 1$ имеет вид

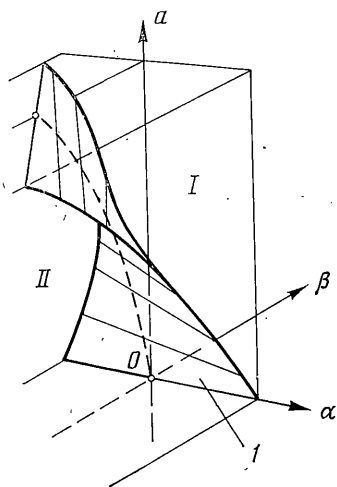
$$u = c_1 e^{-t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t}, \quad \lambda_{2,3} = 1/2(1 \pm \nu)$$

При замене времени $t = a^{-1}\tau$ оно переходит в решение

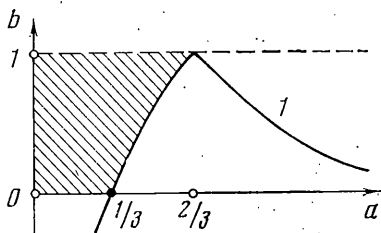
$$u_1 = c_1 e^{-at} + c_2 e^{\lambda_2 at} + c_3 e^{\lambda_3 at}$$

которое с учетом соотношений $x = u \exp(-1/3t)$ записывается в виде

$$x = c_1 e^{-(a+1/3)t} + c_2 e^{(\lambda_2 a - 1/3)t} + c_3 e^{(\lambda_3 a - 1/3)t}$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Из последнего выражения видно, что если $1/2(1+\nu)a < 1/3$ или, что то же самое $b > 4/9(3a-1)a^{-2}$, $a < 2/3$, то решение стремится к нулю. При выполнении неравенства $(1+\nu)a > 2/3$ решения будут нарастающие.

На фиг. 6 дано соответствующее разбиение гиперплоскости (a, b) в пространстве параметров a, b, α, β на две соответствующие области. Первая из них заштрихована, кривая 1 описывается уравнением $9a^2b = 1/4(3a-1)$.

Таким образом, пространство параметров a, b, α, β дифференциального уравнения (2) в основном разбивается на две области: область идеального регулирования, когда все движения из определенной области начальных условий приходят к началу координат, и области непригодного регулирования, когда любые движения в

системе через достаточно большое время уходят как угодно далеко от начала координат.

Для случая $q < 0$ надо заменить t на $-t$, при этом дифференциальное уравнение (3) переходит в уравнение

$$-u''' - pu' + qu = Ae^{-(\alpha + \beta)t} f[(1 - 1/3k + 1/9l)u - (k - 2/3l)u' + lu'']$$

или

$$u''' + pu' + (-q)u = -Ae^{-(\alpha + \beta)t} f[(1 - 1/3k + 1/9l)u - (k - 2/3l)u' + lu'']$$

и, следовательно, случай $q < 0$ исследуется аналогично случаю $q > 0$, если в нем t , A , α заменить соответственно на $-t$, $-A$, $-\alpha$. В случае $q < 0$ в пространстве параметров a , b , α , β областей идеального регулирования значительно больше, чем в случае $q > 0$. Оставшиеся случаи $a_1 \leq 0$ рассматриваются аналогично. В случае $a_1 < 0$, чтобы привести дифференциальное уравнение к виду (3), приходится вводить замену $x = u \exp(1/3t)$, поэтому почти во всех случаях система оказывается абсолютно неустойчивой. В случае $a_1 = 0$ система уже приведена к нужному виду, и разбиение пространства параметров, вообще говоря, дается разбиением пространства параметров релейных систем, показанным на фиг. 1-4.

В результате частично проведенного исследования экспоненциально-релейных систем второго [2] и третьего порядка можно сделать вывод, что в тех случаях, когда в регулируемых системах нежелательны периодические отклонения или «рысканья» около заданного или запрограммированного движения, следует применить экспоненциально-релейное регулирование.

Поступила 8 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Киняпин С. Д. Об одной релейной неустойчивой системе. Автоматика и телемеханика, 1974, № 12.
2. Киняпин С. Д. К экспоненциально-релейному регулированию простейшей системы. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.

УДК 534

СЛОЖНЫЕ РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ В УПРУГИХ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМАХ

Г. П. НЕРУБЕНКО

(Николаев)

Качественно описываются сложные режимы движения (q ударов за p периодов действия внешнего возбуждения) в виброударных системах с упругими связями, рассмотренные в работах [1, 2]. Теоретически показана и экспериментально подтверждена возможность появления дополнительных соударений в системах, у которых частота свободных колебаний больше частоты вынуждающей силы.

1. В работах [1, 2] изучались сложные режимы движения (q ударов за p периодов действия внешнего возбуждения) в виброударных системах, не содержащих упругий элемент. Решим задачу качественного описания сложных режимов движения в виброударных системах с упругими связями.

Перемещение рассматриваемой виброударной системы в промежутках между соударениями описывается зависимостью

$$x = e^{-nt} [C_1 \cos(k^2 - n^2)^{1/2} t + C_2 \sin(k^2 - n^2)^{1/2} t] + U \sin(\omega t + \varphi - \varepsilon) \quad (1.1)$$

где n — коэффициент вязкого трения, k — частота собственных колебаний системы, U — амплитуда установившегося режима колебаний, вызванных возмущающей силой с частотой ω и сдвигом фазы φ , $\operatorname{tg} \varepsilon = 2n\omega(k^2 - n^2)^{-1}$, t — текущее время, C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а $k > n$.

Изучим три случая: $\omega \ll k$, $\omega = k$, $\omega \gg k$. При $\omega \ll k$ после удара возникающие свободные колебания быстро (по сравнению с изменением возмущающей силы) затухают; в результате этого устойчивое движение виброударной системы описывается выражением: $x \approx U \sin(\omega t + \varphi - \varepsilon)$, за исключением начального участка после удара. Период ударов совпадает с периодом внешней силы, поэтому движение характеризуется только фазой удара φ , которую можно найти из условия (где r — расстояние